

POLINÔMIOS DE FIBONACCI: ALGUMAS APLICAÇÕES

Leidyanna Jhonaika Garcia Lima¹

Jorge Andrés Julca Avila²

Resumo: Neste trabalho definimos os Polinômios de Fibonacci, estudamos diferentes formulações de definição, demonstramos algumas propriedades e apresentamos algumas aplicações, principalmente, na resolução de um Problema de Valor Inicial. O método que usa esses polinômios é um método alternativo entre os clássicos métodos de resolução de uma Equação Diferencial Ordinária.

Palavras-chave: Polinômios de Fibonacci. Equação Diferencial Ordinária. Problemas de Valor Inicial. Solução Aproximada.

1 Introdução

A sequência numérica 1, 1, 2, 3, 5, 8, ... onde cada termo a partir do segundo, é a soma dos dois termos anteriores, já era estudada pelos matemáticos indianos Virahatika, Gopala e Hemacandra muito antes de 1202 D.C. [7] mas foi neste ano que ela foi inserida no mundo ocidental pelo matemático italiano Leonardo de Pisa através do livro “Liber Abbaci” que era composto de 15 capítulos e teve uma recente publicação em 636 páginas, baseada na edição de Baldassare Boncompagni com tradução para o inglês de Laurence E. Sigler [8]. Desde sua introdução na Europa, a sequência de Fibonacci tem sido aplicada extensivamente em pesquisas nas mais diversas áreas da ciência e da arte, por exemplo, ela é usada para investigar correlações existentes na sequência gerômica do DNA humano [9], também para analisar as estruturas de transmissão de ondas periodicamente carregadas através de linhas de transmissão do tipo Fibonacci [10] e se relaciona com as distâncias interatômicas em um quasicristal [11]. Este último tema rendeu ao cientista israelense Daniel Shechtman o Prêmio Nobel de Química de 2011.

Paralelamente ao estudo da sequência de Fibonacci propriamente dita existem muitos estudos a partir de suas derivações em nível de matemática superior mas que estão relacionados a temas distintos da matemática básica como médias harmônica, aritmética e geométrica [12], matrizes [13], números primos [14], equações diofantinas [15], polinômios [17] e [16], e análise

¹Aluno do Mestrado Profissional em Matemática, Turma 2012
Instituição: Universidade Federal de São João del-Rei - UFSJ
E-mail: leidyanna_jglima@yahoo.com.br

²Orientador do Trabalho de Conclusão de Curso
Departamento de Matemática e Estatística - DEMAT, UFSJ
E-mail: avila_jaj@ufsj.edu.br

combinatória [18]. Uma dessas derivações são os polinômios de Fibonacci.

Neste trabalho estudaremos os Polinômios de Fibonacci. Pretendemos mostrar algumas de suas propriedades e apresentar aplicações enfatizando seu uso na solução de equações diferenciais ordinárias com base principalmente em [2] e [19].

2 Definição dos Polinômios de Fibonacci

Nesta seção estudaremos algumas definições e generalizações dos Polinômios Fibonacci.

Definição 2.1 (Recorrência Lineares de Segunda Ordem homogêneas) Dizemos que a recorrência da forma

$$y_{n+1} + py_n + qy_{n-1} = 0,$$

onde $q \neq 0$, é uma recorrência linear de segunda ordem homogênea. Quando $q = 0$ é dita de primeira ordem.

Notação 2.1 Usamos a notação (a, b) para indicar o *máximo divisor comum* de a e b .

Definição 2.2 (Polinômios de Fibonacci) Os Polinômios de Fibonacci são definidos pela relação de recorrência linear de segunda ordem

$$F_{n+1}(x) = xF_n(x) + F_{n-1}(x), \quad n > 1, \quad x \in \mathbb{R} \quad (1)$$

com as condições iniciais

$$F_1(x) = 1, \quad F_2(x) = x \quad (2)$$

Para o caso particular de $x = 1$, a relação acima com as mesmas condições iniciais reduz-se à relação de recorrência chamada de *números de Fibonacci*:

$$\begin{cases} F_{n+1} = F_n + F_{n-1}, & n > 1 \\ F_1 = 1, \\ F_2 = 1 \end{cases}$$

Os sete primeiros polinômios de Fibonacci, (1) - (2), são dados por

$$\begin{aligned} F_1(x) &= 1 \\ F_2(x) &= x \\ F_3(x) &= x^2 + 1 \\ F_4(x) &= x^3 + 2x \\ F_5(x) &= x^4 + 3x^2 + 1 \\ F_6(x) &= x^5 + 4x^3 + 3x \\ F_7(x) &= x^6 + 5x^4 + 6x^2 + 1 \end{aligned}$$

O gráfico de cada um desses polinômios, para $x \in [-2, 2]$, estão dados na Figura 1.

Ao escrevermos a sequência de expansões binomiais $(x + 1)^n$, para cada $n \in \mathbb{N}$, obtemos os polinômios de Fibonacci a partir das somas das diagonais, de modo que a soma da n -ésima diagonal é o $F_n(x)$. Por exemplo, na Figura 2, a soma da primeira diagonal é $F_1(x) = 1$ e a soma da sexta diagonal é $F_6(x) = x^5 + 4x^3 + 3x$.

