

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE FEIRA DE SANTANA

DEPARTAMENTO DE CIÊNCIAS EXATAS

PROFMAT - MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

**PROPOSTA DE INSERÇÃO DE UM MODELO DE
GEOMETRIA NÃO EUCLIDIANA
NA EDUCAÇÃO BÁSICA**

Tenivâm Lins Freitas

Orientadora: Prof^ª. Ma. Fabíola de Oliveira Pedreira.

Feira de Santana

Abril de 2014

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE FEIRA DE SANTANA

DEPARTAMENTO DE CIÊNCIAS EXATAS

PROFMAT - MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

**PROPOSTA DE INSERÇÃO DE UM MODELO DE
GEOMETRIA NÃO EUCLIDIANA
NA EDUCAÇÃO BÁSICA**

Tenivâm Lins Freitas

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT do Departamento de Ciências Exatas, UEFS, como requisito parcial para a obtenção do título de **Mestre**.

Orientadora: Prof^ª. Ma. Fabíola de Oliveira Pedreira.

Feira de Santana
22 de Abril de 2014

Ficha Catalográfica – Biblioteca Central Julieta Carteado

F935p Freitas, Tenivâm Lins
Proposta de inserção de um modelo de geometria não euclidiana na
educação básica / Tenivâm Lins Freitas. – Feira de Santana, 2014.
55 f.; il.

Orientadora: Fabíola de Oliveira Pedreira.

Mestrado (dissertação) – Universidade Estadual de Feira de Santana,
Programa de Pós-Graduação em Matemática, 2014.

1. Geometria – Ensino Fundamental. 2. Geometria não euclidiana.
I. Pedreira, Fabíola de Oliveira, orient. II. Universidade Estadual de
Feira de Santana. III. Título.

CDU: 514



ATA DA SESSÃO PÚBLICA DE DEFESA DE DISSERTAÇÃO DO DISCENTE TENIVÂM LINS FREITAS DO PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL DA UNIVERSIDADE ESTADUAL DE FEIRA DE SANTANA

Aos vinte e dois dias do mês de abril de dois mil e quatorze às 8:00 horas na Sala MT55, Módulo 5, UEFS, ocorreu a Sessão pública de defesa de dissertação apresentada sob o título “**Proposta de Inserção de um Modelo de Geometria Não-Euclidiana na Educação Básica**”, do discente **Tenivâm Lins Freitas**, do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT da Universidade Estadual de Feira de Santana, para obtenção do título de MESTRE. A Banca Examinadora foi composta pelos professores: Fabíola de Oliveira Pedreira (Orientadora, UEFS), Claudemir Mota da Cruz (UESC) e Cristiano H. de Oliveira Mascarenhas (UEFS). A sessão de defesa constou da apresentação do trabalho pelo discente e das arguições dos examinadores.

Em seguida, a Banca Examinadora se reuniu em sessão secreta para julgamento final do trabalho e atribuiu o conceito: APROVADO.

Sem mais a tratar, foi lavrada a presente ata, que segue assinada pelos membros da Banca Examinadora e pelo Coordenador Acadêmico Institucional do PROFMAT. Feira de Santana, 22 de abril de 2014.

Fabíola de Oliveira Pedreira

Profa. Ma. Fabíola de Oliveira Pedreira (UEFS)
Orientadora

Claudemir Mota da Cruz

Prof. Me. Claudemir Mota da Cruz (UESC)

Cristiano H. de Oliveira Mascarenhas

Prof. Me. Cristiano H. de Oliveira Mascarenhas (UEFS)

Visto do Coordenador:

Maurício de Araújo Ferreira

Prof. Dr. Maurício de Araújo Ferreira
Coordenador do PROFMAT / UEFS

Ao meu pai Teobaldo Mota Freitas (Seu Badu) - in memoriam.

Agradecimentos

Quero expressar meus agradecimentos a todos que participaram e contribuíram para a conclusão desse curso. De modo muito especial

À minha família, sempre um porto seguro e fonte dos princípios para minha formação humana, principalmente aos meus pais Francisca Lins Freitas e Teobaldo Mota Freitas pelos ensinamentos que não se aprendem na escola.

À professora Fabíola de Oliveira Pedreira por aceitar meu convite para ser minha orientadora e pela valiosa contribuição na realização deste trabalho.

Aos meus colegas de turma principalmente a Rosipléia, Joilma e Anatália pela convivência mais próxima durante os momentos de estudo, pelo encorajamento e troca de experiências.

Aos colegas do Colégio Estadual Luiz Navarro de Brito pela compreensão e apoio necessários durante a realização deste curso perante a dificuldade de conciliar trabalho e estudo.

Aos meus ex-professores desde as minhas primeiras professoras Eliete e Elizete no jardim de infância até os professores do Mestrado Profissional pelo conhecimento compartilhado, por serem exemplos e pelo incentivo para a conclusão desta importante etapa de minha formação acadêmica.

À Universidade Estadual de Feira de Santana por me acolher como estudante inicialmente no curso de Licenciatura em Matemática, posteriormente no curso de Especialização em Educação Matemática e agora no Mestrado Profissional.

À CAPES pelo apoio financeiro e à SBM por proporcionar formação de qualidade e acessível aos professores da educação básica.

A Deus, grato por tudo, sempre.

Resumo

Neste trabalho é apresentada uma proposta de uma sequência de atividades que possibilita a estudantes do ensino fundamental tomarem conhecimento de um modelo de geometria não Euclidiana. Para isso, é apresentado um breve histórico da Geometria com ênfase para as questões relacionadas ao quinto postulado que motivaram o surgimento desses novos modelos geométricos. Também é feita uma exposição dos dois tipos clássicos de geometria não Euclidiana, bem como os modelos que foram criados para representá-las usando elementos da Geometria Euclidiana. Em seguida é apresentada uma proposta de inserção de um modelo dessas geometrias no ensino fundamental usando um software de geometria dinâmica que possibilita o trabalho com geometrias não Euclidianas, onde os alunos são levados a comparar alguns resultados da Geometria Euclidiana com o novo modelo apresentado verificando semelhanças, diferenças e dessa forma formulando conjecturas no novo modelo geométrico apresentado, o esférico.

Palavras-chave: Geometrias não Euclidianas, software Cinderella, ensino de Geometria.

Abstract

In this work is submitted the proposal of a sequence of activities that enables elementary school to students become aware of a model of non Euclidean geometry. For this, it is presented a brief history of geometry with emphasis on issues related to the fifth postulate that motivated the emergence of these new geometric models. It is also made a presentation of two classic types of non Euclidean Geometry as well as the models that were created to represent them using elements of Euclidean Geometry. Then is presented a proposal of insertion of a model these geometries in elementary school using a dynamic geometry software that allows working with non Euclidean Geometries, that students are driven to compare some results of Euclidean Geometry with the new model verifying similarities, differences and thus formulating conjectures on the new geometric model presented, the spherical.

Key words: non Euclidian Geometries, Cinderella software, Geometry teaching .

Lista de Figuras

1.1	Quadrilátero de Saccheri	8
1.2	Quadrilátero de Lambert.	9
1.3	Retas paralelas no modelo hiperbólico	11
1.4	Tractriz.	12
1.5	Pseudoesfera	12
1.6	Modelo de Klein	12
1.7	Modelo de Poincaré	13
1.8	Razão cruzada.	14
1.9	Semiplano de Poincaré	14
1.10	Ângulo esférico	17
1.11	Triângulo esférico.	17
1.12	Elementos notáveis da esfera	18
1.13	Reta polar	19
1.14	Quadrilátero de Saccheri	20
1.15	Ângulos do topo do Quadrilátero de Saccheri.	20
1.16	Soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo retângulo.	21
2.1	Interface do Cinderella	26
2.2	Triângulo nas vistas esférica, euclidiana e hiperbólica	27
3.1	Vista esférica no software Cinderella.	32
3.2	Reta da geometria esférica (círculo máximo).	33
3.3	Retas concorrentes na geometria esférica	34
3.4	Reta passando por dois pontos quaisquer.	35
3.5	Retas passando por pontos antípodas.	35
3.6	Retas perpendiculares na geometria esférica.	36
3.7	Posição relativa de duas retas distintas perpendiculares a uma terceira reta.	36
3.8	Soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo esférico.	37
3.9	Ângulo externo em um triângulo esférico.	38
3.10	Triângulo retângulo.	39
3.11	Triângulo trirretângulo.	39

3.12	Ângulos da base de um triângulo isósceles.	40
3.13	Triângulo esférico equilátero.	41
3.14	Triângulo esférico inscrito em uma circunferência.	42
3.15	Círculo inscrito em um triângulo.	43
3.16	Quadrilátero com quatro lados de mesma medida.	44
3.17	Quadrilátero esférico	45
3.18	Soma dos ângulos internos de um quadrilátero esférico.	46

Conteúdo

Introdução	1
1 Geometria	3
1.1 Geometria Euclidiana	3
1.2 O V Postulado	6
1.3 Tentativas de Demonstração do V Postulado	7
1.3.1 Saccheri	7
1.3.2 Lambert	8
1.3.3 Gauss	9
1.4 Geometrias Não Euclidianas	10
1.4.1 Geometria Hiperbólica	10
1.4.2 Modelos para Representação da Geometria Hiperbólica	11
1.4.3 Geometria Elíptica	15
1.4.4 Noções Elementares de Geometria Esférica	16
1.4.5 Elementos Notáveis da Esfera	18
2 Informática na Educação Matemática	23
2.1 Ensino de Matemática e Geometria	25
2.2 O Software Cinderella	26
3 Proposta de Inserção de um Modelo de Geometria Não Euclidiana na Educação Básica	28
3.1 Descrição das Atividades	30
3.1.1 ATIVIDADE 1 - Formando o conceito de geodésica na superfície esférica.	30
3.1.2 ATIVIDADE 2 - Algumas propriedades envolvendo pontos e retas.	31
3.1.3 ATIVIDADE 3 - Algumas propriedades envolvendo ângulos e triângulos.	37
3.1.4 ATIVIDADE 4 - Algumas propriedades envolvendo quadriláteros.	43
Conclusão	47

Introdução

A Geometria que é estudada nas escolas brasileiras é a Geometria Euclidiana, embora outros modelos geométricos tão consistentes quanto o de Euclides tenham surgido e se consolidado há alguns séculos. Esse conhecimento não tem sido disseminado nas escolas de educação básica e até mesmo em cursos de graduação em Matemática de muitas instituições de ensino superior do país.

Mesmo não existindo dúvidas sobre a validade da Geometria de Euclides, durante aproximadamente vinte séculos, motivados pelo caráter pouco intuitivo do Postulado V, muitos matemáticos se dedicaram ao seu estudo na tentativa de demonstrá-lo a partir dos quatro primeiros. Essas tentativas acabaram culminando com o surgimento de novos modelos geométricos que, admitindo os quatro primeiros postulados e negando o V fez surgir duas novas geometrias: a Hiperbólica por Lobachevsky e Bolyai e a Elíptica por Bernard Riemman.

Esses novos modelos são as chamadas geometrias não Euclidianas e, embora seu estudo não seja recomendado diretamente nas orientações curriculares para o ensino fundamental e médio, este tema trata de uma questão de grande importância na quebra de um paradigma relacionado à Matemática pois rompe com uma concepção que já perdurou por vários séculos com relação à Geometria Euclidiana como a única existente e possível de descrever e representar o espaço.

Atendendo à proposta da Comissão Acadêmica Nacional do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional que sugere para o Trabalho de Conclusão de Curso a realização de projeto com aplicação direta em sala de aula de Matemática na educação básica em uma das modalidades: (1) elaboração de proposta de atividades educacionais e (2) aplicação de atividades em sala de aula e avaliação de resultados, optou-se pela primeira modalidade devido à impossibilidade de aplicação em sala de aula visto que o período de realização deste trabalho não coincidiu com o período letivo escolar. Para isso, este trabalho está estruturado em três capítulos que são apresentados a seguir.

No primeiro capítulo é feito um breve recorte histórico da Geometria, seus primórdios e uma apresentação do método axiomático utilizado por Euclides em *Os Elementos* bem como das tentativas de demonstração do V Postulado com destaque para Saccheri e Lambert cujos trabalhos foram importantes nos estudos que culminaram com o surgimento

das novas geometrias. Também é feita uma apresentação dos dois tipos clássicos de geometria não Euclidiana, a Hiperbólica e a Elíptica, e os modelos que foram propostos para a representação destas.

No capítulo seguinte é apresentado um panorama atual do ensino de Matemática no Brasil com destaque para o ensino de Geometria. Também é feita uma exposição sobre informática educativa, suas vantagens, limites e possibilidades e a apresentação de um software destinado ao ensino de Geometria, o Cinderella, que possui um diferencial, que é a possibilidade de estudar geometrias não Euclidianas em ambiente virtual.

No terceiro capítulo é proposta uma sequência de atividades para a introdução de um modelo de geometria não Euclidiana em uma turma de ensino fundamental. Para isso é sugerida uma sequência de atividades dividida em quatro partes a serem realizadas utilizando um modelo físico para a Geometria Esférica e o software de geometria dinâmica. Na atividade introdutória da sequência de ensino é utilizado um globo terrestre como um modelo para a formação do conceito de geodésica sobre a superfície esférica. As três atividades seguintes deverão ser feitas usando o software de geometria dinâmica Cinderella e estão divididas da seguinte forma: algumas propriedades envolvendo pontos e retas sobre a superfície esférica, algumas propriedades envolvendo ângulos esféricos e triângulos esféricos e algumas propriedades envolvendo quadriláteros esféricos.

O modelo escolhido para a proposta de trabalho na educação básica permite uma aproximação com uma importante área do conhecimento, a Geografia. Ideias geométricas de círculo máximo, grau, perpendicularismo e distância entre pontos estão associadas a conceitos geográficos como latitude, longitude, meridianos, paralelos, sendo assim fonte de estudo para problemas matemáticos interessantes relacionando essas duas áreas do conhecimento.

Capítulo 1

Geometria

Não é tarefa fácil precisar com exatidão quando os primeiros conhecimentos de natureza geométrica começaram a ser desenvolvidos pelo homem. Boyer (1996, p. 4) salienta que “afirmações sobre a origem da Matemática, seja da Aritmética, seja da Geometria, são necessariamente arriscadas, pois os primórdios do assunto são mais antigos que a arte de escrever”.

