UNIVERSIDADE FEDERAL DO MARANHÃO
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT

JOÃO FRANCISCO EVERTON CUNHA

SEQUÊNCIAS E SÉRIES: abordagem e aplicações no ensino médio

São Luís
2014

JOÃO FRANCISCO EVERTON CUNHA

SEQUÊNCIAS E SÉRIES: abordagem e aplicações no ensino médio

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, da Universidade Federal do Maranhão, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Jos Antônio Pires F. Marão

São Luís

2014

Cunha, João Francisco Everton.

Sequências e Séries: abordagem e aplicações no ensino médio /João Francisco Everton Cunha. - São Luis, 2014.

95f.

Impresso por computador (fotocópia).

Orientador: José Antônio Pires Ferreira Marão.

Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal do Maranhão, Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, 2014.

1. Sequências 2. Séries numéricas 3. Séries harmônicas 4 Geometria fractal 5. Matemática I.Título.

CDU 517.52

JOÃO FRANCISCO EVERTON CUNHA

SEQUÊNCIAS E SÉRIES: abordagem e aplicações no ensino médio

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, da Universidade Federal do Maranhão, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Aprovado em de de 2014.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. José Antônio Pires Ferreira Marão (Orientador)

UNIVERSIDADE FEDERAL DO MARANHÃO

Prof. Dr. Felix Silva Costa

UNIVERSIDADE ESTADUAL DO MARANHÃO

Prof. Dr. Manoel Ferreira Borges Neto

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE SÃO PAULO

Aos meus pais Maria Ribamar Everton Cunha e João Pinheiro Cunha, à minha esposa Luana Gabriela e aos meus irmãos e irmãs.

AGRADECIMENTOS

A Deus em primeiro lugar.

À minha mãe, Maria Ribamar Everton Cunha e ao meu pai João Pinheiro Cunha, pelo constante e incondicional apoio desde os primeiros anos de estudo.

À Luana Gabriela dos Santos Galvão, fiel e incondicional companheira em todos os momentos, pelo amor, apoio e paciência em minhas ausências.

Aos meus irmãos e irmãs, pela motivação de sempre.

A todos os colegas do PROFMAT 2012, em especial Evanilson Santos Silva e Walter Reis, companheiros em todas as etapas do programa.

À Sociedade Brasileira de Matemática - SBM e ao IMPA pelo desenvolvimento e condução do PROFMAT.

À Universidade Federal do Maranhão - UFMA, por aderir ao programa nacional.

Aos professores do PROFMAT, em especial ao Prof. Dr. José Antônio Pires Ferreira Marão, pela paciência, orientação e disponibilidade constante.

"Não há ramo da Matemática, por mais abstrato que seja, que não possa um dia vir a ser aplicado aos fenômenos do mundo real".

Lobachevsky

RESUMO

Trata-se de uma proposta de abordagem de sequências e séries para o e ensino médio, em que procurou-se expor o tema de forma contextualizada e objetiva, realizando-se sempre que conveniente e possível, as interpretações geométricas dos elementos matemáticos. Inicialmente faz uma abordagem histórica visando mostrar como o assunto esteve presente e foi útil às diversas sociedades e mostrar os matemáticos que obtiveram notoriedade em seus trabalhos. Além dos assuntos de costume, como *progressão aitmética* e *progressão gométrica*, traz-se a definição de limite de sequência, a definição de série numérica e utiliza-se a série harmônica para mostrar que o fato do termo geral de uma série convergir para zero não é condição suficiente para a convergência da mesma. Por fim, estuda-se o *floco de neve Koch*, o *triângulo de Sierpinski* e *problemas de matemática financeira* como aplicações de sequências e séries, sem necessariamente precisar definir termos ou expressões específicas e assim mostrar que o tema está presente em diversas situações do cotidiano

Palavras-chaves: sequências. Séries numéricas. Série harmônica. Geometria fractal. Matemática financeira.