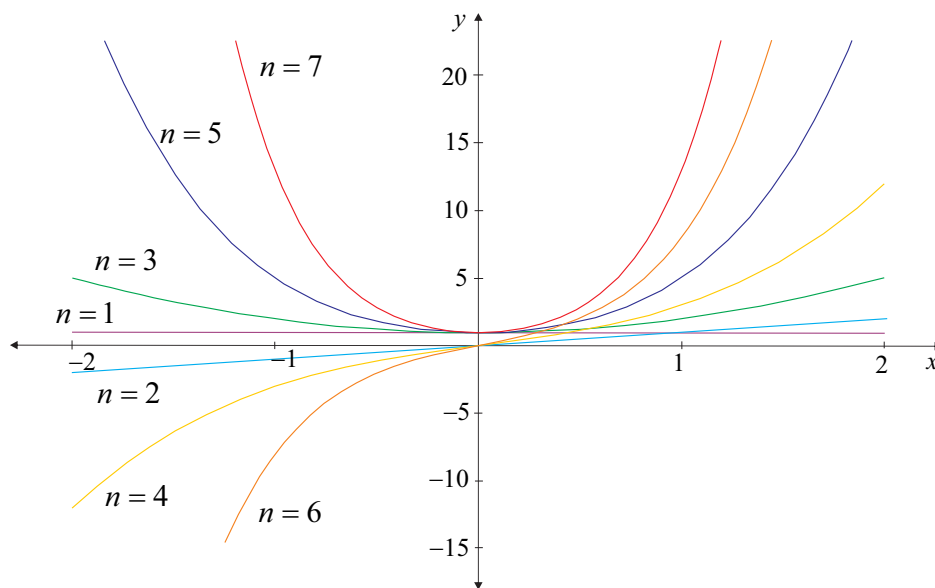


Figura 1: Gráfico dos sete primeiros polinômios de Fibonacci.

n	$(x+1)^n$
0	1
1	$x + 1$
2	$x^2 + 2x + 1$
3	$x^3 + 3x^2 + 3x + 1$
4	$x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1$
5	$x^5 + 5x^4 + 10x^3 + 10x^2 + 5x + 1$
\vdots	

Figura 2: Expansões do binômio $(x+1)^n$.

Se modificarmos a primeira condição inicial de (2) construímos novas sequências de polinômios. Por exemplo, os *Polinômios de Lucas* iniciam com $F_1(x) = 2$ e $F_2(x) = x$ e são denotados por $L_n(x)$. Por outro lado, se mantivermos fixas as condições iniciais (2) e modificarmos a recorrência (1) para

$$F_{n+1}(x) = 2xF_n(x) + F_{n-1}(x), \quad n > 1, \quad x \in \mathbb{R},$$

obtemos os *Polinômios de Pell*, denotados por $P_n(x)$. Por exemplo, em [6] encontra-se relações importantes entre $F_n(x)$, $L_n(x)$ e $P_n(x)$.

Todos esses polinômios citados até aqui são casos particulares de uma classe maior de polinômios do tipo Fibonacci, como veremos na seguinte definição.

Definição 2.3 (Generalização dos Polinômios de Fibonacci) *Os polinômios gerais do tipo Fibonacci são definidos pela relação de recorrência linear de segunda ordem*

$$U_{n+1}(x) = xU_n(x) + U_{n-1}(x), \quad n > 1, \quad x \in \mathbb{R} \quad (3)$$

com as condições iniciais

$$U_1(x) = a, \quad U_2(x) = bx \quad (4)$$

A seguir definiremos uma fórmula explícita para os polinômios de Fibonacci, encontrada em [3].

Definição 2.4 (Fórmula explícita para os polinômios de Fibonacci) *Os polinômios de Fibonacci são definidos por*

$$F_{n+1}(x) = \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n-i}{i} x^{n-2i}, \quad n \geq 0, \quad (5)$$

sendo $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ o menor inteiro de $\frac{n}{2}$.

Uma outra forma de gerar os polinômios de Fibonacci é através de matrizes quadradas de ordem 2, [16]. Sejam as matrizes

$$Q_2^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad Q_2^1 = \begin{pmatrix} x & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Usando a definição de potência de matrizes, temos que $Q_2^{n+1} = Q_2^n Q_2^1$ e, por indução matemática sobre n ,

$$Q_2^n = \begin{pmatrix} F_{n+1}(x) & F_n(x) \\ F_n(x) & F_{n-1}(x) \end{pmatrix} \quad (6)$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

A forma matricial (6) é muito importante, pois, com esta formulação aproveita-se a teoria de matrizes e determinantes. Por exemplo, a seguinte propriedade

$$F_{n+1}(x) F_{n-1}(x) - F_n^2(x) = (-1)^n$$

é consequência de

$$\det Q_2^n = (\det Q_2^1)^n = (-1)^n$$

Até aqui temos estudado quatro formas distintas: (1), (3), (5) e (6), para gerar os polinômios de Fibonacci. A escolha de uma ou outra dependerá do problema de nosso interesse. Neste trabalho, precisamos representá-los na forma matricial explícita, o que não ocorre em (6). Para tanto, vamos começar organizando seus coeficientes em ordem crescente das potências de x , veja a Tabela 1.

Segundo a Tabela 1, é natural, definir uma matriz $B = (b_{ij})_{N \times N}$, $j = 0, \dots, N-1$, como sendo a matriz triangular inferior formada pelos coeficientes dos polinômios de Fibonacci, onde N denota um número natural finito. Também, denotemos o vetor $X = (x^0, x^1, x^2, \dots, x^{N-1})^T$ e o vetor-polinômio de Fibonacci por $F = (F_1(x), F_2(x), \dots, F_N(x))^T$.

Observe que o i -ésimo polinômio de Fibonacci, para $i = 1, \dots, N$, é dado por

$$F_i(x) = \sum_{j=0}^{i-1} b_{ij} x^j \quad (7)$$

Tabela 1: Coeficientes dos Polinômios de Fibonacci.

n	x^0	x^1	x^2	x^3	x^4	x^5	x^6	x^7	\dots
1	1								
2	0	1							
3	1	0	1						
4	0	2	0	1					
5	1	0	3	0	1				
6	0	3	0	4	0	1			
7	1	0	6	0	5	0	1		
8	0	4	0	10	0	6	0	1	
\vdots									

Podemos expressar (7), em notação matricial, como

$$F = B X \quad (8)$$

Os elementos de B que estão nas diagonais ímpares, no sentido da diagonal secundária, formam o Triângulo de Pascal, dados em [19].