A palavra *geometria* tem provável origem na expressão grega *geometrein* (geo = terra, metrein = medição) o que reforça a ideia do historiador grego Heródoto, que a Geometria surgiu no Egito a partir da necessidade do homem de medir as terras nas margens do Rio Nilo após suas inundações anuais. Para Aristóteles a Geometria surgiu de uma classe de sacerdotes que se dedicavam ao seu estudo e a atividades recreativas ligadas à Geometria. Boyer (1996, p. 4) ressalta nas hipóteses de Heródoto e Aristóteles duas teorias distintas e opostas para a origem da Geometria: uma associa a origem à necessidade prática, enquanto a outra está calcada em seu estudo teórico. Contudo, registros históricos comprovam que civilizações antigas como a Chinesa, a Babilônica e a Hindu já possuíam conhecimentos de natureza geométrica.

1.1 Geometria Euclidiana

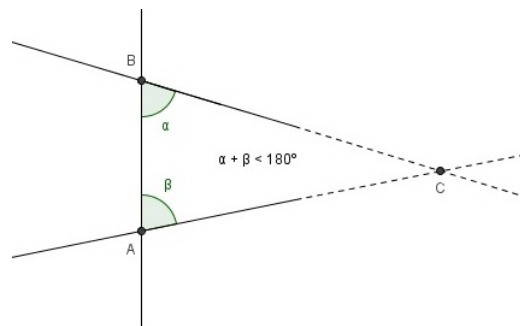
Uma teoria que toma como ponto de partida alguns princípios básicos que constituem o seu conjunto de axiomas ou postulados é dita axiomatizada. A Geometria desenvolvida por Euclides foi a primeira teoria matemática a ser axiomatizada. Em *Os Elementos*, obra dividida em treze volumes, que trata principalmente de Geometria, mas que versa também sobre teoria dos números e álgebra elementar, Euclides organizou e estendeu uma grande parte da Matemática desenvolvida até então.

Um de seus propósitos, usando o método axiomático, segundo Berlinghoff e Gouveia (2010, p. 159), parece ter sido o de por a Matemática grega em uma base unificada e

lógica. Ainda segundo estes autores, Euclides se dispôs a reconstruir essas áreas “a partir do chão”. Para este propósito são apresentadas inicialmente em sua obra vinte e três definições, em seguida é dada uma lista de cinco postulados e cinco axiomas (ou noções comuns). A saber:

Postulados

1. Uma reta pode ser traçada de qualquer ponto a qualquer ponto.
2. Uma reta finita pode ser estendida continuamente a uma reta.
3. Um círculo pode ser formado com qualquer centro e distância (raio).
4. Todos os ângulos retos são iguais entre si.
5. Se uma reta caindo sobre duas retas faz a soma dos ângulos internos do mesmo lado menor que dois ângulos retos, então as duas retas, se prolongadas indefinidamente, encontram-se naquele lado em que a soma dos ângulos é menor que dois retos.



Axiomas (ou noções comuns):

1. Coisas que são iguais a uma mesma coisa são também iguais entre si.
2. Se iguais são somados a iguais, os totais são iguais.
3. Se iguais são subtraídos de iguais, os restos são iguais.
4. Coisas que coincidem uma com a outra são iguais uma a outra.
5. O todo é maior que a parte.

A maioria dos matemáticos gregos faziam distinção entre postulados e axiomas e segundo Eves (1997, p. 179) há evidências de que Euclides aderiu, dentre outras distinções, a que considerava um axioma como uma suposição comum a todas as ciências enquanto que um postulado seria uma suposição peculiar a uma ciência particular em estudo. Neste

caso, os cinco últimos são enunciados gerais sobre quantidades e os cinco primeiros são especificamente geométricos. A partir dessas dez afirmações são deduzidas todas as proposições de modo sintético, como afirma Eves (1997, p. 180), “consistindo em derivar o desconhecido e mais complexo do conhecido e mais simples”.

Com relação aos sistemas axiomáticos, Ávila (2001, p. 8) destaca que

um sistema axiomático deve satisfazer três condições seguintes: ser consistente, quer dizer, os postulados não podem contradizer uns aos outros, por si mesmos ou por suas conseqüências; deve ser completo, no sentido de serem suficientes para provar verdadeiras ou falsas todas as proposições formuladas no contexto da teoria em questão; e, por fim, cada postulado deve ser independente dos demais, no sentido de que não é consequência deles, sob pena de ser supérfluo.

Embora a obra de Euclides represente um marco na história da Matemática, uma análise mais cuidadosa dos seus postulados mostram que, em muitas passagens, ele apelou à intuição nas suas definições e demonstrações, fazendo uso de resultados que não eram consequência de teoremas demonstrados anteriormente nem tinham sido citados como postulados.

Outros pontos a serem destacados referem-se ao fato de que algumas demonstrações eram baseadas em uma determinada figura generalizando resultados a partir de um caso particular e a utilização de movimentos em triângulos para demonstrações por superposição dessas figuras sem a garantia, mediante menção de um axioma por exemplo, que o movimento não alterava a forma do triângulo, o que evidencia que o sistema axiomático de Euclides era incompleto.

No século XIX alguns matemáticos se dedicaram a estudar de modo mais rigoroso a geometria de Euclides e, como forma de assegurar que os deslocamentos não alteravam as propriedades das figuras passaram a usar a afirmação seguinte como postulado: *figuras geométricas podem deslocar-se sem modificar seu tamanho e forma*. Também o matemático Moritz Pasch¹ adotou como postulado a afirmação: *se uma reta intersecta um lado de um triângulo então ela intersectará o outro lado do triângulo*, visto que esta afirmação não podia ser demonstrada usando somente os postulados de Euclides.

A formulação axiomática da Geometria que se consolidou foi a proposta por David Hilbert (1862-1943) que, em 1889, “publicou o livro *Fundamentos da Geometria*, no qual faz uma apresentação rigorosa de uma axiomática adequada ao desenvolvimento lógico-dedutivo da Geometria Euclidiana” Ávila (2001, p. 7). Em sua teoria axiomática, Hilbert baseia-se nos conceitos primitivos de ponto, reta e plano, em três relações fundamentais: incidência, estar entre e congruência, e cinco sistemas de axiomas, vinte axiomas ao todo.

¹Matemático alemão que, em 1882, publicou o livro *Pasch, Vorlesungen über neue Geometrie*, chamando atenção para uma série de pressupostos até o momento despercebidos nos Elementos de Euclides, argumentando que o raciocínio matemático deve se desvencilhar da interpretação física dos termos primitivos e dedicar total atenção nas manipulações formais justificadas pelos axiomas.

1.2 O V Postulado

Durante muito tempo, aproximadamente dois mil anos, acreditou-se que o V postulado poderia ser demonstrado a partir dos quatro anteriores, o que o elevaria à categoria de teorema. De fato, comparando-o com os outros percebe-se pela forma como é escrito, que se parece mais com um teorema do que com um axioma e que não é tão evidente quanto os anteriores. Além disso, Euclides demonstra 28 proposições antes de usá-lo no desenvolvimento da sua teoria axiomática.

Muitos matemáticos se dedicaram ao longo de séculos a provar o V postulado a partir dos anteriores, mas todas essas tentativas de demonstração foram frustradas. Durante estas tentativas foram propostos enunciados que são logicamente equivalentes ao V postulado, Eves (2004, p. 539) destaca alguns:

- (1) Há pelo menos um triângulo cuja soma dos ângulos internos é igual a um ângulo raso;
- (2) Existe um par de triângulos semelhantes e não congruentes;
- (3) Existe um par de retas igualmente distantes uma da outra em todos os pontos;
- (4) Por três pontos não colineares pode-se traçar uma circunferência;
- (5) Por qualquer ponto no interior de um ângulo menor que 60 graus pode-se sempre traçar uma reta que intercepta ambos os lados do ângulo.

O substitutivo mais comumente usado nos textos atuais é conhecido como Postulado de Playfair que foi proposto pelo matemático e físico escocês John Playfair (1748-1819) em seu trabalho *Elementos de Geometria*, embora segundo Berlinghoff e Gouvêa (2010, p. 198) Proclus² já o tivesse enunciado e explorado no século V.

Forma de Playfair do Postulado das Paralelas: *por um ponto fora de uma reta, existe exatamente uma reta paralela à reta dada.*

Com relação a um substitutivo do quinto postulado Barbosa (2002, p. 13) destaca que

A maneira de provar que uma proposição P é um substituto para o 5º postulado é a seguinte: primeiramente, devemos saber que P é uma proposição da Geometria Euclidiana. Depois, devemos demonstrar que, na teoria desenvolvida usando os 4 primeiros postulados e mais P, pode-se provar o 5º Postulado de Euclides.

²Filósofo grego que se dedicou ao estudo da Astronomia, é autor de *Comentário sobre o Primeiro Livro de Euclides* que é uma fonte essencial sobre a história da Matemática Grega.

O Postulado de Playfair é apresentado em muitos livros atuais de Geometria como *Postulado das Paralelas* ao invés da forma original de Euclides, o mesmo será feito neste texto quando alguma referência for feita ao quinto postulado de Euclides.

1.3 Tentativas de Demonstração do V Postulado

Como já foi dito, durante aproximadamente vinte séculos muitos matemáticos tentaram demonstrar o Postulado das Paralelas, não obtendo êxito, pois as demonstrações quase sempre baseavam-se em suposições que eram equivalentes ao próprio quinto postulado.

Dentre os matemáticos que se dedicaram a esta atividade podemos destacar Proclus (410-485), Nasiredin (1201-1274), F. Comandino (1509-1575), C. S. Clavio (1537-1612), G. A. Boreli (1608-1679), John Wallis (1616-1703), Giordano Vitale (1633-1711), Adrien Marie Legendre (1752- 1833). Destacaremos neste texto as tentativas de Girolamo Saccheri e Johann Heinrich Lambert pois seus trabalhos influenciaram o estudo de matemáticos que culminaram com o surgimento das geometrias não Euclidianas³ e também os trabalhos de Carl Friedrich Gauss por ter sido o primeiro a considerar a impossibilidade da demonstração do V postulado.

1.3.1 Saccheri

No início do século XVIII, o jesuíta italiano Girolamo Saccheri (1667-1733), em seu livro *Euclides ab omni naevo vindicatus* (Euclides, sem qualquer falha), usando redução ao absurdo, propôs uma abordagem diferente para a questão do Postulado das Paralelas. Saccheri acreditava que o V postulado podia ser demonstrado a partir dos anteriores. Sua ideia foi substituir este por uma das duas formas de negação do Postulado de Playfair: *por um ponto fora de uma reta passa mais de uma reta paralela ou por um ponto fora de uma reta não passam retas paralelas*. Dessa forma, ao usar a negação do Postulado das Paralelas como axioma e encontrar uma contradição nesse novo sistema, ele teria provado que o Postulado das Paralelas poderia ser demonstrado a partir dos anteriores embora não tivesse essa demonstração.

Saccheri propôs o estudo do quadrilátero $ABCD$ da figura 1.1 no qual os ângulos \hat{A} e \hat{B} são retos e os lados AD e BC são congruentes, usando as primeiras vinte e oito proposições dos Elementos (que não precisam do postulado das paralelas para sua demonstração).

³Não existe uma regra nem uma padronização para a escrita da expressão ‘não Euclidianas’. Diante disso foi feita a opção pela forma ‘não’ em minúscula e ‘Euclidianas’ em maiúscula e sem hífen por ser a forma mais comum encontrada nos textos acadêmicos. Com exceção para citações literais e títulos de trabalhos citados nesse texto.

Assim, mostrou que os ângulos \hat{C} e \hat{D} tem mesma medida, havendo três possibilidades para estes: os ângulos \hat{C} e \hat{D} são retos, obtusos ou agudos. Saccheri queria mostrar que as hipóteses do ângulo agudo e do ângulo obtuso levavam a contradições, então por redução ao absurdo, deveria valer a hipótese do ângulo reto. Assumindo a infinitude da reta, Saccheri prontamente eliminou a hipótese do ângulo obtuso mas não conseguiu uma contradição no caso do ângulo agudo, como afirma Eves (1997, p. 540),

após obter muitos dos teoremas agora clássicos da chamada Geometria não-euclidiana, Saccheri, de maneira insatisfatória e inconvincente, forçou uma contradição no desenvolvimento de suas idéias através de noções nebulosas sobre elementos infinitos.

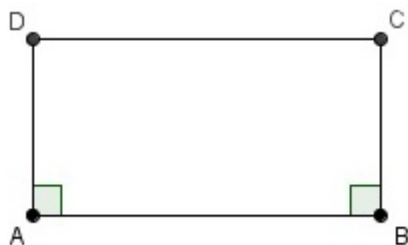


Figura 1.1: Quadrilátero de Saccheri

O trabalho de Saccheri permaneceu ignorado por mais de um século. Posteriormente, Karl Gauss (1777-1855), Janos Bolyai (1802-1860) e Nicolai Lobachewski (1793-1856) o redescobriram e, conseqüentemente, as primeiras ideias relacionadas às geometrias não-Euclidianas começaram a surgir. Essas ideias se desenvolveram de forma independente e em um curto intervalo de tempo entre elas.

1.3.2 Lambert

O alemão Johann Heirinch Lambert (1728-1777), assim como Saccheri, também tentou demonstrar o quinto postulado usando um argumento indireto. Ele considerou um quadrilátero conforme figura 1.2, só que com três ângulos retos, e supôs três possibilidades para o quarto ângulo: o quarto ângulo é reto (o que corresponde ao quinto postulado de Euclides), agudo ou obtuso.

Assim como fez Saccheri, Lambert eliminou a hipótese do ângulo obtuso assumindo que a reta é ilimitada e não conseguiu chegar a uma contradição quanto ao ângulo agudo. Lambert avançou muito mais que Saccheri e obteve resultados interessantes sobre a soma dos ângulos de um triângulo. Ele observou que a hipótese do ângulo obtuso vale para



Figura 1.2: Quadrilátero de Lambert.

triângulos esféricos e conjecturou que a hipótese do ângulo agudo poderia se verificar na superfície de uma esfera de raio imaginário, hipótese que foi mostrada posteriormente por Beltrami quando propôs um modelo para a representação desses triângulos e de outros resultados decorrentes da negação do quinto postulado. Essas observações foram comprovadas posteriormente também por Riemann e Lobachevsky.

Caso tivessem considerado a impossibilidade de exibir uma contradição teria sido atribuída a um deles a descoberta das geometrias não Euclidianas.

1.3.3 Gauss

Gauss foi o primeiro a chegar à conclusão da impossibilidade de demonstrar o V postulado a partir dos anteriores, tendo sido atribuída a ele a designação das novas geometrias como *geometrias não Euclidianas* embora não tenha publicado nenhum trabalho sobre o assunto, de acordo com Tenório (1995, p. 32), “por temer as reações pouco receptivas da comunidade científica com relação ao tema”.