ABSTRACT

This is a proposed approach sequences and series for middle school , which sought to expose the subject in context and objective manner , to perform whenever appropriate and possible , the geometrical interpretations of mathematical elements . Initially, a historical approach aiming to show how the subject was present and helpful to the various societies and show the mathematicians who had a reputation in his work . Besides the usual subjects like *arithmetic progression* and *geometric progression* , brings up the definition of limit of sequence, the definition of numerical series and we use the harmonic series to show that the fact that the general term of a series does not converge to zero is sufficient for the convergence of the same condition . Finally , we study the *Koch snowflake* , the *Sierpinski triangle* and *problems of financial mathematics* and applications of sequences and series , without necessarily defining specific terms or expressions and thus show that the issue is present in many everyday situations .

Keywords: sequences. Series numeric. Harmonic series. Fractal geometry. Mathematical finance.

Lista de Figuras

Lista de Tabelas

Sumário

1 INTRODUÇÃO

Tradicionalmente, os alunos do *ensino médio* têm o primeiro contato com o estudo de sequências a partir da segunda série desse nível de ensino. Mas, é possível encontrar autores (Exemplo, SOUZA (2011) e IEZZI (2010)) que, inclusive têm reservado espaço para esse assunto já nos livros indicados à primeira série, o que demonstra a percepção de que o assunto é bem acessível ao público e pode ser introduzido desde a sua série inicial.

A abordagem e a definição de sequência são geralmente feitas de modo bem sucinto, buscando introduzir os dois tópicos de maior interesse, que são, *progressão aritmética (PA)* e *progressões geométricas (PG)*, aos quais os autores e professores costumam dispensar maior atenção. Ocorre que, além da abordagem se limitar basicamente a estes dois tipos de sequências, muitos dedicam-se a procurar as diversas relações (algébricas) existentes entre seus termos e na exploração de casos particulares. Dispensam pouca atenção aos fatos históricos e aos problemas relacionados com a contextualização e a interdisciplinaridade, o que não estimula o raciocínio, pode prejudicar o entendimento do aluno e não o encaminha a conhecer a vastidão de aplicações em que o tema pode ser útil. Nesse sentido, entende-se que o professor de matemática deve estar atento ao que explorar e como explorar no processo de ensino e aprendizagem de sequências. Essa preocupação também é demonstrada por LIMA et. Al (2006),

> Não encha a cabeça de seus alunos com casos particulares desnecessários. Isso só serve para obscurecer as ideias gerais e acaba dificultando as coisas. Saber que, numa progressão aritmética, cada termo é a média aritmética entre o seu antecedente e o seu consequente não só não substitui, ou pelo menos não substitui de modo eficiente, o conhecimento de que uma progressão aritmética é uma sequência na qual a diferença entre cada termo e o termo anterior é constante, como é uma consequência imediata disso (LIMA, 2006. p. 40).

Ou ainda,

> Problemas em que são dados a soma do 24º com o 47º e é pedida a diferença entre o 36º e o 11º não aparecem na vida real, não são interessantes e não desenvolvem o raciocínio (LIMA, 2006, p. 42).

Percebe-se uma intenção em orientar os professores de matemática quanto ao método de exploração do assunto. Neste ponto, não é possível concluir que o tema é sempre explorado da forma apresentada acima, é provável que encontremos na maioria dos textos um ou outro exemplo relacionado à geometria ou outras ciências, mas é pouco provável que existam notas históricas, informações relacionadas à origem do problema ou a que outra área da Matemática ou das ciências está relacionado, ou seja, problemas desse tipo não estabelecem uma ideia de aplicação das sequências, parecem que foram criados propositalmente pelo autor ou pelo professor somente para ilustrar numericamente o que pedem, o que é convergente com o que pensa SANTOS (2013),

> Muitos alunos do ensino médio pensam que os conteúdos de matemática somente enfatizam um grande número de formulas sem sentido, com cálculos intermináveis e sem relação com o mundo real. Infelizmente na grande maioria das escolas o ensino das progressões não é construído junto com os alunos, mas simplesmente passado para eles, nota-se também que esses conceitos não são abordados a partir da historia e não têm ligação com a realidade dos mesmos (SANTOS, 2013. p. 4).