Para todo N ímpar,

$$B = \begin{pmatrix} \binom{0}{0} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \binom{1}{0} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \binom{1}{1} & 0 & \binom{2}{0} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \binom{2}{1} & 0 & \binom{3}{0} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \binom{\frac{N-1}{2}}{\frac{N-3}{2}} & 0 & \binom{\frac{N+1}{2}}{\frac{N-5}{2}} & \dots & \binom{N-2}{0} & 0 \\ \binom{\frac{N-1}{2}}{\frac{N-1}{2}} & 0 & \binom{\frac{N+1}{2}}{\frac{N-3}{2}} & 0 & \dots & 0 & \binom{N-1}{0} \end{pmatrix} \quad (9)$$

Para todo N par,

$$B = \begin{pmatrix} \binom{0}{0} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \binom{1}{0} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \binom{1}{1} & 0 & \binom{2}{0} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \binom{2}{1} & 0 & \binom{3}{0} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \binom{\frac{N-2}{2}}{\frac{N-2}{2}} & 0 & \binom{\frac{N}{2}}{\frac{N-4}{2}} & 0 & \dots & \binom{N-2}{0} & 0 \\ 0 & \binom{\frac{N}{2}}{\frac{N-2}{2}} & 0 & \binom{\frac{N+2}{2}}{\frac{N-4}{2}} & \dots & 0 & \binom{N-1}{0} \end{pmatrix} \quad (10)$$

Exemplo 2.1 Tomando $F = (F_1(x), F_2(x), F_3(x), F_4(x), F_5(x))^T$, $X = (x^0, x^1, x^2, x^3, x^4)^T$

e B definida por (9), temos por (8),

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} F_1(x) \\ F_2(x) \\ F_3(x) \\ F_4(x) \\ F_5(x) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \binom{0}{0} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \binom{1}{0} & 0 & 0 & 0 \\ \binom{1}{1} & 0 & \binom{2}{0} & 0 & 0 \\ 0 & \binom{2}{1} & 0 & \binom{3}{0} & 0 \\ \binom{2}{2} & 0 & \binom{3}{1} & 0 & \binom{4}{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \\ x^4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \\ x^4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ 1+x^2 \\ 2x+x^3 \\ 1+3x^2+x^4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

3 Propriedades dos Polinômios de Fibonacci

Nesta seção destacaremos algumas propriedades dos polinômios de Fibonacci.

Proposição 3.1 (Extensão da fórmula de Binet) *Sejam $\alpha = \frac{x+\sqrt{x^2+4}}{2}$ e $\beta = \frac{x-\sqrt{x^2+4}}{2}$, então*

$$F_n(x) = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta} \quad (11)$$

Demonstração: De (1), $F_{n+1}(x) = xF_n(x) + F_{n-1}(x)$ logo sua equação característica associada é dada por

$$r^2 - xr - 1 = 0$$

cujas raízes são exatamente α e β . Então, a solução geral será uma combinação linear dessas raízes (obtida por indução matemática):

$$y_n = C_1\alpha^n + C_2\beta^n. \quad (12)$$

Usando as condições iniciais, definidas em (2), temos um sistema linear nas variáveis C_1 e C_2 cuja solução é:

$$C_1 = \frac{\beta - x}{\alpha(\beta - \alpha)}, \quad C_2 = \frac{x - \alpha}{\beta(\beta - \alpha)},$$

de onde segue o resultado. □

Proposição 3.2 (Resto do quociente entre dois polinômios de Fibonacci) *Sempre que um polinômio de Fibonacci é dividido por outro de índice menor, o módulo do resto é um polinômio de Fibonacci.*

O leitor pode encontrar a demonstração dessa proposição por exemplo em [6].

Proposição 3.3 (Propriedades de Divisibilidade, [6] e [20]) *Para todo n, m , verifica-se:*

1. $F_m(x) | F_{mn}(x)$.

2. $F_m(x) | F_n(x) \iff m | n$.
3. $F_n(x) \equiv (x^2 + 4)^{\frac{p-1}{2}}$, para todo p primo.
4. $(F_n(x), F_m(x)) = F_{(n,m)}(x)$.

A existência ou não de infinitos números primos ainda é uma questão em aberto, assim também não se sabe se existem infinitos primos na sequência de Fibonacci. Um dos resultados conhecidos é que se o número F_n é primo então seu índice n também é primo, embora a recíproca não seja verdadeira, já que, por exemplo, $F_{19} = 4.181 = 37 \times 113$. Ao estendermos esse resultado para a sequência dos polinômios de Fibonacci, a recíproca passa a ser válida, como mostra o próximo teorema.

Teorema 3.1 *O n -ésimo polinômio de Fibonacci é irredutível, se e somente se n é primo.*

Para a demonstração desse teorema são necessários vários resultados preliminares o que não é o propósito deste trabalho. O leitor pode recorrer a [20], onde encontrará maiores detalhes.

Teorema 3.2 (Extensão do Teorema de Zeckendorf) *Para todo inteiro $n \geq 1$, x^{n-1} pode ser escrito, de forma única, como combinação linear dos n primeiros polinômios de Fibonacci da forma*

$$x^{n-1} = \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (-1)^i \left[\binom{n-1}{i} - \binom{n-1}{i-1} \right] F_{n-2i}(x) \quad (13)$$

onde $\binom{n}{-1} = 0$ e $F_0(x) = 0$.

Demonstração: A demonstração é feita pela segunda forma de indução em n . Claramente a igualdade (13) é válida para $n = 1$. Vamos supor que (??) seja verdadeira para qualquer número inteiro menor ou igual a $n - 1$. Então,

$$x^{n-2} = \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} (-1)^i \left[\binom{n-2}{i} - \binom{n-2}{i-1} \right] F_{n-2i-1}(x) \quad (14)$$

Multiplicando (14) por x , temos

$$\begin{aligned} x^{n-1} &= x \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} (-1)^i \left[\binom{n-2}{i} - \binom{n-2}{i-1} \right] F_{n-2i-1}(x) \\ &= \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} (-1)^i \left[\binom{n-2}{i} - \binom{n-2}{i-1} \right] x F_{n-2i-1}(x) \\ &= \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} (-1)^i \left[\binom{n-2}{i} - \binom{n-2}{i-1} \right] (F_{n-2i}(x) - F_{n-2i-2}(x)) \end{aligned}$$

Agora, para todo n , a diferença $F_{n-2i}(x) - F_{n-2i-2}(x)$ se anulam a partir do segundo termo da expansão da somatória. Assim, obtemos a equação (13). \square

Corolário 3.1 *Todo polinômio pode ser escrito, de forma única, como combinação linear de polinômios de Fibonacci.*

O resultado é consequência imediata de (13).