O que se conhece de suas descobertas sobre as geometrias não Euclidianas deve-se às suas anotações e correspondências trocadas entre ele e matemáticos da época. Assim como Saccheri e Lambert, Gauss também tentou demonstrar o quinto postulado usando redução ao absurdo e na segunda metade do século XIX iniciou a dedução de uma nova geometria. Esse fato chegou ao conhecimento da comunidade científica por uma correspondência enviada ao matemático F. A. Taurinus em 1824. Um trecho dessa carta é transcrito abaixo.

Todos os meus esforços para descobrir uma contradição, uma inconsistência, nesta geometria não euclidiana não tiveram sucesso, e a única coisa nela que se opõe a nossa concepção é que se for verdade, deve existir no espaço uma unidade universal de medida linear (desconhecida por nós). (Barbosa, 2002, p. 45).

Um dos resultados atribuídos a Gauss, que também foi encontrado por Lambert, está relacionado à existência de triângulos sobre uma superfície negativa que tem a propriedade seguinte: a diferença entre a soma de dois ângulos retos e a soma dos ângulos internos de um triângulo é proporcional à área do triângulo.

1.4 Geometrias Não Euclidianas

Serão apresentados nesta seção os dois tipos clássicos de geometria não Euclidiana: Hiperbólica e Elíptica. Será dada ênfase a demonstração de resultados ligados à Geometria Elíptica, visto que a proposta de trabalho a ser aplicada em uma turma de ensino básico refere-se a esta geometria.

Os termos Geometria Hiperbólica e Geometria Elíptica nos remetem naturalmente a hipérbolas e elipses. As palavras “hipérbole” e “elipse” tem origem grega e significam “excesso” e “deficiência” respectivamente, enquanto que a palavra “parábola” significa “paralelo a”. Assim, podemos pensar na Geometria Hiperbólica como a que possui um “excesso” de retas paralelas ao passo que na Geometria Elíptica existe uma “deficiência” de paralelas comparadas com a Geometria Euclidiana (também conhecida como Geometria Parabólica), no que se refere ao quinto postulado.

1.4.1 Geometria Hiperbólica

A geometria não Euclidiana denominada Hiperbólica foi desenvolvida de modo independente e quase que simultaneamente pelo russo Nicolai Lobachevsky e o húngaro Janos Bolyai. Esta geometria admite os quatro primeiros postulados da Geometria Euclidiana exceto o Postulado das Paralelas que é substituído por uma das formas de sua negação:

Por um ponto P não pertencente a uma reta r passa mais de uma reta paralela à reta r .

Dessa forma, na Geometria Hiperbólica existem muitas retas paralelas passando por um ponto externo à reta e não apenas uma reta como no modelo euclidiano. Na figura 1.3 as retas r e s são paralelas à reta t .

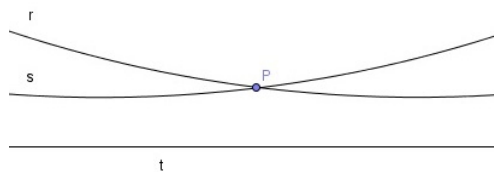


Figura 1.3: Retas paralelas no modelo hiperbólico

Ao contrário de Bolyai, que não aprofundou seus estudos sobre o tema tendo publicado apenas um artigo como anexo em um livro de seu pai Farkas Bolyai, Lobachevsky foi o primeiro a publicar um trabalho sobre esta geometria por volta de 1829, demonstrando um grande número de resultados.

Como resultados da Geometria Hiperbólica destacamos: todos os triângulos semelhantes nessa geometria são necessariamente congruentes, os ângulos do topo de um quadrilátero de Saccheri são agudos, o ângulo não reto de um quadrilátero de Lambert sempre é agudo, a soma dos ângulos internos de um triângulo é menor que 180° , como consequência temos que a soma dos ângulos internos de um quadrilátero é menor que 360° implicando na inexistência de quadrados e retângulos nessa nova geometria.

1.4.2 Modelos para Representação da Geometria Hiperbólica

Um modelo para uma geometria é um ambiente onde seus teoremas, postulados e conceitos são interpretados e as afirmações relativas a essa geometria são aceitas como verdadeiras.

Mesmo os criadores dessa teoria tendo avançado em seus estudos sobre o tema eles não propuseram nenhum modelo onde fosse possível a representação destes espaços não Euclidianos. Só depois alguns modelos foram propostos, inicialmente por Beltrami (1835-1900) em 1868 e posteriormente por Felix Klein (1849-1935) e Henri Poincaré (1854-1912), baseando-se em elementos da própria Geometria Euclidiana .

O modelo de Beltrami é uma superfície de revolução obtida pela rotação em torno de seu eixo horizontal de uma curva chamada tractriz⁴ (figura 1.4), a superfície assim obtida é conhecida como *pseudoesfera* (figura 1.5). Beltrami considerou as curvas que minimizam as distâncias entre pontos sobre essa superfície (geodésicas) como retas, mas este modelo apresentava falhas pois esta superfície possui aresta impedindo o prolongamento de algumas geodésicas, e isso contradiz o postulado 2 de Euclides.

⁴A tractriz é uma curva descrita pelo ponto final P de um cordão esticado PQ de comprimento a quando a outra extremidade Q é puxada ao longo do eixo x .

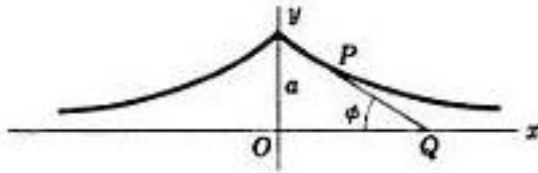


Figura 1.4: Tractriz.

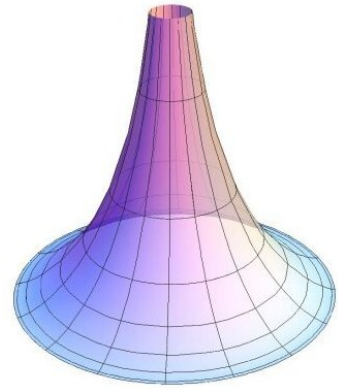


Figura 1.5: Pseudoesfera

O modelo elaborado por Klein consiste da região interior de um círculo, desconsiderando-se a fronteira, em um plano euclidiano como mostrado na figura 1.6.

Nesse plano as retas são as cordas do círculo sem as extremidades. Klein para complementar o modelo, conforme afirma Coutinho (2001, p. 42), adota uma unidade de medida variável como forma de garantir que as retas tenham uma extensão infinita dentro de uma área finita. Essa unidade de medida variável diminui de tamanho à medida que se aproxima da fronteira do plano.

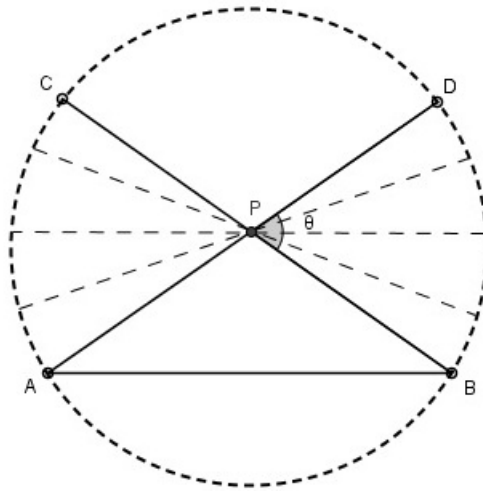


Figura 1.6: Modelo de Klein

Na figura 1.6 temos como exemplo de retas da Geometria Hiperbólica as cordas AB , BC e AD excluindo suas extremidades. As retas BC e AD são paralelas à reta AB e as infinitas retas situadas no interior do ângulo θ e que passam por P são as retas *não-secantes* a AB e que também são paralelas a AB .

Em um dos modelos propostos pelo francês Jules Henri Poincaré, o plano é um disco

limitado e difere do modelo de Klein no que diz respeito às retas, estas são consideradas como todos os diâmetros do disco (excluindo suas extremidades) assim como os arcos de círculos perpendiculares⁵ à borda como mostrado na figura 1.7.

O ângulo hiperbólico entre duas retas é definido como sendo o ângulo euclidiano entre suas tangentes no ponto de intersecção e os pontos são considerados da mesma forma que na Geometria Euclidiana. Os pontos que pertencem à circunferência são chamados de *pontos ideais* e a circunferência é denominada *horizonte hiperbólico*.

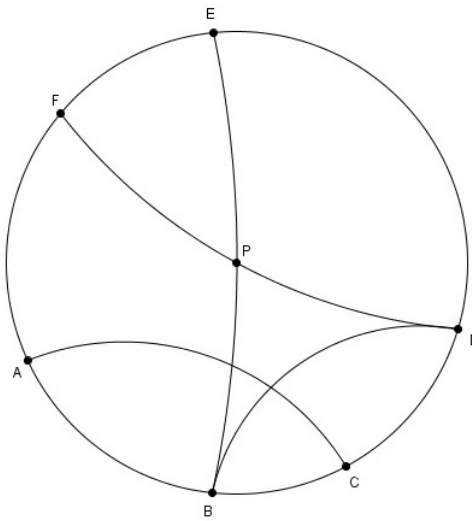


Figura 1.7: Modelo de Poincaré

Na figura 1.7 AC e BD são retas que se intersectam enquanto que BE e DF são retas paralelas à reta BD .

Em um Disco de Poincaré para calcular a distância entre dois pontos A e B inicialmente traçamos a reta hiperbólica que passa por esses pontos e consideramos os pontos ideais C e D no horizonte hiperbólico, conforme figura 1.8, a distância entre esses pontos é dada pela relação $d(A,B) = |\ln(\frac{AC/AD}{BC/BD})|$, onde AC , AD , BC e BD são as medidas euclidianas desses segmentos (Ribeiro e Gravina, p. 57).

A partir dessa definição é possível observar que:

- Quando o ponto A tende ao ponto B , temos que a distância AC tende a BC e AD tende a BD . Dessa forma a razão $(\frac{AC/AD}{BC/BD})$ tende a 1 e o logaritmo da razão tende a zero. E assim a distância hiperbólica entre os pontos A e B tende a zero.
- Quando o ponto A tende ao ponto C (localizado no horizonte hiperbólico) a distância euclidiana entre esses pontos tende a zero. Dessa forma a razão $(\frac{AC/AD}{BC/BD})$ tende a

⁵Dois círculos são perpendiculares quando as retas tangentes no ponto de intersecção são perpendiculares

zero e o logaritmo da razão tende ao infinito negativo, mas, como a expressão está em módulo, a distância no plano hiperbólico entre os pontos A e B tende ao infinito.

- Quando o ponto B tende ao ponto D , a distância euclidiana BD tende a zero e assim a razão $(\frac{AC/AD}{BC/BD})$ também tende ao infinito e conseqüentemente o logaritmo da razão também tende ao infinito e a distância hiperbólica entre os pontos A e B tende ao infinito.

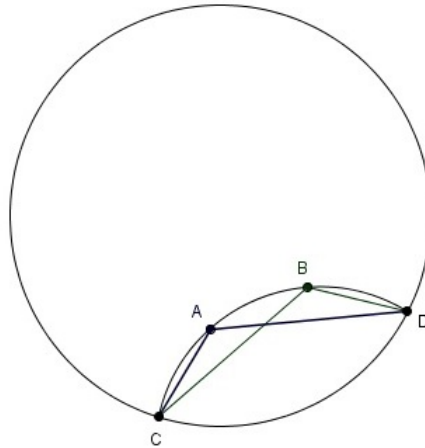


Figura 1.8: Razão cruzada.

O outro modelo proposto por Poincaré é conhecido como modelo do semi-plano. Neste modelo a fronteira é uma reta que é também desconsiderada assim como ocorre com a fronteira do disco. As retas, neste modelo, são as semirretas perpendiculares à fronteira e também os semicírculos, conforme figura 1.9. Nesse modelo as semirretas são consideradas como semicírculos de raio infinito. As distâncias e os ângulos são medidos como no modelo do Disco de Poincaré.

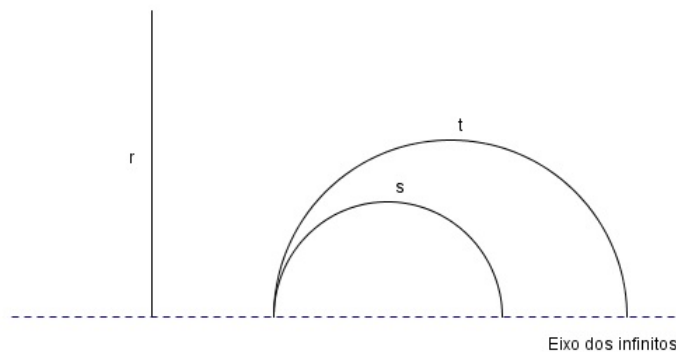


Figura 1.9: Semi-plano de Poincaré

1.4.3 Geometria Elíptica

Assim como na Geometria Hiperbólica a Geometria Elíptica admite os quatro primeiros postulados de Euclides e o quinto postulado é substituído por uma das formas de sua negação:

Por um ponto P não pertencente a uma reta r não passam retas paralelas à reta r .

Essa geometria foi desenvolvida pelo matemático alemão Georg Bernhard Riemann (1826-1866) e apresentada pela primeira vez por ele na Universidade de Göttingen para sua admissão como professor-adjunto desta instituição. Segundo Coutinho (2001, p. 73) na ocasião, Riemann apontou as possibilidades de outra geometria e, conseqüentemente de outros espaços, motivando desta forma o surgimento dos termos geometrias ou espaços de Riemann.

O modelo mais simples para a representação da Geometria Elíptica é o modelo da esfera, e nesse caso especificamente, a Geometria Elíptica pode ser chamada de Geometria Esférica onde considera-se sua superfície como o “plano” e posições sobre esta superfície como “pontos”. O modelo esférico será adotado neste trabalho em uma proposta de introdução de um modelo de geometria não Euclidiana na educação básica.

Sabemos que na Geometria Euclidiana o caminho de menor comprimento entre dois pontos A e B é o segmento de reta que une esses pontos. Considerando os pontos A e B sobre uma superfície esférica se verificarmos entre todas as curvas que ligam esses pontos aquela que tem o menor comprimento, esta curva é parte do círculo máximo da esfera que passa pelos pontos A e B e é chamada de geodésica pela propriedade que possui de minimizar o comprimento entre dois pontos. Estes círculos são chamados de máximos por serem os maiores círculos que podem ser traçados sobre a superfície esférica. Dessa forma, partes do círculo máximo e o próprio círculo máximo são identificados, por analogia com a Geometria Euclidiana, respectivamente como o segmento de reta e a reta da Geometria Esférica.