Para o documento Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio - PCN+ (2002),

> No ensino médio, etapa final da escolaridade básica, a matemática deve ser compreendida como uma parcela do conhecimento humano essencial para a formação de todos os jovens, que contribui para a construção de uma visão de mundo, para ler e interpretar a realidade e para desenvolver capacidades que deles serão exigidas ao longo da vida social e profissional.
>
> Nessa etapa da escolaridade, portanto, a matemática vai além de seu caráter instrumental, colocando-se como ciência com características próprias de investigação e de linguagem e com papel integrador importante junto às demais ciências da natureza. Enquanto ciência, sua dimensão histórica e sua estreita relação com a sociedade e a cultura em diferentes épocas ampliam e aprofundam o espaço de conhecimentos não só nesta disciplina, mas nas suas inter-relações com outras áreas do saber $(\cdots)$.
>
> $(\cdots)$ Aprender matemática de uma forma contextualizada, integrada e relacionada a outros conhecimentos traz em si o desenvolvimento de competências e habilidades que são essencialmente formadoras, à medida que instrumentalizam e estruturam o pensamento do aluno, capacitando-o para compreender e interpretar situações para se apropriar de linguagens específicas, argumentar, analisar e avaliar, tirar conclusões próprias, tomar decisões, generalizar e para muitas outras ações necessárias à sua formação (BRASIL, 2002. p. 111).

Isto direciona ao objetivo deste texto, que é o de abordar o estudo de sequências de forma contextualizada e interdisciplinar, explorando o assunto através de problemas de outras áreas da Matemática ou de outras ciências, mas também atenta ao rigor das definições e demonstrações. Os campos de aplicação são vastos, na *matemática financeira*, na *geografia*, *economia* e nas *geometrias (euclidianas e não euclidianas).* Nesse sentido, procurou-se, além de demonstrar a vasta utilidade e variedade de aplicações, buscar o entendimento fundamental que se insere em cada tipo de sequência ou no problema a ser resolvido. Para tanto, quando conveniente, cada tópico foi iniciado com um problema introdutório, que possibilita o leitor a relacioná-lo com algo que conheça ou perceba em sua realidade, com isto espera-se estimular o desenvolvimento da noção intuitiva dos elementos matemáticos, para então as definições, proposições e aplicações serem enunciadas e resolvidas, respectivamente. Quanto a estas, busca-se relacionar a cada problema resolvido os elementos e definições de sequências que estão sendo utilizados.

Nesta abordagem, o tema foi organizado da seguinte forma: Inicia-se com uma abordagem histórica, definem-se sequências, progressão aritmética, progressão geométrica, limite de sequência e séries. Em cada seção traz-se, quando conveniente, interpretações geométricas e aplicações imediatas da definição. Posteriormente, abordam-se elementos da *geometria fractal* e *problemas de matemática financeira* como aplicações de sequências e séries.

Em progressões aritméticas faz-se, além da demonstração algébrica, uma visualização da soma dos n primeiros números naturais utilizando números triangulares, enquanto que na progressão geométrica foi feita uma aplicação imediata da definição em um problema de crescimento populacional relacionado com déficit habitacional no Brasil. Já no enfoque de séries numéricas, foram utilizadas a visualização e a interpretação da convergência de duas séries geométricas, uma utilizando retângulos e a outra utilizando triângulos isósceles. Além disso, foram utilizadas, as definições de limite de sequência e de serie convergente para resolver um *problema de geometria euclidiana* e a *série harmônica* a fim de mostrar que uma série pode ser divergente quando o seu termo geral tende para zero.

Por fim, nos últimos capítulos utilizou-se frequentemente as definições, proposições e resultados obtidos nos capítulos anteriores, em especial as progressões geométricas, na interpretação de cada um dos fractais estudados. Nos problemas de matemática financeira, associou-se o conceito de taxa de crescimento a taxa de juros para resolvê-los apenas com elementos de PG, sem precisar recorrer definições próprias ou outras fórmulas matemáticas.