Proposição 3.4 (Relação entre derivadas) *Para todo n inteiro, $n \geq 1$,*

$$F_n(x) = \frac{1}{n}[F'_{n+1}(x) + F'_{n-1}(x)] \quad (15)$$

Demonstração: Por (5),

$$F_{n+1}(x) = \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n-i}{i} x^{n-2i}$$

e

$$F_{n-1}(x) = \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n-2}{2} \rfloor} \binom{n-2-i}{i} x^{n-2-2i},$$

então,

$$\begin{aligned} F_{n+1}(x) + F_{n-1}(x) &= \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n-i}{i} x^{n-2i} + \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n-2}{2} \rfloor} \binom{n-2-i}{i} x^{n-2-2i} \\ &= x^n + \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n-i}{i} x^{n-2i} + \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n-2}{2} \rfloor} \binom{n-2-i}{i} x^{n-2-2i} \\ &= x^n + \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n-i}{i} x^{n-2i} + \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n-i-1}{i-1} x^{n-2i} \\ &= x^n + \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \left[\binom{n-i}{i} + \binom{n-i-1}{i-1} \right] x^{n-2i} \end{aligned} \quad (16)$$

Sabendo que

$$\binom{n-i}{i} + \binom{n-i-1}{i-1} = \binom{n-i-1}{i-1} \left(\frac{n-i}{i} + 1 \right) = \binom{n-i-1}{i-1} \frac{n}{i}$$

podemos reescrever a equação (16) como

$$F_{n+1}(x) + F_{n-1}(x) = x^n + n \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n-1-i}{i-1} \frac{1}{i} x^{n-2i}$$

Derivando,

$$F'_{n+1}(x) + F'_{n-1}(x) = nx^{n-1} + n \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n-1-i}{i-1} \frac{n-2i}{i} x^{n-1-2i},$$

Logo,

$$\frac{F'_{n+1}(x) + F'_{n-1}(x)}{n} = \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \binom{n-1-i}{i} x^{n-1-2i} = F_n(x)$$

□

Corolário 3.2 (A integral do Polinômio de Fibonacci)

$$\int_0^x F_n(\chi) d\chi = \frac{1}{n} \left[F_{n+1}(x) + F_{n-1}(x) - F_{n+1}(0) + F_{n-1}(0) \right] \quad (17)$$

Demonstração: Segue imediatamente de (15). De fato,

$$\begin{aligned} \int_0^x F_n(\chi) d\chi &= \frac{1}{n} \int_0^x [(F'_{n+1}(\chi) + F'_{n-1}(\chi))] d\chi = \frac{1}{n} (F_{n+1}(\chi) + F_{n-1}(\chi)) \Big|_0^x \\ &= \frac{1}{n} \left[F_{n+1}(x) + F_{n-1}(x) - F_{n+1}(0) + F_{n-1}(0) \right] \end{aligned}$$

□

Desse modo concluímos as propriedades mais importantes sobre os polinômios de Fibonacci.

4 Aplicações dos Polinômios de Fibonacci

Uma das aplicações importantes dos polinômios de Fibonacci é a solução de Equações Diferenciais Ordinárias (EDOs). Estes polinômios servem para encontrar uma solução aproximada de uma EDO.

4.1 O Método

Problemas de toda natureza nas mais diversas atividades científicas podem ser descritos matematicamente através de equações diferenciais, embasando assim seu título de ser um dos mais notáveis sucessos do intelecto humano e a importância das pesquisas direcionadas ao desenvolvimento de novos métodos de resolução ou ao aperfeiçoamento dos métodos já existentes.

No que tange ao aperfeiçoamento dos métodos já existentes, mostraremos como os polinômios de Fibonacci são usados para resolver Problemas de Valor Inicial (PVI) ou Problemas de Valor de Contorno (PVC) através do Método Pseudo-espectral. Ressaltamos que embora o “novo” método que será apresentado destina-se principalmente aos PVI, também, pode ser formulado com sucesso para resolver PVC.

O Método Pseudo-espectral utiliza um polinômio interpolador $\tilde{f}(x)$ de grau N para aproximar a função $f(x)$, através de uma malha com $N + 1$ nós relacionados a uma sequência de polinômios ortogonais. Conforme Boyd [1], os coeficientes de uma função conhecida $f(x)$ são

encontrados exigindo que a série truncada coincida com $\tilde{f}(x)$ em cada ponto da malha. Da mesma forma, os coeficientes a_n da solução aproximada de uma equação diferencial ordinária, são encontrados exigindo que a *função residual* da interpolação $f(x)$ seja nula, isto é:

$$R(x_i; a_0, a_1, \dots, a_N) = 0, \quad i = 0, 1, \dots, N \quad (18)$$

4.2 Aproximação da Derivada de uma Função Aproximante

Sabe-se que se $f(x)$ uma função contínua então pode expressar-se como uma combinação linear infinita de polinômios. Considere esses polinômios como sendo os Polinômios de Fibonacci, isto é,

$$f(x) = \sum_{r=1}^{\infty} a_r F_r(x) \quad (19)$$

Seja $\tilde{f}(x)$ uma aproximação de $f(x)$. Para aproximar $f(x)$, consideraremos N -polinômios de Fibonacci, $\{F_r(x)\}_{r=1}^N$. Assim,

$$f(x) \approx \tilde{f}(x) = \sum_{r=1}^N a_r F_r(x) \quad (20)$$

onde a_r , $r = 1, \dots, N$ são os *Coefficientes de Fibonacci*, a ser determinados. Note que (20) pode ser escrita na forma matricial por

$$\tilde{f}(x) = F(x)A \quad (21)$$

onde $F(x)$ é o vetor linha Fibonacci e A é o vetor coluna Fibonacci, isto é,

$$F(x) = [F_1(x) \quad F_2(x) \quad F_3(x) \quad \cdots \quad F_N(x)] \quad (22)$$

$$A = [a_1 \quad a_2 \quad a_3 \quad \cdots \quad a_N]^T \quad (23)$$

De (20) observamos que a k -ésima derivada de $\tilde{f}(x)$ existe e é contínua, então, podemos expressá-la, também, como combinação linear dos Polinômios de Fibonacci, isto é,

$$\tilde{f}^{(k)}(x) = \sum_{r=1}^N a_r^{(k)} F_r(x), \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (24)$$

onde, $a_r^{(0)} = a_r$, $\tilde{f}^{(0)}(x) = \tilde{f}(x)$. A equação (24) em notação matricial é dada por

$$\tilde{f}^{(k)}(x) = F(x)A^{(k)}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (25)$$

onde, $A^{(0)} = A$, e

$$A^{(k)} = [a_1^{(k)} \quad a_2^{(k)} \quad a_3^{(k)} \quad \cdots \quad a_N^{(k)}]^T \quad (26)$$

é a matriz dos coeficientes da k -ésima derivada da função aproximante.