Como resultados da Geometria Esférica podemos destacar a inexistência de retas paralelas, sobre dois pontos diametralmente opostos é possível traçar infinitas retas passando por esses pontos, os triângulos semelhantes são obrigatoriamente congruentes, não existem retângulos, a soma dos ângulos internos de um triângulo é maior que 180° e, conseqüentemente, a soma dos ângulos internos de um quadrilátero é maior que 360° .

1.4.4 Noções Elementares de Geometria Esférica

Nesta seção serão abordados alguns conceitos básicos da Geometria Esférica que serão usados na sequência de atividades. Inicialmente apresentaremos algumas definições e em seguida alguns dos principais teoremas dessa geometria.

Definição 1.4.1. Esfera: Seja r um segmento de reta e O um ponto. A esfera de centro O e raio r é o conjunto de todos os pontos do espaço cuja distância ao ponto O é menor que ou igual a r .

Definição 1.4.2. Superfície esférica: A superfície esférica de centro O e raio r é o conjunto de pontos do espaço cuja distância ao ponto O é igual a r .

Quando um plano intersecta uma esfera de centro O e raio r , o conjunto de pontos formados pela intersecção do plano com a esfera é sempre um círculo. O raio desse círculo varia de acordo com a distância do plano ao centro da esfera, quanto mais próximo do centro da esfera maior o raio do círculo.

Definição 1.4.3. Círculos Máximos: são os círculos obtidos pela intersecção de um plano com uma superfície esférica passando pelo centro desta.

Definição 1.4.4. Pontos Antípodas: são os pontos obtidos pela intersecção de uma reta euclidiana com uma superfície esférica passando pelo seu centro.

Definição 1.4.5. Círculos Menores: são círculos obtidos pela intersecção de um plano com uma superfície esférica passando por um ponto diferente do centro da esfera.

Definição 1.4.6. Distância na superfície esférica: a distância entre dois pontos distintos A e B pertencentes a uma superfície esférica é a menor porção do círculo máximo que passa por esses pontos. As unidades de medida de comprimento são o grau e o radiano por generalizarem as medidas em qualquer esfera independente da medida de seu raio.

Definição 1.4.7. Ângulo esférico: é a intersecção de dois círculos máximos e sua medida é a mesma medida do ângulo formado pelas retas tangentes a esses círculos máximos em seu ponto de intersecção.

Na figura 1.10 o ângulo α entre os círculos máximos tem medida igual ao ângulo formado pelas retas r e s que são tangentes aos círculos no vértice do ângulo.

Definição 1.4.8. Triângulo esférico: é a figura formada pelos arcos de círculo máximo, contidos em um mesmo hemisfério, que unem três pontos distintos não pertencentes a um mesmo círculo máximo.

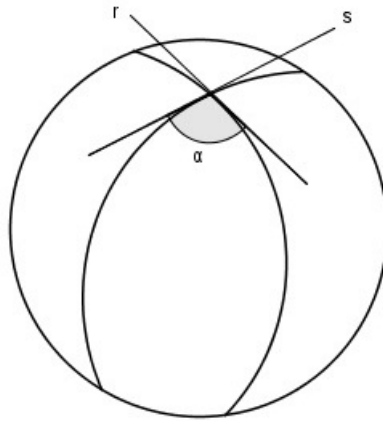


Figura 1.10: Ângulo esférico

Os lados AB , BC e CA do triângulo esférico da figura 1.11 são denotados por c , a e b , respectivamente e medidos pelos ângulos subtendidos por eles no centro da esfera, se fossem medidos em unidades de comprimento dependeriam do raio da esfera. Os ângulos do triângulo ABC são os ângulos \widehat{CAB} , \widehat{ABC} e \widehat{BCA} que podem ser indicados também por \widehat{A} , \widehat{B} e \widehat{C} , respectivamente.

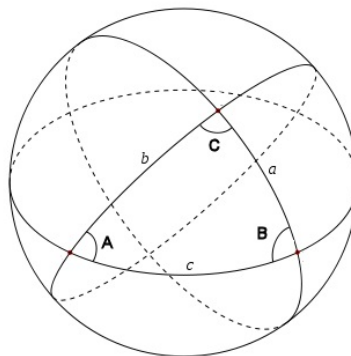


Figura 1.11: Triângulo esférico.

Os triângulos esféricos assim como os triângulos da Geometria Euclidiana possuem três alturas, três bissetrizes, três mediatrizes e três medianas definidas de maneira análoga à definição para triângulos planos diferindo apenas com relação aos lados que na Geometria Esférica são substituídos pelos arcos de círculo máximo.

Os triângulos esféricos podem ter um, dois ou três ângulos retos o que os classificam como triângulo *retângulo*, *birretângulo* e *trirretângulo*, respectivamente. Também com relação aos lados estes podem ter um, dois ou os três lados medindo 90° classificando-os como triângulo *retilátero*, *birretilátero* e *trirretilátero*, respectivamente. Ressaltamos que a medida de cada lado do triângulo esférico está associada à medida do ângulo central do

arco da circunferência máxima que corresponde ao lado do triângulo. Coutinho (2001, p. 86) destaca que “se um triângulo esférico é trirretângulo, sê-lo-á também trirretilátero e, reciprocamente, ou seja, trata-se de um triângulo que cobre exatamente a oitava parte da superfície esférica associada”.

1.4.5 Elementos Notáveis da Esfera

A seguir são elencados alguns elementos notáveis da esfera e alguns resultados importantes para o estudo da Geometria Esférica.

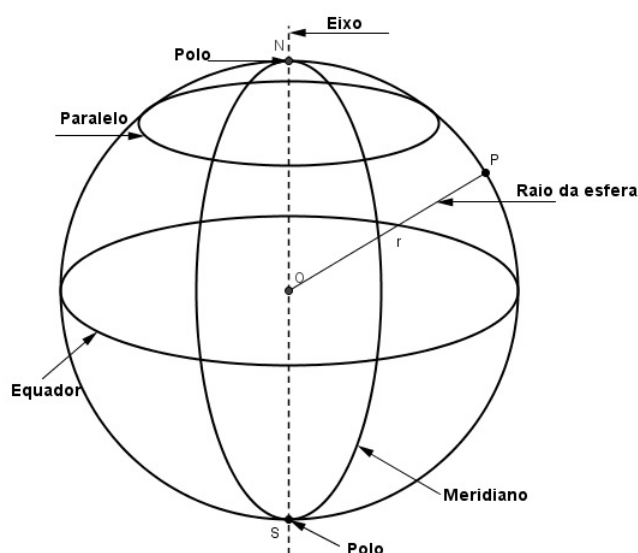


Figura 1.12: Elementos notáveis da esfera

Eixo – toda reta que contem o centro O da esfera.

Polos – correspondem aos pontos de intersecção da superfície esférica com o eixo.

Equador – é a circunferência que corresponde à secção perpendicular ao eixo e passa pelo centro da esfera.

Hemisférios – é cada uma das partes em que fica dividida a esfera pelo círculo associado ao equador.

Paralelo – é uma circunferência obtida pela intersecção de um plano perpendicular ao eixo.

Meridiano – é uma circunferência obtida pela intersecção de um plano que passa pelo centro da esfera e que contém os pólos.

Na figura 1.13 os círculos máximos AC e BC , perpendiculares ao círculo máximo AB , intersectam-se em C e em seu ponto antípoda C' . O círculo máximo AB é chamado *polar* comum dos pontos C e C' e estes pontos são chamados *polos* do círculo máximo AB .

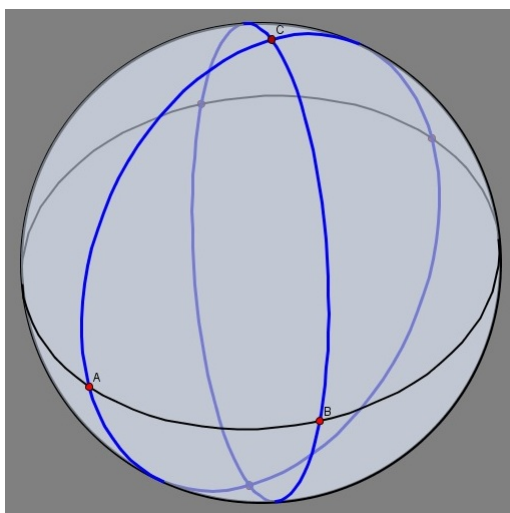


Figura 1.13: Reta polar

Na Geometria Esférica, a distância de qualquer “reta” ao seu polo é um valor constante para todas as retas. Essa distância corresponde a um quarto do comprimento do círculo máximo. Dessa forma, nessa geometria toda “reta” tem o mesmo comprimento.

Apresentamos agora alguns resultados importantes da Geometria Esférica relacionados a triângulos e quadriláteros dessa geometria. Suas demonstrações são baseadas em Coutinho (2001). Nessas demonstrações, dentre outros resultados, usaremos a congruência de triângulos que é válida na Geometria Esférica visto que este resultado é demonstrado nos Elementos antes da proposição 29, portanto, sem utilizar o V Postulado de Euclides e, na Geometria Esférica os quatro primeiros postulados de Euclides fazem parte do seu conjunto de axiomas.

Teorema 1.4.9. *Os segmentos que ligam os pontos médios da base e do topo de um Quadrilátero de Saccheri é perpendicular a ambos.*

Demonstração. Sejam E e F os pontos médios dos lados AB (base) e CD (topo) respectivamente, do Quadrilátero de Saccheri mostrado na figura 1.14. Ligando os pontos C e D ao ponto E obtemos os triângulos ADE e BCE . Os lados AE e EB são congruentes pois E é o ponto médio do segmento AB . Os lados AD e BC e o ângulos $\hat{D}AE$ e $\hat{C}BE$ são congruentes entre si pela definição do Quadrilátero de Saccheri. Assim, os triângulos possuem

dois lados com a mesma medida e o ângulo formado por eles também com mesma medida, logo os triângulos ADE e BCE são congruentes. Nos triângulos DFE e CFE temos que DF e CF são congruentes pois F é o ponto médio do segmento CD . Os lados DE e CE são congruentes pois são lados correspondentes dos triângulos congruentes ADE e BCE e o lado EF é comum aos dois triângulos. Logo, os triângulos DFE e CFE são congruentes e os ângulos $\hat{E}FD$ e $\hat{E}FC$ são congruentes, adjacentes e suplementares, ou seja, ambos medem 90° . Além disso os ângulos $\hat{D}EF$ e $\hat{C}EF$ são congruentes assim como os ângulos $\hat{A}ED$ e $\hat{B}EC$, o que resulta em $\hat{A}EF$ e $\hat{B}EF$ congruentes, adjacentes e suplementares, ou seja, ambos medem 90° . \square

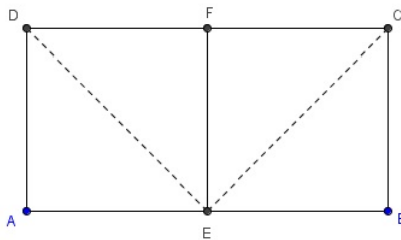


Figura 1.14: Quadrilátero de Saccheri

Teorema 1.4.10. *Os ângulos do topo do Quadrilátero de Saccheri são congruentes e obtusos.*

Demonstração. Pela congruência de triângulos usada na demonstração do teorema 1.4.9 temos que os ângulos do topo do Quadrilátero de Saccheri são congruentes.

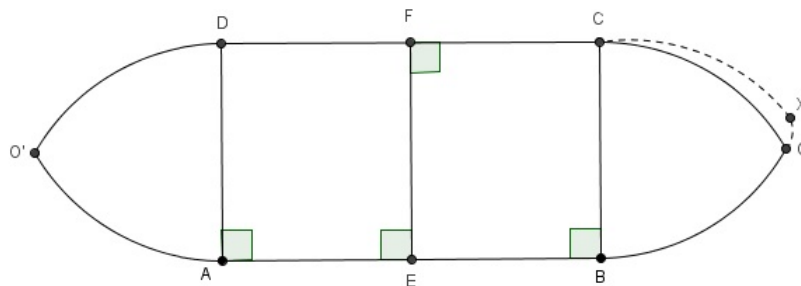


Figura 1.15: Ângulos do topo do Quadrilátero de Saccheri.

Para provar que os ângulos do topo são obtusos, basta mostrar que seus suplementos são agudos. Seja $ABCD$ um Quadrilátero de Saccheri com O e O' os pólos de EF , e este, o segmento que une os pontos médios do topo e da base do quadrilátero. Se X está situado em BO e é o polo de BC , então $BX > BO$, pois $BO < EO$. Mas, se o ponto X

é polo de BC , segue que CX é perpendicular a BC e $\widehat{XCB} = 90^\circ$ o que resulta em $\widehat{BCO} < 90^\circ$, portanto, o ângulo adjacente \widehat{BCF} é obtuso. \square

Teorema 1.4.11. *Na Geometria Esférica o Quadrilátero de Lambert tem o seu quarto ângulo obtuso.*

Demonstração. A perpendicular comum aos pontos médios do topo e da base de um quadrilátero de Saccheri divide-o em dois quadriláteros de Lambert e, conforme mostrado no teorema 1.4.10 os ângulos do topo de um quadrilátero de Saccheri são obtusos. Dessa forma, cada ângulo não reto de cada quadrilátero de Lambert em que foi dividido o quadrilátero de Saccheri é obtuso. \square

Teorema 1.4.12. *A soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo retângulo é maior do que 180° .*

Demonstração. Seja ABC um triângulo retângulo em B e E o ponto médio da hipotenusa AC conforme figura 1.16. Seja ED perpendicular a BC . Construa o segmento AF tal que o ângulo \widehat{CAF} tenha a mesma medida que o ângulo \widehat{ACB} e os segmentos DC e AF sejam congruentes. Dessa forma temos dois triângulos congruentes AFE e CDE . Consequentemente o ângulo \widehat{AFE} é reto e os pontos D, E e F estão alinhados. Portanto, $ABDF$ é um Quadrilátero de Lambert com ângulo obtuso em \widehat{BAF} , ou seja, $\widehat{BAC} + \widehat{CAF} > 90^\circ$ pelo teorema 1.4.13. Como o ângulo \widehat{CAF} é congruente ao ângulo \widehat{ACB} do triângulo retângulo, segue que

$$1 + 2 + 3 > 180^\circ.$$

\square

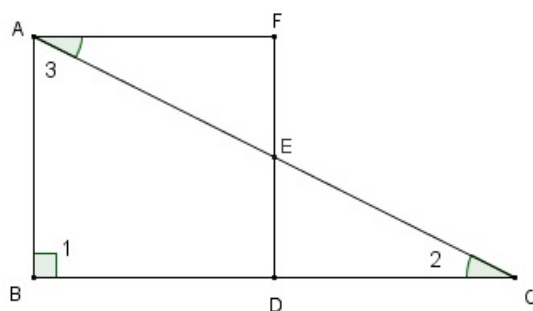


Figura 1.16: Soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo retângulo.