2 SEQUÊNCIAS E SÉRIES: ABORDAGEM HISTÓRICA

Com os relatos históricos que se seguem, pretende-se enfatizar como o tema esteve presente nas sociedades e como foi útil ao homem ao longo do tempo. Não se tem a pretensão de citar todos os fatos em rigorosa sequência cronológica de desenvolvimento do assunto, isto por que fatalmente seriam esquecidos alguns matemáticos que deram suas contribuições ao tema em questão. Dessa forma, buscou-se relacionar as passagens que são convergentes à maioria dos autores de textos sobre a história da matemática ou mais especificamente sobre a história das sequências. Para tanto, fundamentamos este capítulo tomando como principal referência BOYER (1996).

Como será visto, a ideia de sequências está intimamente ligada ao processo de contagem e ao desenvolvimento dos sistemas de numeração. Devido a esse fato, o padrão de sequências é encontrado em diversos documentos matemáticos desde as civilizações antigas até a matemática mais atual, conforme a seguir.

1. **As enchentes do Nilo**

   O primeiro registro se deu, segundo DA COSTA por volta de 3.000 a.c, no Egito. O povo daquela região, dentre outras necessidades, precisava solucionar um problema que vinha enfrentando com frequência, as inundações do rio Nilo, e por esse motivo necessitava estabelecer um padrão para essas enchentes, ou seja, descobrir como e quando elas iriam acontecer, pois precisavam plantar na época certa e ter a colheita suficiente para o seu sustento. Segundo suas observações, as inundações se davam pouco depois da estrela conhecida como Sirus, a leste, pouco antes do sol. Os egípcios começaram a perceber que as inundações eram separadas por um período de 365 dias e a partir daí elaboraram um calendário solar, de acordo com as inundações, composto por doze meses de trinta dias cada um e mais cinco dias de festa.

   O estabelecimento desse padrão e consequentemente a criação do calendário estabelecem uma ideia de sequência.

2. **As tabelas babilônicas**

   A Babilônia antiga revelou várias contribuições matemáticas importantes e que foram registrados através de *tabelas*. Os registros eram produzidos através da técnica conhecida como *escrita cuneiforme*. A escrita era incisa em tabletas de barro mole com um estilete, e as tabelas eram então cozidas ao sol ou em fornos. Esse tipo de escrita ficou conhecido como *cuneiforme* devido às marcações e sinais serem realizados em forma de cunha (deriva da palavra latina *cuneus*).

A mais importante tabela dessa época é a *tabela Plimpton* 322 (1900 a 1600 a.c aproximadamente), que recebe esse nome devido ao número de seu registro na Plimpton Colletion na Collumbia University. Segundo BOYER (1996, p. 25), há em outras tabelas babilônicas muitas coisas interessantes, embora não tão extraordinárias quanto às da *tabela Plimpton* 322. Encontraram-se tabelas contendo potências sucessivas de um dado número, semelhante às nossas tabelas logarítmicas, em outra menos importante que a Plimpton 322 é dada a soma

$$1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^9$$

que na verdade é a soma dos termos de uma progressão geométrica, cujo primeiro termo é 1 e a razão é 2. Em outra tabela é achada a soma de quadrados

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + 10^2.$$

Figura 2.1: *Tabela Plimpton 322*

Fonte: *http://pt.wikipedia.org/wiki/Plimpton_322*

3. O papiro de Rhind

Outro registro na antiguidade foi comprovado através de um papiro contendo problemas matemáticos, datado de 1650 a.c que, de acordo com BOYER (1996, p. 8), foi comprado em 1858 numa cidade à beira do Nilo, por um antiquário escocês, de nome Henry Hhind e que por esse motivo o documento é conhecido como o *papiro de Hhind*. O rolo do papiro possui aproximadamente $0,3m$ de altura e $5m$ de comprimento e está sob a guarda do British Museum, na Inglaterra (com excessão de alguns fragmentos que estão no Brooklin Museum). Além de ser um dos primeiros documentos históricos de caráter matemático que se tem notícia, para muitos este é o principal documento matemático deixado pelos egípcios.

Ainda segundo BOYER (1996, p. 8), o escriba Ahmes, que copiou o papiro em 1650 a.c, relata no documento que o mesmo provém de um protótipo que ele acreditava ser de 2000 a 1800 a.c. O famoso papiro também é conhecido como o Papiro de Ahmes, em homenagem ao escriba.