Proposição 4.1 *Considere-se (26), para $k = 0, 1, 2, \dots, n$. Então,*

$$A^{(k+1)} = \mathbf{D}^{k+1} A, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n, \quad (27)$$

onde \mathbf{D} é uma matriz operacional da derivada, de ordem $N \times N$, definida por

$$\mathbf{D} = (d_{ij})_{N \times N} = \begin{cases} i \operatorname{sen} \frac{(j-i)\pi}{2}, & j > i \\ 0, & j \leq i \end{cases} \quad (28)$$

A demonstraçãõ dessa proposiçãõ encontra-se em [2].

Assim, de (25) e (27), temos

$$\tilde{f}^{(k)}(x) = F(x)\mathbf{D}^k\mathbf{A}, \quad k = 0, 1, \dots, n \quad (29)$$

onde $\mathbf{D}^0 = \mathbf{I}$. A seguir vejamos um exemplo que explica essa propriedade.

Exemplo 4.1 Seja $\tilde{f}(x) = F(x)\mathbf{A}$, onde

$$F(x) = [F_1(x) \quad F_2(x) \quad \dots \quad F_5(x)] \quad \text{e} \quad \mathbf{A} = [2 \quad 5 \quad 1 \quad 4 \quad 10]^T.$$

Encontraremos a derivada de quarta ordem $\tilde{f}^{(4)}(x)$ para $N = 5$.

De (28) temos que

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Logo,

$$\mathbf{D}^{(4)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 24 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

De (29), temos

$$\begin{aligned} \tilde{f}^{(4)}(x) &= [1 \quad x \quad x^2 + 1 \quad x^3 + 2x \quad x^4 + 3x^2 + 1] \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 24 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \\ 4 \\ 10 \end{pmatrix} \\ &= [1 \quad x \quad x^2 + 1 \quad x^3 + 2x \quad x^4 + 3x^2 + 1] \begin{pmatrix} 240 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 240 \end{aligned}$$

O resultado obtido, no exemplo anterior, coincide com o cálculo usual da derivada, pois, tomando a mesma função,

$$\begin{aligned} \tilde{f}(x) &= F(x)\mathbf{A} \\ &= 2 \cdot 1 + 5 \cdot x + 1 \cdot (x^2 + 1) + 4 \cdot (x^3 + 2x) + 10 \cdot (x^4 + 3x^2 + 1) \\ &= 10x^4 + 4x^3 + 31x^2 + 13x + 13, \end{aligned}$$

temos

$$\begin{aligned} \tilde{f}^{(1)}(x) &= 40x^3 + 12x^2 + 62x + 13 \\ \tilde{f}^{(2)}(x) &= 120x^2 + 24x + 62 \\ \tilde{f}^{(3)}(x) &= 240x + 24 \\ f^{(4)}(x) &= 240 \end{aligned}$$

4.3 Resolução de Equações Diferenciais Ordinárias

Considere a seguinte Equação Diferencial Ordinária - EDO - linear, de ordem n e não-homogênea:

$$\sum_{k=0}^n q_k(x)y^{(k)}(x) = g(x), \quad q_n(x) \neq 0 \quad (30)$$

Suponhamos que a EDO, (30), admite solução única num intervalo. Denote a solução aproximada por $\tilde{y} = \tilde{y}(x)$ e suas derivadas por $\tilde{y}^{(k)} = \tilde{y}(x)^{(k)}$. O cálculo da solução aproximada será obtida através de (20).

Note que o interesse principal é calcular os coeficientes de Fibonacci. Então, definiremos uma malha uniforme, de tamanho N , do intervalo $[a, b]$. Os nós da malha: $\{a = x_1, x_2, x_3, \dots, x_N = b\}$ são igualmente espaçados e definidos por

$$x_i = a + \frac{b-a}{N-1}(i-1), \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (31)$$

Substituindo (31) em (30) obtemos o seguinte Sistema Linear algébrico

$$\sum_{k=0}^n q_k(x_i)y^{(k)}(x_i) = g(x_i), \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (32)$$

ou seja,

$$\begin{cases} q_0(x_1)y^{(0)}(x_1) + q_1(x_1)y^{(1)}(x_1) + \dots + q_n(x_1)y^{(n)}(x_1) & = g(x_1) \\ q_0(x_2)y^{(0)}(x_2) + q_1(x_2)y^{(1)}(x_2) + \dots + q_n(x_2)y^{(n)}(x_2) & = g(x_2) \\ \vdots & = \vdots \\ q_0(x_N)y^{(0)}(x_N) + q_1(x_N)y^{(1)}(x_N) + \dots + q_n(x_N)y^{(n)}(x_N) & = g(x_N) \end{cases} \quad (33)$$

Reescrevendo o sistema (33), na forma matricial, temos

$$\sum_{k=0}^n \mathbf{Q}_k \mathbf{Y}^{(k)} = \mathbf{G}, \quad n \leq N, \quad (34)$$

onde

$$\mathbf{Q}_k = \begin{bmatrix} q_k(x_1) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & q_k(x_2) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & q_k(x_N) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Y}^{(k)} = \begin{bmatrix} y^{(k)}(x_1) \\ y^{(k)}(x_2) \\ \vdots \\ y^{(k)}(x_N) \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{G} = \begin{bmatrix} g(x_1) \\ g(x_2) \\ \vdots \\ g(x_N) \end{bmatrix}$$