Teorema 1.4.13. *A soma das medidas dos ângulos de qualquer triângulo é maior do que 180° .*

Demonstração. Desde que qualquer triângulo possa ser decomposto em dois triângulos retângulos, as somas das medidas dos ângulos internos de cada triângulo retângulo assim

obtido é maior que 180° e, conseqüentemente a soma das medidas dos ângulos do triângulo primitivo é maior que 180° . \square

Teorema 1.4.14. *A soma das medidas dos ângulos de qualquer quadrilátero é maior que 360° .*

Demonstração. Seja $ABCD$ um quadrilátero qualquer. Traçando-se uma das diagonais, por exemplo a diagonal AC , este quadrilátero fica decomposto em dois triângulos ABC e ACD . Como, pelo teorema 1.4.13, a soma das medidas dos ângulos de um triângulo é maior que 180° , temos que a soma das medidas dos dois triângulos em que foi decomposto o quadrilátero é maior que 360° . \square

Capítulo 2

Informática na Educação Matemática

O desenvolvimento tecnológico ocorrido nas últimas décadas promoveu avanços significativos em praticamente todos os setores da sociedade e tem proporcionado impacto direto na vida das pessoas como, por exemplo, na facilidade de acesso à informação e na diversificação dos meios de comunicação.

Com relação à educação as possibilidades são múltiplas, os PCN's apontam como um dos objetivos educacionais a serem priorizados na educação básica a “valorização do uso dos recursos tecnológicos, como instrumentos que podem auxiliar na realização de alguns trabalhos, sem anular o esforço da atividade compreensiva” (PCN's, 1998, p. 75).

Atualmente pode-se observar que o acesso às tecnologias da informação e da comunicação tem sido ampliado nas escolas, que vêm sendo equipadas com laboratórios de informática conectados à internet possibilitando aos educandos acesso rápido à informação bem como às possibilidades educativas que podem ser proporcionadas com o uso do computador como recurso pedagógico. Com relação a esse tema podemos ler nos Parâmetros Curriculares Nacionais que “embora os computadores ainda não estejam amplamente disponíveis para a maioria das escolas, eles já começam a integrar muitas experiências educacionais, prevendo-se sua utilização em maior escala a curto prazo” (PCN, 1998, p. 4).

Essas possibilidades vão desde a utilização de editores de texto, planilhas eletrônicas para a organização e melhor visualização de dados, comunicação, até a utilização de programas de computador para o estudo de temas específicos nas mais diversas áreas, permitindo ao estudante um papel mais dinâmico na construção do conhecimento.

Com relação à Matemática, a Geometria tem se mostrado como o ramo dessa ciência que tem experimentado as maiores possibilidades de mudança na sua forma de ser ensinada e aprendida com o uso da informática, devido principalmente ao desenvolvimento e popularização de softwares destinados ao seu ensino. A grande vantagem com relação ao uso desse recurso no estudo da Geometria está na visualização dos entes geométricos,

assim como na manipulação virtual destes e na verificação de possíveis propriedades que permanecem invariantes mesmo com a manipulação de alguns elementos da construção. As mesmas construções se realizadas usando os recursos tradicionais como papel e instrumentos de desenho e medição, como por exemplo, régua, compasso e esquadros, demandariam um tempo muito maior para sua elaboração.

Van Hiele apud Soares (1986, p. 4) enfatiza a importância da visualização no processo de construção do conhecimento. Para este autor “a representação mental dos objetos geométricos, a análise e a organização formal (síntese) das propriedades geométricas relativas a um conceito geométrico são passos preparatórios para o entendimento da formalização de um conceito”.

A visualização através do computador pode contribuir também para as demonstrações em geometria, visto que os alunos podem observar determinados padrões e a partir dessas observações elaborar conceitos, formular conjecturas com relação ao tema em estudo podendo assim contribuir na dedução lógica de uma demonstração.

Existem diversos softwares¹ disponíveis para o ensino e a aprendizagem da matemática, a grande maioria gratuitos e com relativa facilidade de utilização por estudantes da educação básica. Mas a simples disponibilidade do software não garante a qualidade da aprendizagem do aluno. Com relação a isso, os PCN's chamam a atenção que “o bom uso que se possa fazer do computador na sala de aula também depende da escolha de softwares, em função dos objetivos que se pretende atingir e da concepção de conhecimento e de aprendizagem que orienta o processo”. (PCN, 1998, pág. 44).

Assim, faz-se necessário conhecer o programa, suas possibilidades educativas, bem como adequá-lo ao nível de ensino e aos objetivos que se deseja alcançar, exigindo do professor uma postura crítica diante dos resultados apresentados pelo computador uma vez que o propósito principal da utilização deste recurso é o de explorar o tema em estudo a partir de uma interface computacional devendo-se colocar sempre a ênfase na construção do conhecimento dedicando atenção especial às limitações inerentes aos softwares como destaca Soares (1986, p. 11)

As limitações encontradas nos softwares de geometria dinâmica são muitas vezes, consequência da própria tecnologia utilizada [...]. Quando o usuário desenha retas, semirretas e segmentos de reta é possível perceber, em alguns momentos, descontinuidade no traçado. Além disso, o professor deve estar sempre atento ao fato de que determinadas medidas obtidas estão sempre sujeitas a erros e aproximações. A precisão das medidas acaba dependendo das limitações da tela, da impressora e de cálculos internos do computador.

¹Para o leitor interessado em informática educativa em [4] é feita uma análise de 75 softwares educativos para o ensino de Matemática nos anos iniciais do Ensino Fundamental.

São muitas as limitações dos recursos computacionais quando aplicados ao ensino de Matemática, estas não se resumem às destacadas no fragmento acima. Mas, o mais importante é que o professor sempre esteja atento a elas, não considerando as soluções apresentadas pelo computador como verdades incontestáveis e sim como uma fonte de informações rica em possibilidades de exploração.

2.1 Ensino de Matemática e Geometria

De acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais os conteúdos de Matemática para o ensino fundamental e médio se dividem em quatro blocos: números e operações, grandezas e medidas, tratamento da informação e espaço e forma. Dentro do bloco espaço e forma os PCN's destacam que devem ser exploradas em sala de aula situações em que seja necessário o trabalho com construções geométricas, visualização e aplicação de propriedades de figuras, noções relativas à posição, localização de figuras, deslocamentos no plano, sistemas de coordenadas, enfatiza também a importância do estudo das transformações geométricas (homotetias e isometrias) como forma de assegurar o desenvolvimento de habilidades de visualização espacial.

Essas primeiras noções relacionadas ao estudo do espaço e das figuras geométricas já devem ser vistas nas séries iniciais do ensino fundamental e esse estudo deve ser gradativamente desenvolvido e ampliado com o avanço das séries e conseqüentemente dos níveis de ensino. Mas, é consenso entre muitos autores que o ensino de Geometria na educação básica tem sido negligenciado nas escolas brasileiras há muito tempo. Pavanelo (1989, p. 17) destaca que nas séries iniciais do ensino fundamental os conteúdos, em sua maioria, estão relacionados à aritmética e nas séries finais são predominantemente relacionados à Álgebra. A Geometria é abordada como um tópico desvinculado dos demais conteúdos, abordagem que também pode ser observada na grande maioria dos livros didáticos dessa fase do ensino, contribuindo dessa forma para que esta importante parte da Matemática não seja estudada de forma satisfatória na escola básica.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais também apontam a atual situação do ensino desta área da Matemática bem como destacam a sua importância na formação do estudante.

[...] a Geometria tem tido pouco destaque nas aulas de Matemática e, muitas vezes, confunde-se seu ensino com o das medidas. Em que pese seu abandono, ela desempenha um papel fundamental no currículo, na medida em que possibilita ao aluno desenvolver um tipo de pensamento particular para compreender, descrever e representar, de forma organizada, o mundo em que vive.” (PCN's, p. 122)

Dentre os recursos disponíveis para o trabalho com a Geometria optou-se pela informática e dentre os softwares existentes o Cinderella foi escolhido por possuir uma interface simples possibilitando o trabalho com as geometrias não Euclidianas, que é o tema em estudo.

2.2 O Software Cinderella

O Cinderella é um software de geometria dinâmica de utilização intuitiva que propicia um ambiente interativo para a aprendizagem e a exploração da Geometria Euclidiana e de dois tipos de geometria não Euclidiana (Esférica e Hiperbólica).

Este programa foi criado por J. Richter-Gebert e U. H. Kortenkamp originalmente em alemão e posteriormente traduzido para o português por Jorge Nuno Silva.

O software tem utilização livre e pode ser encontrado com facilidade no endereço eletrônico www.cinderella.de/tiki-index.php?page=download+cinderella.2. O programa é de fácil utilização, pois apresenta ícones com imagens sugestivas de modo que é possível intuir com facilidade cada uma de suas funções, criar construções geométricas e manipular essas construções mantendo suas propriedades geométricas invariantes. Além disso, o menu “Ajuda” contém o conteúdo completo do manual permitindo ao usuário consultá-lo quando necessário.

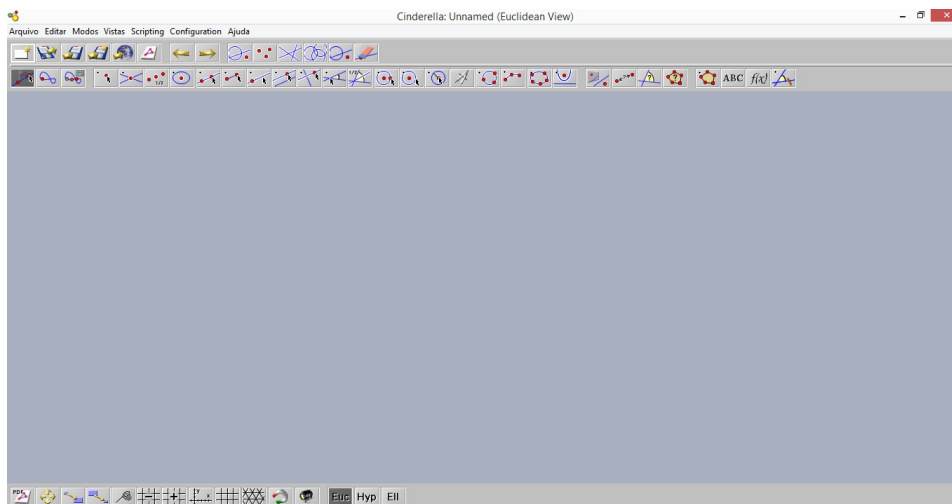


Figura 2.1: Interface do Cinderella

Uma de suas particularidades é a possibilidade de explorar uma mesma construção geométrica em geometrias diferentes (Euclidiana, Hiperbólica e Esférica). Um triângulo

pode ser construído em Geometria Euclidiana no software Cinderella e visualizado nas janelas esférica e hiperbólica simultaneamente conforme figura 2.2.

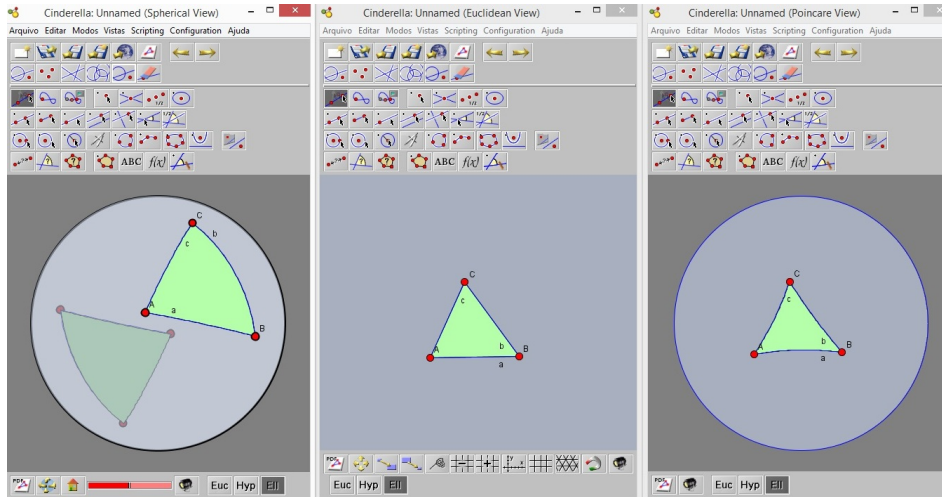


Figura 2.2: Triângulo nas vistas esférica, euclidiana e hiperbólica

As três imagens podem ser vistas simultaneamente e qualquer modificação em uma delas provoca uma atualização imediata nas outras.

Cabe salientar que o software Cinderella tem limitações que impossibilitam a realização de algumas atividades. Como, por exemplo, a inexistência de uma ferramenta que permita medir distâncias sobre as superfícies esférica e hiperbólica. Sobre estas superfícies o programa possibilita apenas a medição de ângulos, a verificação de propriedades relativas a pontos e retas e propriedades de figuras geométricas. Também não oferece o recurso de “macros” que é o armazenamento de informações relacionadas a uma construção para serem utilizadas em outras construções.

Capítulo 3

Proposta de Inserção de um Modelo de Geometria Não Euclidiana na Educação Básica

Dentre os modelos de geometria não Euclidiana optou-se por adotar a Geometria Esférica para a presente proposta de inserção deste tema na educação básica. Esta escolha deve-se principalmente à familiaridade dos alunos com o modelo esférico uma vez que já nas séries iniciais do ensino fundamental os alunos estudam noções de localização sobre o globo terrestre, definições de latitude e longitude, por exemplo, assim como há uma proximidade de nomes e conceitos da Geometria e da Geografia: equador, meridiano, paralelo e pólo.

Lènard apud Kallef (2008, p. 29) defende a inclusão da Geometria Esférica no currículo da geometria escolar, pois, segundo ele, esta é parte das nossas experiências diárias, visto que vivemos sobre uma superfície esférica. O autor ainda afirma que aos estudantes deveria se oportunizar estudar a Geometria Euclidiana e a não Euclidiana simultaneamente e que esta geometria auxilia na compreensão dos conceitos euclidianos, pois o aluno pode ser levado a fazer comparações ao expandir as definições euclidianas para a geometria da esfera, bem como a compreender como um sistema de axiomas pode ser modelado em vários campos de estudo.