Dentre outros, o papiro de Rhind traz alguns problemas envolvendo sequências. O problema 79, por exemplo, trata de uma sequência e está apresentado da seguinte forma:

"Sete casas, 49 gatos, 343 ratos, 2401 espigas de trigo e 16.807 hecates".

Presume-se que o escriba está se referindo a um problema já muito conhecido, em que supõe-se a existência de sete casas, cada uma contendo sete gatos, cada um destes come sete ratos, cada um dos quais havia comido sete espigas, cada uma delas teria produzido sete medidas de grãos. O problema evidentemente não pedia uma resposta prática, que seria o numero de medidas de grãos poupadas, mas a não-prática soma dos números de casas, gatos, ratos, espigas e medidas de grão. O importante, neste caso, é entender que os termos elencados no papiro formam uma sequência finita cujo termo geral é $a_n = 7^n$, ou seja, $(a_n) = (7, 49, 343, 2401, 16807)$.

Figura 2.2: *Parte do papiro de Rhind*

Fonte: *http://www.matematica.br/historia/prhind.html*

4. Os Pitagóricos e os números figurativos (ou figurados)

A Escola Pitagórica também produziu sua contribuição segundo Boyer (1996, p. 37) os pitagóricos (600 a 450 a.c) demonstravam grande interesse pelo estudo dos números, o que é comprovado pela sua preocupação com os *números figurativos* (ou *figurados*). Oliveira (2011, p. 15) destaca que, ″os números figurados são números que podem ser representados por uma construção geométrica de pontos equidistantes″.

Abaixo segue a representação geométrica de duas classes desses números, os *números triangulares* e os *números quadrangulares*.

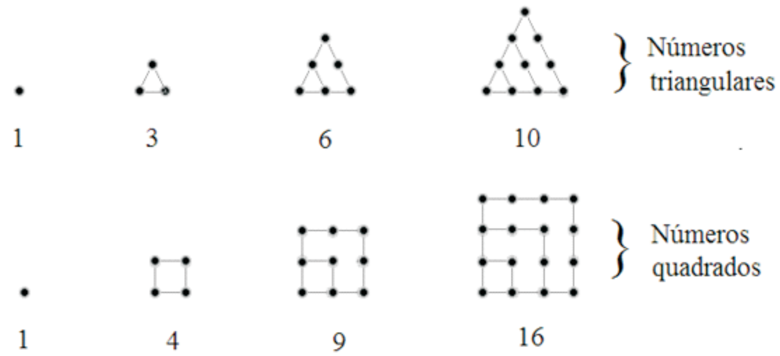

Figura 2.3: *Números figurados ou números pitagóricos*

Fonte: *http://phylos.net/matematica/grecia-antiga/♯biblio*

- Os números triangulares são obtidos através da soma

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}\cdot$$

- Os números quadrados sucessivos são obtidos pela soma

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1) = n^2.$$

Nota-se que, no primeiro caso, os números são obtidos através da soma dos termos da sequência formada pelos n primeiros números inteiros positivos. No segundo caso, trata-se da soma dos termos da sequência formada pelos n primeiros números impares positivos.

5. Paradoxos de Zeno

Zeno ou Zenão de Eleia teria nascido na cidade de Eleia por volta de 489 a.c, escreveu um livro com 40 paradoxos, dos quais quatro sobre movimento (que se referem ao contínuo e ao infinito) foram de maior relevância para a matemática. O conhecimento dos paradoxos se deu principalmente através de Aristóteles, que os descreveu como *Dicotomia, Aquiles, Flecha* e *Estádio*. Ambos se reportam à soma de um número infinito de termos positivos a um número finito, o qual é a essência da convergência de uma série infinita de números. Segue um trecho sobre o primeiro deles (*Dicotomia*):

> $(\cdots)$ Antes que um objeto possa percorrer uma distância dada, deve percorrer a primeira metade dessa distância; mas antes disso deve percorrer o primeiro quarto; e antes disso o primeiro oitavo e assim por diante, através de uma infinidade de subdivisões (BOYER, 1996. p. 51).