Por (29) temos que

$$\mathbf{Y}^{(k)} = \mathbf{F} \mathbf{D}^k \mathbf{A} \quad (35)$$

onde,

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} F_1(x_1) & F_2(x_1) & \cdots & F_N(x_1) \\ F_1(x_2) & F_2(x_2) & \cdots & F_N(x_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ F_1(x_N) & F_2(x_N) & \cdots & F_N(x_N) \end{pmatrix}_{N \times N}$$

Substituindo (35) em (34), temos

$$\sum_{k=0}^n (\mathbf{Q}_k \mathbf{F} \mathbf{D}^k) \mathbf{A} = (\mathbf{Q}_0 \mathbf{F} \mathbf{D}^0 + \mathbf{Q}_1 \mathbf{F} \mathbf{D}^1 + \cdots + \mathbf{Q}_n \mathbf{F} \mathbf{D}^n) \mathbf{A} = \mathbf{W} \mathbf{A} = \mathbf{G}, \quad n < N, \quad (36)$$

ou, simplesmente,

$$\mathbf{W} \mathbf{A} = \mathbf{G} \quad (37)$$

A equação (37) representa um sistema linear, onde as incógnitas $a_r, r = 1, 2, \dots, N$ estão no vetor \mathbf{A} . Para resolver (37) consideramos a matriz ampliada:

$$[\mathbf{W} : \mathbf{G}] \quad (38)$$

Por outro lado, na teoria de existência e unicidade da solução das Equações Diferenciais Ordinárias são consideradas condições iniciais ou condições de contorno. Sejam,

$$y^{(l)}(c_j) = \alpha_l, \quad l = 0, 1, \dots, n-1, \quad j = 1, 2, \dots, N \text{ (fixo)}, \quad a \leq c_j \leq b \quad (39)$$

as condições iniciais ou de contorno de (30), onde os α_l são valores conhecidos. Usando (29), temos

$$y^{(l)}(c_j) = \mathbf{F}_{c_j} \mathbf{D}^l \mathbf{A} \quad (40)$$

onde, $\mathbf{F}_{c_j} = [F_1(c_j) \quad F_2(c_j) \quad \cdots \quad F_N(c_j)]$. Denote o vetor

$$\mathbf{U}_l = \mathbf{F}_{c_j} \mathbf{D}^l = [u_{l1} \quad u_{l2} \quad \dots \quad u_{lN}], \quad l = 0, 1, \dots, n-1 \quad (41)$$

Logo, de (39) - (41) obtemos a seguinte equação algébrica $\mathbf{U}_l \mathbf{A} = \alpha_l$ ou $\mathbf{U} \mathbf{A} = \alpha$. A matriz ampliada desse sistema pode ser escrita da forma

$$[\mathbf{U} : \alpha] \quad (42)$$

As matrizes ampliadas (38) e (42) podem ser re-escritas de tal maneira que possa gerar-se uma outra matriz ampliada, isto é,

$$[\mathbf{W}^* : \mathbf{G}^*] \quad (43)$$

Especificamente, a matriz ampliada (43) é obtida ao substituir-se l -linhas da matriz (38) pelas l -linhas da matriz (42), geralmente são escolhidas as últimas l -linhas da matriz (38). Também, podem adicionar-se linhas à matriz (38) de tal maneira que o $\det[\mathbf{W}^*]$ seja não nulo. A melhor forma de obter-se o vetor de incógnitas, isto é, os coeficientes de Fibonacci dados em \mathbf{A} , do sistema ampliado (43) é através de métodos numéricos para sistemas lineares.

4.4 Resultados Numéricos

Nesta seção pretendemos ilustrar analiticamente o “novo” método apresentado através de um exemplo numérico e em seguida comparar sua solução aproximada $\tilde{y}(x)$ com a solução exata $y(x)$.

Exemplo 4.2 (Problema de Valor Inicial) Seja a equação diferencial linear de segunda ordem não-homogênea

$$\sum_{k=0}^2 q_k(x) y^{(k)}(x) = g(x), \quad (44)$$

com

$$q_2(x) = 1, \quad q_1(x) = x, \quad q_0(x) = -2 \quad \text{e} \quad g(x) = x \cos x - 3 \sin x$$

ou seja,

$$y''(x) + xy'(x) - 2y(x) = x \cos x - 3 \sin x \quad (45)$$

com as condições iniciais

$$y(0) = 0 \quad \text{e} \quad y'(0) = 1 \quad (46)$$

Solução. Como EDO é de segunda ordem temos que $n = 2$. Considere $N = 4$ nós da malha do intervalo $[0, 0, 6]$:

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 0,2, \quad x_3 = 0,4 \quad \text{e} \quad x_4 = 0,6 \quad (47)$$

Substituindo (47) em (45) obtemos um sistema linear, (36),

$$\sum_{k=0}^2 (\mathbf{Q}_k \mathbf{F} \mathbf{D}^k) \mathbf{A} = (\mathbf{Q}_0 \mathbf{F} \mathbf{D}^0 + \mathbf{Q}_1 \mathbf{F} \mathbf{D}^1 + \mathbf{Q}_2 \mathbf{F} \mathbf{D}^2) \mathbf{A} = \mathbf{W} \mathbf{A} = \mathbf{G}, \quad (48)$$

onde,

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} F_1(x_1) & F_2(x_1) & F_3(x_1) & F_4(x_1) \\ F_1(x_2) & F_2(x_2) & F_3(x_2) & F_4(x_2) \\ F_1(x_3) & F_2(x_3) & F_3(x_3) & F_4(x_3) \\ F_1(x_4) & F_2(x_4) & F_3(x_4) & F_4(x_4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0,2 & 1,4 & 0,408 \\ 1 & 0,4 & 1,16 & 0,864 \\ 1 & 0,6 & 1,36 & 1,416 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{D}^0 = \mathbf{I}, \quad \mathbf{D}^1 = \mathbf{D} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{D}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{Q}_0 = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Q}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,6 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Q}_2 = \mathbf{I}.$$