Embora não mencione expressamente as geometrias não Euclidianas entre os conteúdos a serem lecionados na educação básica, os Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Fundamental apresentam a Matemática referente a essa fase da educação da seguinte forma

“[...] fruto da criação e invenção humanas, a Matemática não evolui de forma linear e logicamente organizada. Desenvolve-se com movimentos de idas e vindas, com rupturas de paradigmas. Frequentemente um conhecimento é amplamente utilizado na ciência ou na tecnologia antes de ser incorporado a um dos sistemas lógicos formais do corpo da Matemática. Exemplos desse fato podem ser encontrados no surgimento dos números negativos, irracionais e imaginários. Uma instância importante de mudança de paradigma ocorreu quando se superou a visão de uma única geometria do real, a Geometria Euclidiana, para aceitação de uma pluralidade de modelos geométricos, logicamente consistentes, que podem modelar a realidade do espaço físico” (PCN, p. 24).

Evidenciando a importância da descoberta das geometrias não Euclidianas na história da Matemática assim como destacando o caráter dinâmico dessa ciência.

A metodologia adotada consistirá na aplicação de uma sequência de atividades em que o aluno será levado a confrontar o conhecimento que possui sobre Geometria Euclidiana com um novo modelo que será apresentado, a Geometria Esférica.

A atividade inicial da sequência de aulas visa introduzir a ideia de geodésica na circunferência através da realização de medições usando um barbante e um globo terrestre como um modelo para a Geometria Esférica. Após esse primeiro contato os alunos serão levados a formular conjecturas, verificando a possibilidade ou não de construções em uma geometria e na outra, destacando semelhanças e diferenças entre as geometrias. Para isso, será usado um programa de geometria dinâmica, o Cinderella.

A série sugerida para a realização da atividade é a última série do ensino fundamental, o 9º ano, visto que um dos objetivos da atividade é confrontar o conhecimento de Geometria Euclidiana que o aluno já possui com um novo modelo. E nesta série, teoricamente, o estudante já deve ter uma base de conhecimento geométrico que, segundo as orientações curriculares para o ensino fundamental, dentre outros tópicos, deve abranger:

- Verificar propriedades de triângulos e quadriláteros pelo reconhecimento dos casos de congruência de triângulos.
- Identificação e construção das alturas, bissetrizes, medianas e mediatrizes de um triângulo utilizando régua e compasso.
- Resolução de situações-problema que envolvam a obtenção da mediatriz de um segmento, da bissetriz de um ângulo, de retas paralelas e perpendiculares e de alguns ângulos notáveis, fazendo uso de instrumentos como régua, compasso, esquadro e transferidor.
- Verificação de que a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180° . (PCN's p. 88)

A elaboração das atividades levou em consideração os tópicos acima e como os alunos já dominam estes conteúdos relacionados à Geometria o trabalho terá como foco principal a comparação de alguns tópicos com o modelo esférico através da utilização do computador.

3.1 Descrição das Atividades

3.1.1 ATIVIDADE 1 - Formando o conceito de geodésica na superfície esférica.

Os itens de (A) a (E) seguintes são adaptações de atividades propostas por Berlinghoff e Gouvêa (2010, p. 203) e constituem um contato inicial com um modelo físico para a Geometria Esférica, o globo terrestre. O objetivo dessa atividade introdutória é levar o aluno a perceber como são as menores distâncias (geodésicas) sobre uma esfera. Usando um globo terrestre e um barbante deverão realizar as atividades e anotar suas observações.

- (A) Tóquio está só a poucos graus ao sul de Nova York na latitude. Use seu barbante para achar o caminho mais curto entre essas duas cidades. Depois estenda seu barbante a toda volta do globo, formando um círculo. Qual é o seu comprimento medido?
- (B) Repita a parte (A) usando São Francisco, na Califórnia e Bagdá, no Iraque.
- (C) Repita a parte (A) usando Kampala em Uganda (na África Central) e a embocadura do Amazonas, ao norte do Brasil.
- (D) Como se comparam os comprimentos dos círculos dos itens (A), (B) e (C)? Alguns deles são círculos máximos? São todos eles círculos máximos?

Resultados esperados – Espera-se que o aluno ao realizar os itens de (A) a (D) observe empiricamente como funcionam as geodésicas numa esfera, estes itens permitem observar que, ao se prolongar o barbante todos os círculos formados têm o mesmo comprimento e que estes círculos são os de maior comprimento que podem ser traçados sobre uma esfera levando-o a conjecturar que o caminho mais curto entre dois pontos sobre a superfície esférica é sempre um arco de círculo máximo. Dessa forma, por analogia com a Geometria Euclidiana, esses círculos máximos deverão ser considerados como as *retas* assim como os arcos de círculo máximo como os *segmentos de reta* dessa geometria.

Após este primeiro momento o professor definirá o que é geodésica fazendo uma comparação entre o observado nesta atividade e o que acontece na geometria plana (Euclidiana).

O item seguinte visa levar o aluno a conjecturar sobre a inexistência de retas paralelas nessa geometria. Como, pelas atividades anteriores o aluno já tem conhecimento que o equivalente à reta da Geometria Euclidiana na Geometria Esférica são os círculos máximos o aluno deverá realizar a atividade seguinte e chegar a uma conjectura relativa a uma negação do V postulado de Euclides.

- (E) Verifique se é possível dividir a Terra exatamente pela metade em dois hemisférios por uma reta diferente do Equador sem intersectá-lo.

Resultados esperados - Através da utilização do barbante espera-se que o aluno perceba a impossibilidade de dividir a esfera representada pelo globo terrestre por outro círculo máximo em duas partes sem interceptar a linha do Equador. A escolha da linha do Equador não implica em perda de generalidade, uma vez que qualquer círculo máximo, inclusive um meridiano, poderia ser considerado como o Equador de uma esfera.

Visto que os alunos já realizaram as atividades anteriores e já tem conhecimento sobre a superfície esférica bem como a noção de menor distância nessa superfície, serão introduzidas mais atividades de exploração da Geometria Esférica agora usando o software de geometria dinâmica Cinderella. Este programa permite a manipulação virtual de entes geométricos utilizando as vistas euclidiana, esférica e hiperbólica. A proposta de atividade consiste em verificar propriedades e formular conjecturas usando as vistas euclidiana e esférica observando quais propriedades valem nas duas geometrias ou em apenas uma bem como as possíveis justificativas.

As atividades estão divididas em três partes: propriedades de pontos, segmentos e retas; propriedades de ângulos e triângulos e propriedades de quadriláteros. O tempo necessário para a realização da atividade é de três aulas, uma para cada atividade, esse período se justifica por de ser necessário um tempo para que o aluno se familiarize com o programa e suas principais ferramentas.

Inicialmente os alunos realizarão as atividades utilizando a vista esférica e posteriormente a vista euclidiana, se julgarem necessário, para verificar semelhanças, diferenças, possibilidade ou não de construção, formulando assim conjecturas relativas à Geometria Esférica através da exploração empírica usando o software.

3.1.2 ATIVIDADE 2 - Algumas propriedades envolvendo pontos e retas.

Nesta etapa da atividade o aluno utilizando a vista esférica do software Cinderella e a vista euclidiana, se necessário, deverá fazer as construções seguintes, verificar semelhanças e diferenças entre as duas Geometrias e anotar suas observações em um quadro comparativo que será disponibilizado para o aluno.

Modelo euclidiano	Modelo esférico

Antes de iniciar esta atividade o professor deverá apresentar o programa aos alunos, sua interface, suas características, seus principais ícones e justificar uma particularidade do software que é o fato de considerar pontos antípodos como se fossem o mesmo ponto o que justifica as construções duplas e simétricas em relação ao centro da esfera quando realizadas sobre esta vista.

Para começar as atividades com o uso do software inicialmente deve-se abrir o programa e escolher a opção *Vistas* na barra de menu e marcar *Vista Esférica* conforme figura 3.1, nesse mesmo campo é possível alternar para as outras vistas, mas nas atividades propostas será usada a vista esférica e a euclidiana, se necessário .

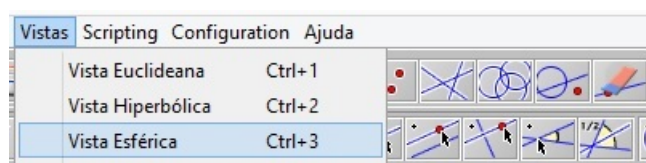
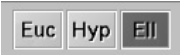



Figura 3.1: Vista esférica no software Cinderela.

Após a escolha da vista aparecerá a tela para a realização das atividades, deve-se então marcar a opção *Ell*  para que seja possível realizar as atividades sobre a superfície esférica virtual, as opções *Euc* e *Hyp* alternam para as vistas euclidiana e hiperbólica, respectivamente.

A seguir apresentamos as atividades propostas com os passos a serem seguidos para as construções e uma análise dos resultados que se espera obter por parte dos alunos, assim como das possíveis dificuldades enfrentadas por eles e possíveis justificativas quando diferenças forem encontradas nas construções comparando os modelos geométricos euclidiano e esférico.

1 - Marcando-se dois pontos distintos sobre uma reta, em quantas partes fica dividida esta reta e como são essas partes (retas, semirretas, segmentos de reta)?

- Usando a ferramenta *traçar linha através de um ponto* , traçar uma reta sobre a superfície virtual esférica e observar que diferenças e/ou semelhanças existem comparando os modelos euclidiano e esférico com relação às partes em que fica dividida a reta por dois pontos distintos marcados sobre ela.

Resultados esperados - Nessa atividade o aluno deverá constatar que na Geometria Euclidiana quando marcados dois pontos sobre uma reta, esta fica dividida em um segmento de reta e duas semirretas, já na Geometria Esférica o círculo máximo fica dividido em dois segmentos de reta. Essa diferença se deve ao fato de que nesta geometria as retas são finitas pois sempre é possível voltar ao ponto de partida ao percorrê-las mas ilimitadas pelo fato de poder serem percorridas indefinidamente. Quanto aos pontos não há necessidade de marcá-los visto que ao traçar uma reta o programa já mostra um ponto sobre a reta assim como seu ponto antípoda como podemos observar na figura 3.2.

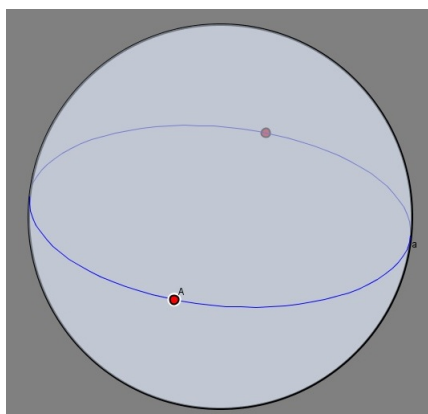



Figura 3.2: Reta da geometria esférica (círculo máximo).

2 - Quais são as possibilidades para o traçado de duas retas (paralelas, concorrentes, coincidentes)?

- Traçar duas retas e usando a ferramenta *mover elemento* , movê-las e verificar as possibilidades para o traçado destas.

- O que é possível observar com relação à posição relativa das retas comparando as duas geometrias?

Resultados esperados - Na vista euclidiana o aluno não deverá apresentar dificuldade, visto que já é do seu conhecimento as possibilidades para a posição relativa entre duas retas no plano euclidiano. Quanto à vista esférica espera-se que o aluno tente traçar, sem

sucesso, retas paralelas e possivelmente ele pode apresentar retas que não são círculos máximos como se fossem paralelas, caso isso ocorra o professor deve retomar as atividades iniciais de verificação usando o barbante e o globo terrestre para constatar a impossibilidade do traçado destas numa superfície esférica. E o aluno deverá chegar a conclusão que só existem retas concorrentes ou coincidentes. Na figura 3.3 temos a representação de duas retas concorrentes sobre a superfície esférica.

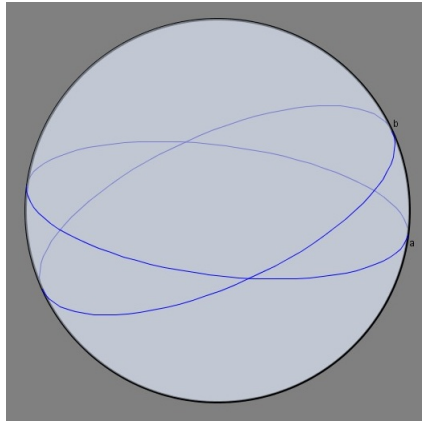


Figura 3.3: Retas concorrentes na geometria esférica

3 - Retas concorrentes se intersectam em quantos pontos?

- Traçar duas retas concorrentes.
- Movê-las e verificar as possibilidades com relação à intersecção delas.
- Quais os resultados observados?

Resultados esperados - Devido ao fato já verificado empiricamente no item E da atividade 1 e na construção virtual mostrada na figura 3.3 já é do conhecimento do aluno que duas retas não coincidentes na Geometria Esférica sempre se intersectam em dois pontos, fato que não é observado na Geometria Euclidiana.

4 - Quantas retas passam por dois pontos distintos quaisquer?

- Usando a ferramenta *adicionar um ponto*  marcar dois pontos distintos e verificar quantas retas é possível traçar passando por estes pontos.

Resultados esperados - Na vista esférica marcando-se dois pontos quaisquer só é possível traçar uma reta passando por eles (figura 3.4), a menos que esses pontos sejam diametralmente opostos (pontos antípodas) quando é possível traçar infinitas retas passando por

esses dois pontos (figura 3.5). O aluno pode apresentar dificuldade para chegar a essa constatação, nesse caso o professor deve intervir mostrando essa possibilidade.

Para que o aluno visualize pode-se sugerir a seguinte sequência de passos para a construção no modelo esférico:

- Traçar uma reta sobre a superfície esférica;
- Marcar um ponto sobre esta reta;
- Traçar outras retas passando por este mesmo ponto;
- Há alguma relação entre as retas traçadas e o outro ponto de intersecção dessas retas?

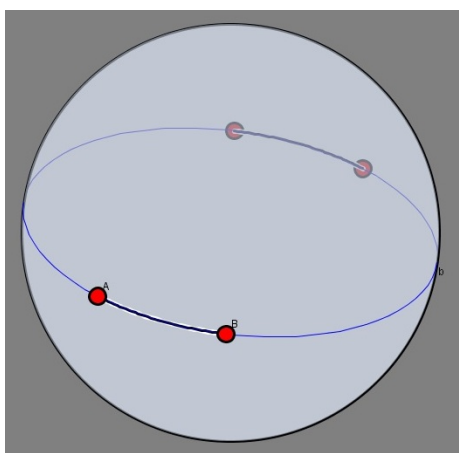


Figura 3.4: Reta passando por dois pontos quaisquer.

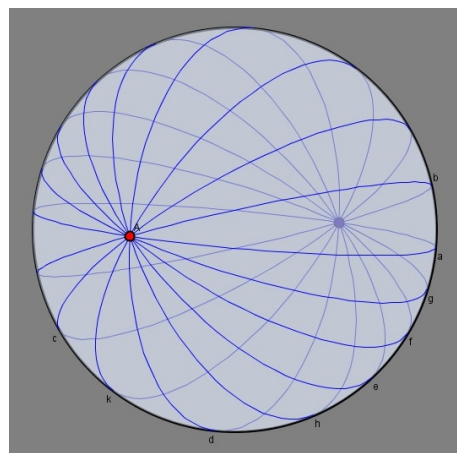




Figura 3.5: Retas passando por pontos antípodas.