6. **Euclides de Alexandria**

Com a morte do Imperador Alexandre, o Grande, em 323 a.c o seu império foi dividido entre seus generais, ficando o Egito sob o comando de Ptolomeu. Por volta de 306 a.c, com a cidade de Alexandria já concretizada, Ptolomeu I funda uma escola ou instituto conhecido como Museu, que foi a maior de seu tempo. Para professores ele chamou um grupo de sábios de primeira linha, dentre eles estava Euclides, o autor de *Os elementos*, que para *BOYER* (1996, p. 69) *é o texto matemático mais bem sucedido de todos os tempos* . Sobre a vida de Euclides sabe-se muito pouco, nem mesmo se sabe certamente onde ele teria nascido e ao longo da história ficou conhecido apenas como Euclides de Alexandria, porque foi chamado para lá para ensinar matemática. *Os elementos* estão divididos em treze livros ou capítulos, dos quais os seis primeiros são sobre geometria plana elementar, os três seguintes sobre teoria dos números, o Livro X sobre comensuráveis e os três últimos versam principalmente sobre geometria no espaço. Dentre outras abordagens sobre sequências em *Os elementos*, destacam-se os livros VIII e IX.

O livro VIII começa com proposições sobre números em proporção continuada (progressão geométrica) e versa também sobre propriedades simples de quadrados e cubos. Já no livro IX encontram-se, dentre outros, teoremas e proposições sobre números primos e números perfeitos. A proposição 35 deste livro contém uma formula para a soma de números em progressão geométrica, expressa em termos elegantes, mas pouco usuais em nossa época:

> ″Se tantos números quantos quisermos estão em proporção continuada, e se subtrairmos do segundo e último números iguais ao primeiro, então assim como o excesso do segundo está para o primeiro, o excesso do último estará para todos aqueles que o precedem″.

Esse enunciado é equivalente à expressão

$$\frac{a_{n+1} - a_1}{a_1 + a_2 + \cdots + a_n} = \frac{a_2 - a_1}{a_1},$$

que se equivale a

$$S_n = \frac{a_1(1 - q^n)}{1 - q}.$$

A proposição seguinte, a última do livro IX, é a formula bem conhecida atualmente para números perfeitos:

> ″Se tantos números quantos quisermos, começando com a unidade, forem colocados em dupla proporção até que a soma de todos seja um primo, e se a soma for multiplicada pelo último, o produto será perfeito″.

Em notação atual, isto significa que se,

$$S_n = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^{n-1} = 2^n - 1$$

é um número primo, então

$$2^{n-1}(2^n - 1)$$

é um número perfeito.

Vale lembrar que, quando as proposições se referem a número, neste caso, deve-se entender como números naturais, ou inteiros positivos.

Os elementos de Euclides alcançou resultados jamais vistos para um texto matemático e não só constituem a mais antiga obra matemática grega importante e a chegar até os dias atuais, mas o texto mais influente de todos os tempos. Foi composto em 300 a.c, aproximadamente, e foi copiado e recopiado repetidamente depois. A primeira versão impressa de *Os elementos* apareceu em Veneza em 1482, um dos primeiros livros de matemática impressos. BOYER (1996, p. 82) afirma que desde sua publicação, pelo menos dez mil edições foram publicadas e talvez nenhum livro, além da Bíblia, possa se gabar de tantas publicações. Abaixo a imagem da capa da primeira publicação em inglês de *Os elementos*.

Figura 2.4: *Capa da primeira edição em inglês de os elementos*
Fonte: *http://www.rpm.org.br/conheca/45/1/euclides.htm*

Outro grande matemático que deixou a sua contribuição ao estudo de sequências e séries foi *Arquimedes* (287 - 212 a.c), nascido em Siracusa (atual Itália) é por muitos considerado o maior matemático da antiguidade e um dos maiores de todos os tempos. Sua contribuição aparece nos trabalhos que se ocupavam principalmente do chamado método da exaustão. O tratado mais popular era o da *quadratura da parábola*, em que *Arquimedes* conseguiu, através do método da exaustão, resolver o problema de quadrar uma seção cônica, tendo provado que a área K de um segmento parabólico é quatro terços da área de um triângulo T tendo a mesma base e mesma altura.