Logo,

$$\mathbf{W} = \mathbf{Q}_0 \mathbf{F} \mathbf{D}^0 + \mathbf{Q}_1 \mathbf{F} \mathbf{D}^1 + \mathbf{Q}_2 \mathbf{F} \mathbf{D}^2$$

$$\begin{aligned} &= \begin{pmatrix} -2 & 0 & -2 & 0 \\ -2 & -0,4 & -2,80 & -0,816 \\ -2 & -0,8 & -2,32 & -1,728 \\ -2 & -1,2 & -2,72 & -2,832 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,2 & 0,08 & 0,640 \\ 0 & 0,4 & 0,32 & 0,992 \\ 0 & 0,6 & 0,72 & 1,848 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1,20 \\ 0 & 0 & 2 & 2,40 \\ 0 & 0 & 2 & 3,60 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -0,2 & -0,72 & 1,024 \\ -2 & -0,4 & 0 & 1,664 \\ -2 & -0,6 & 0 & 2,616 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Assim, a matriz ampliada,

$$[\mathbf{W} : \mathbf{G}] = \left[\begin{array}{cccc|c} -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -0,2 & -0,72 & 1,024 & -0,40000 \\ -2 & -0,4 & 0 & 1,664 & -0,79983 \\ -2 & -0,6 & 0 & 2,616 & -1,19873 \end{array} \right] \quad (49)$$

Usando as *condições iniciais*:

- $y(0) = 0$

De (39) observamos que: $l = 0$, $j = 1$, $c_1 = 0$ e $\alpha_0 = 0$. De (40), temos $y(0) = \mathbf{F}_0 \mathbf{D}^0 A = \mathbf{F}_0 A = 0$, onde, $\mathbf{F}_0 = (F_1(0) \ F_2(0) \ F_3(0) \ F_4(0)) = (1 \ 0 \ 1 \ 0)$. Assim, $\mathbf{U}_0 = \mathbf{F}_0 = (1 \ 0 \ 1 \ 0)$. Logo,

$$[\mathbf{U}_0 : \alpha_0] = [1 \ 0 \ 1 \ 0 \mid 0] \quad (50)$$

- $y'(0) = 1$

De (39) observamos que: $l = 1$, $j = 1$, $c_1 = 0$ e $\alpha_1 = 1$. De (40), temos $y'(0) = \mathbf{F}_0 \mathbf{D}^1 A = 1$. Assim, $\mathbf{U}_1 = \mathbf{F}_0 \mathbf{D}^1 = (0 \ 1 \ 0 \ 2)$. Logo,

$$[\mathbf{U}_1 : \alpha_1] = [0 \ 1 \ 0 \ 2 \mid 1] \quad (51)$$

Substituindo o sistema linear formado pelas equações (50) e (51) na duas últimas linhas da matriz (49) obtemos,

$$[\mathbf{W}^* : \mathbf{G}^*] = \left[\begin{array}{cccc|c} -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -0,2 & -0,72 & 1,024 & -0,40000 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \end{array} \right] \quad (52)$$

Resolvendo o sistema linear (52) encontramos os coeficientes de Fibonacci

$$A = (0 \ 1,2809 \ 0 \ -0,1404)^T \quad (53)$$

De (20), a solução aproximada da EDO (45) é dada por

$$\begin{aligned} \tilde{y}(x) &= \sum_{r=1}^4 a_r F_r(x) = a_1 F_1(x) + a_2 F_2(x) + a_3 F_3(x) + a_4 F_4(x) \\ &= (0)1 + (1,2809)x + (0)(x^2 + 1) - (0,1404)(x^3 + 2x) \\ &= -0,1404x^3 + 1,0001x \end{aligned} \quad (54)$$

Na Figura 3 podem ser observadas a solução aproximada $\tilde{y}(x)$ (linha pontilhada), obtida pelo presente método para $N = 4$, e a solução exata $y(x) = \sin x$, do PVI (45)-(46).

Note, também, que a solução aproximada é tão boa mesmo considerando uma malha grossa de 4 nós num domínio de 0 até 0,6.

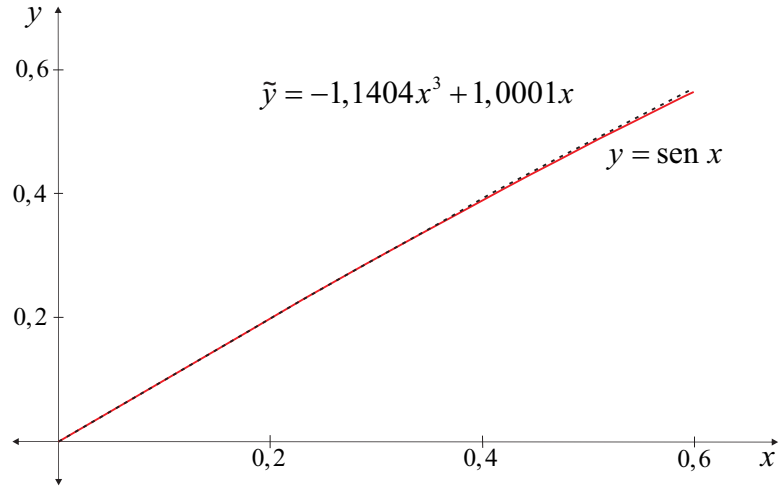


Figura 3: Gráficos das soluções $\tilde{y}(x)$, para $N = 4$ e $y(x)$.

4.5 Outras aplicações

Os polinômios de Fibonacci foram usados recentemente para resolver equações diferenciais de diferenças por Farshid Mirzaee [5]. As equações diferenciais de diferenças de ordem n com diferenças de ordem m são definidas por [4] como equações que possuem a forma geral

$$\begin{aligned}
 &F\left(t, u(t), u(t - w_1), u(t - w_2), \dots, u(t - w_m), \right. \\
 &\quad \left. u'(t), u'(t - w_1), u'(t - w_2), \dots, u'(t - w_m), \right. \\
 &\quad \left. \dots, u^{(n)}(t), u^{(n)}(t - w_1), u^{(n)}(t - w_2), \dots, u^{(n)}(t - w_m)\right) = 0,
 \end{aligned} \tag{56}$$

onde F é uma função dada de $1 + (m + 1)(n + 1)$ variáveis e os números w_1, w_2, \dots, w_m são conhecidos. Muitos fenômenos do mundo real também podem ser modelados por equações do tipo (56). Farshid Mirzaee, também, propõe a implementação do método de colocação fazendo uso de matrizes de polinômios de Fibonacci para aproximar a solução de equações, com condições de contorno de coeficientes variáveis.