5 - Duas retas perpendiculares determinam quantos ângulos retos?

- Traçar uma reta;
- Traçar uma perpendicular a esta reta usando a ferramenta *traçar linha perpendicular*  ;
- Medir os ângulos formados pela intersecção dessas retas com o auxílio da ferramenta *medir ângulo*  ;
- Qual a medida dos ângulos formados por elas? Quantos são esses ângulos?

Resultados esperados - Há uma diferença nesse caso com relação aos dois sistemas geométricos, no euclidiano há apenas um ponto de intersecção entre as perpendiculares e quatro ângulos retos enquanto que no esférico há dois pontos e conseqüentemente oito ângulos retos. Ao realizar o item 3 da atividade 2 o aluno já verificou que há dois pontos de intersecção entre duas retas distintas na Geometria Esférica e, ao realizar a medição

dos ângulos verificará que são oito os ângulos retos (figura 3.6) formados pela intersecção dessas retas.

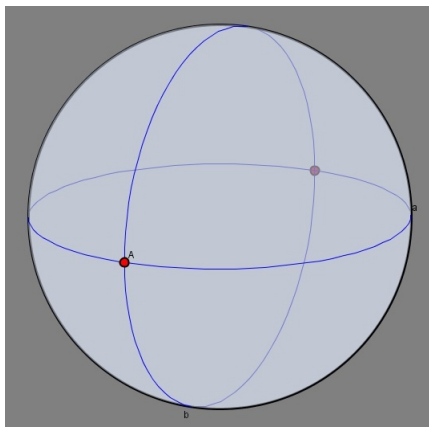


Figura 3.6: Retas perpendiculares na geometria esférica.

6 - Qual a posição relativa entre duas retas distintas e perpendiculares a uma terceira reta?

- Traçar uma reta;
- Traçar duas retas perpendiculares passando por pontos distintos desta reta;
- Qual a posição relativa entre as retas perpendiculares?

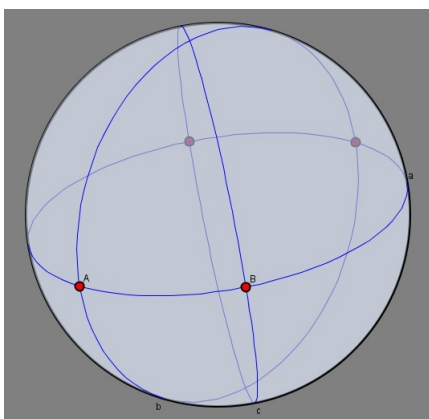




Figura 3.7: Posição relativa de duas retas distintas perpendiculares a uma terceira reta.

Resultados esperados - Espera-se que na comparação entre as duas vistas o aluno conjecture que na Geometria Esférica duas retas perpendiculares a uma reta dada se intersectam enquanto que na Geometria Euclidiana as duas retas são paralelas e a observação

dessa construção (figura 3.7) deve motivar o professor a introduzir o conceito de triângulo esférico que será um dos tópicos a serem estudados na próxima atividade.

3.1.3 ATIVIDADE 3 - Algumas propriedades envolvendo ângulos e triângulos.

1 – Qual a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo?

- Usando a ferramenta *traçar um segmento* , construir os segmentos AB , BC e CA formando o triângulo ABC ;
 - Destacar a figura formada com o auxílio da ferramenta *definir um polígono* ;
- Nas atividades seguintes repetir esse procedimento de destacar a figura sempre que um polígono for construído.
- Medir seus ângulos internos;
 - Qual a soma das medidas dos ângulos internos do triângulo obtido?
 - Mova os vértices para aumentar as medidas dos lados do triângulo. Qual a soma das medidas dos ângulos internos do triângulo obtido?
 - Mova os vértices para diminuir as medidas dos lados do triângulo. Qual a soma das medidas dos ângulos internos do triângulo obtido?

Resultados esperados - O aluno deve visualizar nesta atividade que a soma dos ângulos internos de um triângulo esférico é maior que 180° . Mais ainda, que essa soma é variável e seu valor aumenta ou diminui conforme aumentam ou diminuem as medidas dos lados do triângulo, resultado que difere da Geometria Euclidiana, onde a soma dos ângulos internos de um triângulo é sempre 180° . Na figura 3.8 podemos ver a construção de um triângulo esférico cuja soma das medidas dos seus ângulos internos é 206° .

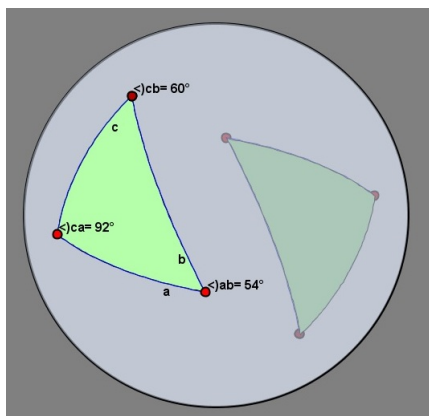


Figura 3.8: Soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo esférico.

2 – Qual a relação entre a medida de um ângulo externo de um triângulo esférico e a soma das medidas dos ângulos internos não adjacentes a ele?

- Traçar uma reta;
- Construir um triângulo de modo que um dos lados esteja contido nesta reta;
- Medir um dos ângulos externos que este triângulo faz com a reta;
- Medir os ângulos não adjacentes a este ângulo externo.
- Existe alguma relação entre a medida do ângulo externo e a soma das medidas dos ângulos internos não adjacentes a ele? Compare este resultado com o observado na Geometria Euclidiana.

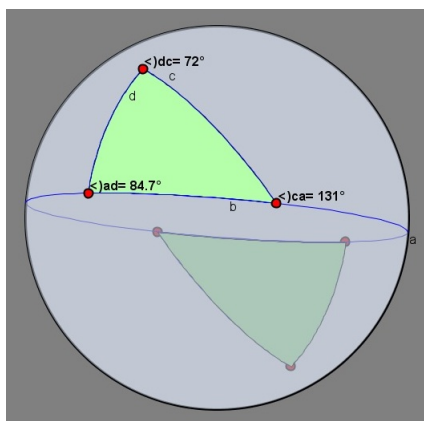


Figura 3.9: Ângulo externo em um triângulo esférico.

Resultados esperados - A verificação deste resultado não coincide com o observado na Geometria Euclidiana, uma vez que na Geometria Esférica a medida do ângulo externo de um triângulo é sempre menor que a soma das medidas dos ângulos internos não adjacentes a ele e essa medida é variável conforme variam os comprimentos dos lados do triângulo. Uma justificativa para esse resultado é o fato de que a soma de um ângulo interno com o ângulo externo adjacente de um triângulo esférico é 180° e, conforme observado no item 1 da atividade 3 a soma dos ângulos internos de um triângulo esférico é maior que 180° . Portanto o ângulo externo tem medida menor que a soma dos ângulos internos não adjacentes a este ângulo. Um exemplo deste resultado é mostrado na figura 3.9.

3 – Quantos ângulos retos um triângulo esférico pode ter?

Este item está dividido em duas partes: construção de um triângulo com um ângulo reto e construção de um triângulo com mais um ângulo reto.

3.1 - Construção de um triângulo com um ângulo reto.

- Traçar uma reta e uma perpendicular à esta reta;
- Traçar um segmento com uma extremidade em cada uma das retas e diferente do ponto de intersecção destas;
- Fazendo uma analogia com a Geometria Euclidiana, como podemos classificar o triângulo obtido ?

3.2 – Triângulo com mais de um ângulo reto.

- Repetir a construção do item 6 da atividade 2;
- Como já observado na vista esférica as retas se intersectam e formam um triângulo cujos ângulos da base são retos; Meça um dos ângulos formados pela intersecção das retas perpendiculares;
- Quantos ângulos retos possui este triângulo esférico?
- Observando essa construção é possível construir um triângulo esférico com três ângulos retos?

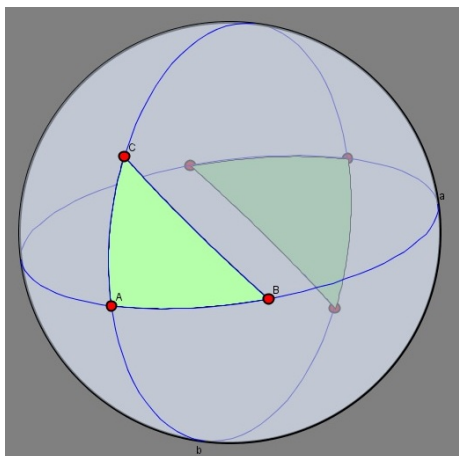


Figura 3.10: Triângulo retângulo.

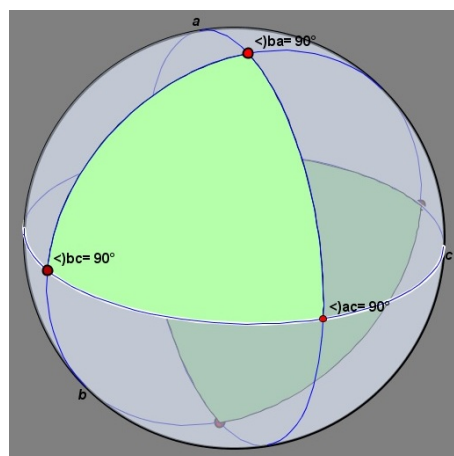



Figura 3.11: Triângulo trirretângulo.

Resultados esperados - Nessa atividade o aluno pode observar que um triângulo esférico pode ter um, dois ou três ângulos retos o que o classifica como triângulo retângulo (figura 3.10), birretângulo ou trirretângulo (figura 3.11). A construção do item 6 da atividade 2 já mostra um triângulo birretângulo, espera-se que o aluno movendo os pontos e as retas chegue à conclusão da possibilidade de formar um ângulo reto entre as retas perpendicu-

lares à primeira reta construída levando-o à conclusão sobre a possibilidade da construção do triângulo trirretângulo.

4 – Qual a relação entre os ângulos da base de um triângulo esférico isósceles?

- Trace um segmento AB ;
- Usando a ferramenta *construir dois pontos e seu ponto médio* , marcar o ponto médio desse segmento;
- Trace uma perpendicular passando pelo ponto médio do segmento AB , que é a mediatriz desse segmento;
- Marque um ponto sobre a mediatriz diferente do ponto de intersecção desta com o segmento AB ;
- Trace os segmentos que unem o ponto sobre a mediatriz e os pontos A e B , extremos do segmento;
- Meça os ângulos da base do triângulo formado.
- Mova o ponto sobre a mediatriz e observe o que acontece com as medidas dos ângulos da base;
- Qual a relação entre as medidas dos ângulos da base desse triângulo?

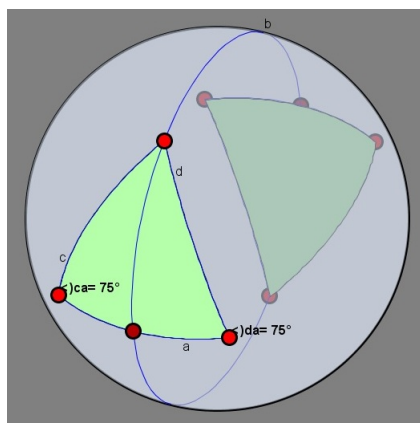

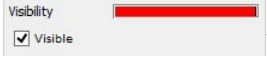


Figura 3.12: Ângulos da base de um triângulo isósceles.

Resultados esperados - Espera-se com essa construção que o aluno verifique que os ângulos da base de um triângulo isósceles esférico tem a mesma medida assim como acontece na Geometria Euclidiana e conclua que essa medida é variável à medida que variam os comprimentos dos lados do triângulo.

5 – Construir um triângulo equilátero, medir seus ângulos internos e verificar o que acontece com as medidas dos ângulos quando as medidas dos lados aumentam ou diminuem.

- Sobre a superfície virtual esférica traçar um segmento AB ;
- Traçar a circunferência de centro A e raio AB com o auxílio da ferramenta *traçar circunferência ao redor de ponto* ;
- Traçar a circunferência de centro B e raio AB ;
- Marcar um dos pontos de intersecção dessas duas circunferências e indicar por C ;
- Traçar os segmentos AC e BC ; (pode-se ocultar as circunferências bem como o ponto de intersecção entre elas que não foi utilizado na construção do triângulo clicando com o botão direito do mouse sobre a figura e desmarcando a opção *visible* );¹
- Medir os ângulos internos do triângulo equilátero obtido;
- Mover os vértices A e B ;
- O que ocorre com as medidas dos ângulos internos do triângulo?
- Há alguma relação de variação entre as medidas dos lados de um triângulo equilátero esférico e as medidas dos seus ângulos internos?
- Os diferentes triângulos equiláteros obtidos ao aumentar ou diminuir as medidas dos seus lados são semelhantes?

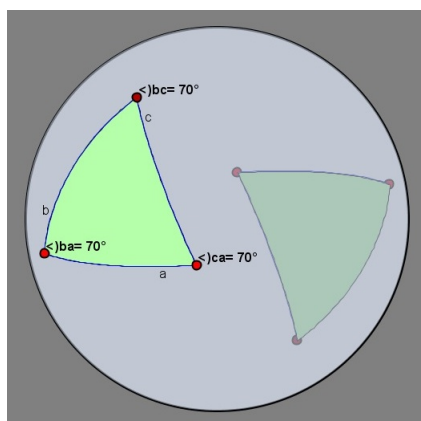



Figura 3.13: Triângulo esférico equilátero.

Resultados esperados - Espera-se com essa construção que o aluno verifique que na Geometria Esférica as medidas dos ângulos internos de um triângulo equilátero são iguais assim como ocorre com a Geometria Euclidiana, mas que essa medida varia, aumentando ou diminuindo conforme aumentam ou diminuem as medidas dos lados do triângulo

¹Este procedimento que permite ocultar alguns elementos da construção pode ser usado em outras itens desta atividade como forma de possibilitar uma melhor visualização das figuras.

equilátero. Os diferentes triângulos obtidos ao aumentar ou diminuir as medidas dos lados do triângulo equilátero não são semelhantes pois ao aumentarem ou diminuírem as medidas dos lados as medidas dos ângulos internos também aumentam ou diminuem.

6 – É possível circunscrever um triângulo esférico?

- Construir um triângulo ABC .
- Marcar os pontos médios dos lados desse triângulo.
- Traçar a perpendicular a cada um dos lados do triângulo passando pelos respectivos pontos médios, ou seja, suas mediatrizes;
- Marcar a intersecção dessas perpendiculares (circuncentro do triângulo esférico) com a ferramenta *intersecção entre dois objetos* ;
- Construir o círculo centrado no circuncentro e que passa pelos vértices do triângulo ABC ;
- Mover os vértices e verificar a posição do circuncentro bem como do círculo que circunscreve o triângulo.

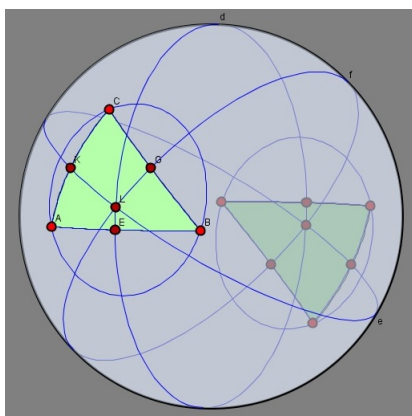



Figura 3.14: Triângulo esférico inscrito em uma circunferência.

Resultados esperados – Após a realização da sequência de passos acima espera-se que o aluno conjecture que é possível a circunscrição de uma circunferência a um triângulo. E que o circuncentro vai se posicionar, assim como ocorre na Geometria Euclidiana, no interior do triângulo sobre um de seus lados ou fora do triângulo.

7 – É possível inscrever um círculo em um triângulo esférico?

- Construir um triângulo ABC ;

- Traçar as bissetrizes relativas aos ângulos internos do triângulo com o auxílio da ferramenta *definir bissetriz* ;
- Marcar o ponto de intersecção dessas bissetrizes, que é o incentro do triângulo;
- Traçar retas perpendiculares a cada um dos lados do triângulo e que contenham o ponto de intersecção das bissetrizes;
- Marcar os pontos de intersecção entre os lados dos triângulos e as perpendiculares a estes lados;
- Construir o círculo centrado no ponto de intersecção das bissetrizes de modo que tangencie os lados do triângulo, ou seja, passem pelos pés das perpendiculares obtidas anteriormente;
- Mover os vértices do triângulo e verificar a posição do ponto de intersecção das bissetrizes bem como a posição dos pontos de tangência entre o círculo e o triângulo.

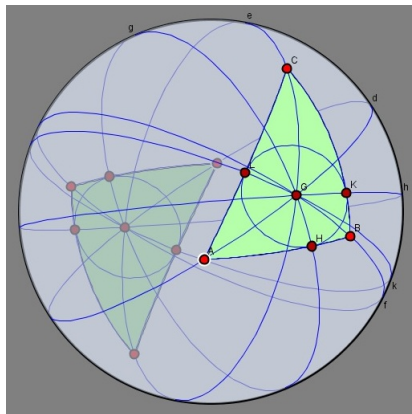


Figura 3.15: Círculo inscrito em um triângulo.

Resultados esperados – Espera-se que o aluno conjecture que é possível inscrever um círculo em um triângulo esférico e que, na Geometria Esférica, assim como acontece na Geometria Euclidiana, o ponto de intersecção das bissetrizes é o centro da circunferência inscrita no triângulo.

3.1.4 ATIVIDADE 4 - Algumas propriedades envolvendo quadriláteros.

1 – Construir um polígono com quatro lados congruentes sobre a superfície esférica.

- Trace duas retas perpendiculares;

- Trace um círculo com centro no ponto de intersecção entre essas retas;
- Marque os quatro pontos de intersecção entre o círculo e as retas;
- Trace segmentos que liguem esses pontos formando um quadrilátero convexo;
- Meça seus ângulos internos;
- Movendo os vértices do quadrilátero, o que acontece com as medidas dos seus ângulos internos?

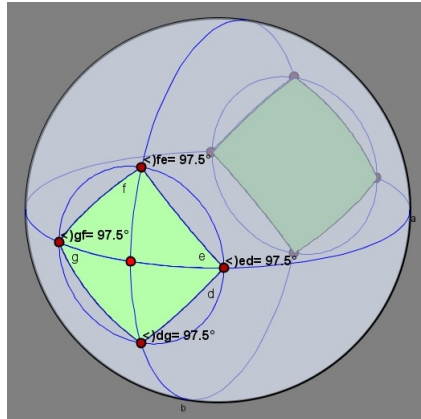


Figura 3.16: Quadrilátero com quatro lados de mesma medida.

Resultados esperados - Espera-se com esta construção que o aluno observe que sobre a superfície esférica é possível construir um quadrilátero com lados de medidas iguais mas que este, diferentemente da mesma construção no modelo plano, não possui ângulos internos retos que o caracterizaria como um quadrado, o aluno deve observar ainda que seus ângulos internos são iguais e suas medidas são variáveis aumentando ou diminuindo à medida que aumentam ou diminuem as medidas dos lados do quadrilátero. A justificativa, neste caso, deve-se ao fato de que na superfície esférica não existem segmentos paralelos impossibilitando a construção de um quadrado.

2 – É possível construir um quadrilátero com quatro ângulos retos sobre uma superfície esférica?

- Trace uma reta sobre a superfície esférica;
- Trace uma perpendicular a essa reta;
- Trace uma perpendicular à segunda reta passando por um ponto diferente do ponto de intersecção entre as duas primeiras retas traçadas;
- Trace uma perpendicular a terceira reta passando por um ponto diferente do ponto de intersecção entre a segunda e a terceira retas traçadas;

- Qual a posição relativa entre a primeira e a última reta traçadas e qual o ângulo formado entre elas? Compare este resultado com a mesma construção na Geometria Euclidiana;

- É possível construir um retângulo sobre uma superfície esférica? Justifique.

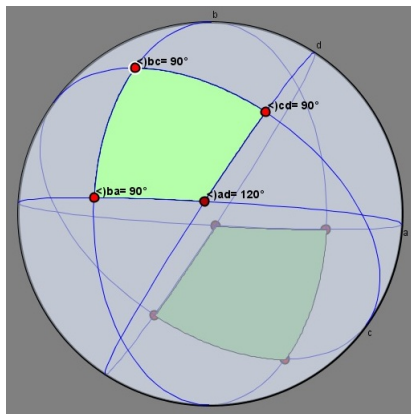


Figura 3.17: Quadrilátero esférico

Resultados esperados – Espera-se que nesta atividade o aluno conclua que, ao contrário do que ocorre na Geometria Euclidiana, a posição relativa entre a primeira e a última reta traçadas não é perpendicular e que conjecture também sobre a impossibilidade da construção de retângulos sobre uma superfície esférica atribuindo essa impossibilidade à inexistência de segmentos paralelos sobre esta superfície.

3 – Qual a soma das medidas dos ângulos internos de um quadrilátero esférico?

- Construa um quadrilátero qualquer sobre a superfície esférica;
- Meça seus ângulos internos;
- Movendo seus vértices, o que acontece com a soma das medidas dos seus ângulos internos?

Resultados esperados – O aluno deve concluir após a realização dessa atividade que a soma dos ângulos internos de um quadrilátero construído sobre a superfície esférica é maior que 360° e que essa medida é variável aumentando ou diminuindo à medida que se aumentam ou diminuem as medidas dos seus lados. A justificativa esperada para essa observação é que o aluno atribua o resultado observado ao fato de que a soma dos ângulos internos de um triângulo esférico é maior que 180° e que todo quadrilátero pode ser decomposto em dois triângulos esféricos.

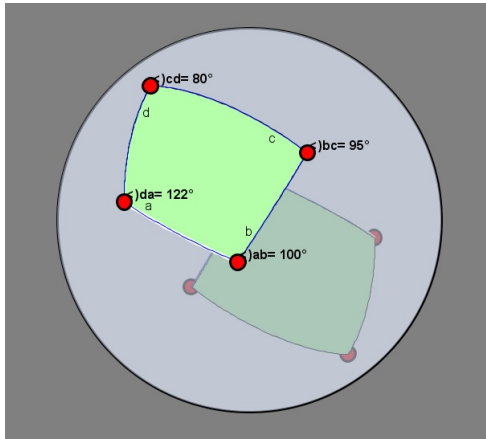


Figura 3.18: Soma dos ângulos internos de um quadrilátero esférico.

Conclusão

O estudo das geometrias não Euclidianas pode suscitar discussões sobre os fundamentos da Matemática bem como levar o estudante, ainda no ensino fundamental, a conhecer um exemplo de como se desenvolve o conhecimento matemático percebendo o caráter dinâmico dessa ciência, levando-o a inferir que a Matemática não trata de verdades absolutas e imutáveis mas que é uma ciência dinâmica e em constante evolução. Também o estudo dessas geometrias pode contribuir para a apropriação de conhecimentos em outra área, a Geografia, visto que existe estreita relação entre conceitos geográficos e de Geometria Esférica possibilitando um estudo interdisciplinar.

As atividades estão desenvolvidas de maneira progressiva e gradual levando em conta o nível de ensino em que os estudantes se encontram e o conhecimento de Geometria Euclidiana que é esperado que o aluno possua nessa fase da aprendizagem para que possam realizar as atividades propostas. Estas atividades podem ser estendidas para níveis mais ou menos desenvolvidos que o nono ano do ensino fundamental, acrescentando-se atividades ou excluindo algumas de modo a tornar adequadas à série em que se deseja aplicar a sequência de ensino.

Alguns momentos podem ser ricos em possibilidade de discussão a cerca dos dois sistemas geométricos, quando por exemplo, na verificação da inexistência de retas paralelas, a somas dos ângulos internos de um triângulo exceder 180° , duas retas perpendiculares a uma terceira se intersectarem, quando há ruptura com relação a conceitos e propriedades da geometria plana, momento em que cabe uma pausa para discussão sobre o que é válido em uma geometria e na outra e o que é válido nos dois sistemas geométricos, bem como para provocar no estudante questionamentos a cerca da aplicabilidade de cada modelo geométrico em contextos variados das atividades humanas. Por exemplo, o caso clássico da navegação marítima ou aérea, em que se deve levar em consideração a curvatura da Terra, apesar de intuitivamente imaginarmos o percurso de um navio, ou um avião, entre dois pontos como sendo uma linha reta, se observarmos com mais atenção perceberemos que seus movimentos acompanham a forma da Terra, dessa maneira suas trajetórias não são segmentos de reta euclidiano como se poderia imaginar e sim arcos de circunferência.

As discussões levantadas neste texto visam levar o aluno a compreender que existem

outras geometrias e essa discussão pode levar o aluno a compreender que cada geometria tem sua importância e aplicação a depender da situação em que precisamos utilizá-las. Entendemos que não há uma geometria mais importante que outra apenas uma que mais se ajusta a uma determinada situação em comparação com as demais e por serem expressões de muitas situações reais no nosso mundo deveriam ocupar um lugar de maior destaque no ensino. Este trabalho mostra que é possível adequar um calendário para seu ensino e prática.

Vivemos em um mundo curvo mas insistimos em pensar por linhas retas. Que tal começarmos a pensar de forma positiva quanto a se questionar e aprender esses conceitos inestimáveis para as próximas gerações. Ou vamos conviver com alunos que ainda não sabem que neste exato momento estamos sobre uma quase elipse deslizando no espaço quadridimensional onde a geometria que nos rege é curva, totalmente curva, ante as estrelas e galáxias? Este trabalho enfatiza isso também e me motiva a me envolver nesta tarefa de buscar meios de enfrentar as resistências existentes nas escolas para disseminação das geometrias não Euclidianas.

Bibliografia

- [1] ÁVILA, Geraldo. **Euclides, Geometria e Fundamentos**. RPM – Revista do Professor de Matemática, v. 45, 2001.
- [2] BARBOSA, J. L. M. **Geometria hiperbólica**. Goiânia: Editora da UFG, 2002.
- [3] BERLINGHOFF, William P.; GOUVÊA, Fernando Q. **A Matemática Através dos Tempos**. 2.ed. Trad. Elza F. Gomide e Helena Castro. São Paulo: Blucher, 2010.
- [4] BONA, Berenice de Oliveira. **Análise de Softwares Educativos para o Ensino de Matemática nos Anos iniciais do Ensino de Matemática**. Porto Alegre: Editora de UFRGS, 2009.
- [5] BOYER, Carl Benjamin. **História da Matemática**. 2. ed. Trad. Elza F. Gomide. São Paulo: Edgard Blücher, 1996.
- [6] BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática. (3o e 4o ciclos do ensino fundamental)**. Brasília: MEC, 1998. Disponível em www.portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/matematica.pdf. Acesso em 13 agosto de 2013.
- [7] COUTINHO, Lázaro. **Convite às Geometrias Não-Euclidianas**. 2. ed. Rio de Janeiro: Interciência, 2001.
- [8] EVES, Howard. **Introdução à História da Matemática**. 2. ed. Trad. Hygino H. Domingues. Campinas: Editora Unicamp, 2004.
- [9] KALLEF, Ana Maria Martensen Roland. **Tópicos em Ensino de Geometria**. Rio de Janeiro: UFF, 2008.
- [10] LÉNÁRT, I. **Non-Euclidean Adventures on the Lénárt Sphere: Activities Comparing Planar and Spherical Geometry**. Berkeley: Key Curriculum, 1996.
- [11] MOREIRA, Ana Claudia da Silva. **Geometrias Sobre a Axiomática de Hilbert**. Campinas, 2006. Disponível em: <http://www.ime.unicamp.br/eliane/ma241/trabalhos/sobhilbert.pdf>. Acesso em 25 de setembro de 2013.
- [12] PAVANELLO, R. M.; **O Abandono do Ensino de Geometria: Uma Visão Histórica**. Dissertação de Mestrado. Campinas: Unicamp, 1989.

- [13] RIBEIRO, Ricardo S.; GRAVINA, Maria Alice. **Disco de Poincaré: Uma Proposta para Explorar Geometria Hiperbólica no Geogebra**. In. Professor de Matemática Online, Rio de Janeiro: SBM, 2013.
- [14] SOARES, Adriana B.; ALVES, George de Souza. **Geometria Dinâmica: Um Estudo de Seus Recursos, Potencialidades e Limitações Através do Software Tabulae**. Disponível em < [http : //www.geogebra.im – uff.mat.br/biblioteca/WIEGeorgeAdriana.pdf](http://www.geogebra.im-uff.mat.br/biblioteca/WIEGeorgeAdriana.pdf) >. Acesso em 30 de novembro de 2013.
- [15] TENÓRIO, Robson Moreita et al. **Aprendendo pelas Raízes: Alguns Caminhos da Matemática na História**. 1. ed. Salvador: Centro Editorial e Didático da UFBA, 1995.
- [16] VAN HIELE, P., **Structure and Insight**. Orlando: Academic Press, 1986.