Similarmente, Ayçe Kurt, Salih Yalçınbas e Mehmet Sezer também fizeram uso dos polinômios de Fibonacci para aproximar a solução de equações integro-diferenciais de Fredholm (de diferenças), [19] e mostraram, através de exemplos, que a solução aproximada e a solução exata coincidem no intervalo $[-1, 1]$.

5 Considerações Finais

O uso dos Polinômios de Fibonacci na resolução de uma EDO, serve como um método alternativo entres os clássicos métodos de Variação de Parâmetros, Método dos Coeficientes a Determinar e os métodos que envolvem séries.

Os alunos do Ensino Básico que estudam os números de Fibonacci, com esta informação da existência dos polinômios de Fibonacci, como uma ferramenta que generaliza os números de Fibonacci, tem a oportunidade de aprofundar seus conhecimentos para que quando sejam alunos de graduação e/ou pós-graduação possam desenvolver novas teorias e aplicações.

Também, este trabalho poderá ser aproveitado por professores atuantes na educação básica para ilustrar uma aplicação de polinômios servindo como um fator motivacional em sua prática pedagógica, ou mesmo para nortear estudos complementares à sua formação.

No ensino superior, quando se estuda a disciplina de Equações Diferenciais não é abordado este método na resolução de EDOs, seja por desconhecimento, ou porque a grade curricular da disciplina não exige. Tornando-se desse modo, um método alternativo na solução de EDOs.

Agradecimentos

A Deus, pelo seu infinito amor, pelas bênçãos que derrama em minha vida e por ter me dado condições de lutar e alcançar os objetivos pretendidos; “*tu vistas quando os meus ossos estavam sendo feitos ainda no ventre da minha mãe*”;³ “*estás em volta de mim, por todos os lados e me proteges*”.⁴

À minha mãe por seu amor incondicional e dedicação. A minha família e ao meu noivo Frederico, por todo carinho, incentivo, compreensão e paciência.

Ao meu orientador, Prof. Dr. Jorge Andrés Julca Avila por sua atenção e amizade. Aos amigos do curso pelos momentos e conhecimentos compartilhados, na certeza de que aqui apenas começamos uma história. E por fim, à CAPES e aos professores do PROFMAT 2012-2014 da UFSJ pela oportunidade de enriquecimento da minha formação.

Referências

- [1] BOYD, J. P., *Chebyshev and Fourier Spectral Methods*. Dover Publications, 2000.
- [2] KOÇ, A. B.; ÇAKMAK, M.; KURNAZ, A.; USLU, K., *A New Fibonacci Type Collocation Procedure For Boundary Value Problems*. Advances in Difference Equations: 262, 2013.
- [3] SWAMY, M. N. S., *Problem B-74*. The Fibonacci Quarterly: v.3, 236, 1965.
- [4] BELLMAN, R.; COOKE, K. L. *Differential-Difference Equations*. Academy Press, 1963.
- [5] MIRZAEI, F., *Solving singularly perturbed differential-difference equations arising in science and engineering with Fibonacci polynomials*. Results in Physics: v. 3, 134-141, 2013.
- [6] BICKNELL, M. *An Introduction to Fibonacci Polynomials and their Divisibility Properties*. The Fibonacci Quarterly: v. 8.4, 407-420, 1970.
- [7] SINGH, P., *The So-called Fibonacci Numbers in Ancient and Medieval India*. Historia Mathematica: 229-244. v 12, 1985.
- [8] DEVLIN, K., *Recreational mathematics in Leonardo of Pisa's Liber abbaci*. Stanford University, 2011.
- [9] MOREIRA, D. A., *Propriedades Termo-eletrônicas da Molécula do DNA*. Universidade Federal do Rio Grande do Norte, 2008.

³Salmo 139, 15

⁴Salmo 139, 5

- [10] BENDER, C., *Fibonacci Transmission Lines*. Purdue University, 1993.
- [11] FERNHOLM, A., *Crystals of golden proportion. The Nobel Prize in Chemistry 2011*. The Royal Swedish Academy of Sciences, 2011.
- [12] SCHOEN, R., *Harmonic Geometric, and Arithmetic Means in Generalized Fibonacci Sequences*. The Fibonacci Quarterly: v. 22.4, 354-357, 1984.
- [13] SATO, S., *On Matrix Representations of Generalized Fibonacci Numbers and their Applications*. Applications of Fibonacci Numbers: v. 5, 487-496, 1993.
- [14] VANDERVELDE, S., *On the Divisibility of Fibonacci Sequences by Primes of Index Two*. The Fibonacci Quarterly: v. 50.3, 207-216, 2012.
- [15] ARPAIA, P. J., *Generating Solutions For a Special Class of Diophantine Equations*. The Fibonacci Quarterly: v. 32.2, 170-173, 1994.
- [16] HAYES, R. A., *Fibonacci and Lucas Polynomials*. Trabalho de conclusão de Mestrado. San Jose State College, 36-39, 1965.
- [17] HOGGATT, V. E. J.; BICKNELL, M. *Roots of Fibonacci Polynomials*. The Fibonacci Quarterly: v. 11.3, 271-274, 1973.
- [18] ANDREWS, G. E., *Combinatorial Analysis and Fibonacci Numbers*. The Fibonacci Quarterly: v. 12.2, 141-146, 1974.
- [19] KURT, A.; YALÇINBAS, S.; SEZER, M. *Fibonacci Collocation Method for Solving High-Order Linear Fredholm Integro-Differential-Difference Equations*. International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences: v. 2013.
- [20] WEBB, W. A.; PARBERRY, E. A., *Divisibility Properties of Fibonacci Polynomials*. The Fibonacci Quarterly: v. 7.5, 457-463, 1969.