Através desse processo ele pôde concluir que a área K do segmento parabólico é dada pela soma da série infinita

$$T + \frac{T}{4} + \frac{T}{4^2} + \cdots + \frac{T}{4^n} + \cdots = \frac{4}{3}T.$$

Deve-se lembrar que o termo *"método da exaustão"* não era usado pelos gregos antigos, sendo na verdade uma adaptação da modernidade. Além disso, cabe ressaltar que Arquimedes não usou em seus trabalhos a expressão *"soma de serie infinita"*, pois processos infinitos não eram bem aceitos em seu tempo.

Alguns séculos depois de Arquimedes, já na Idade Média (ou Medieval) mais precisamente no século doze, a India produziu muitos matemáticos, o mais importante deles foi Bhaskara (1114 - 1185). Segundo notas de BOYER, *"foi o mais importante matemático do século doze"*. Em um de seus tratados, *O*

Lilavati, contém diversos problemas sobre os tópicos favoritos dos hindus: equações lineares e quadráticas, mensuração, progressões aritmética e geométrica, entre outros. Bhaskara morreu pelo fim do século doze, e por vários séculos houve poucos matemáticos de importância comparável na India.

No século treze, na China, viveu um matemático chamado Yang Hui (1238 - 1298), cuja obra inclui resultados quanto à soma de séries e o chamado triângulo de Pascal, que na China ficou conhecido através da obra *espelho precioso*. Segundo BOYER (1996, p. 139) esta obra é atribuída ao matemático Chu Shin-Chieh (1280-1303), último e maior matemático da idade áurea da matemática chinesa.

$$\begin{aligned} 1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2 &= n(n+1)\frac{(2n+1)}{3!} \\ &\text{e} \\ 1+8+30+80+\cdots+n^2(n+1)\frac{(n+2)}{3!} &= n(n+1)(n+3)\frac{(4n+1)}{5!}\cdot \end{aligned}$$

As sequências também apareceram na obra de Leonardo de Pisa (1180 - 1250), mais conhecido como Fibonacci (filho de Bonnaccio). Em BOYER (1996, p. 173 - 175), encontra-se que Fibonacci escreveu um livro denominado *Liber Abaci* (ou livro do ábaco), onde utiliza e recomenda os numerais indo-arábicos, trata o zero como um número e usa com bastante frequência a barra horizontal para indicar frações. No livro aparece, dentre outros assuntos, alguns problemas. Entre esses acha-se um semelhante no papiro de Ahmes. Outro que aparece e é provavelmente o mais conhecido é:

> ″Quantos pares de coelhos serão produzidos num ano, começando com um só par, se em cada mês cada para gerar um novo par que se torna produtivo a partir do segundo mês″?

Esse problema deu origem à ″sequência de Fibonacci″

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \ldots, u_n, \ldots$$

onde $u_n = u_{n-1} + u_{n-2}$, ou seja, em que cada termo a partir do terceiro é igual à soma dos dois imediatamente precedentes. Essa sequência apresenta diversas características interessantes. Por exemplo, é possível provar que dois termos sucessivos são primos entre si e que $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_{n-1}}{u_n}$ é a razão da secção áurea $\dfrac{(\sqrt{5}-1)}{2}\cdot$

Na Inglaterra, no século quatorze, um lógico chamado Richard Suiseth, que viveu na época de 1350, mais conhecido como Calculator, resolveu o seguinte problema:

Figura 2.5: *Leonardo de Pisa (Fibonacci)*

Fonte: *http://en.wikipedia.org/wiki/Fibonacci*

> Se durante a primeira metade de um tempo dado, uma variação contínua com uma certa intensidade, durante a quarta parte seguinte do intervalo continua com o dobro da intensidade, durante a oitava parte seguinte com o triplo da intensidade e assim *ad infinitum*; então a intensidade média para o intervalo todo será a intensidade de variação durante o segundo subintervalo (ou o dobro da intensidade inicial) (BOYER, 1996. p. 182).

Isso equivale a dizer que a soma da série infinita

$$\frac{1}{2}+\frac{2}{4}+\frac{3}{8}+\cdots+\frac{n}{2^n}+\cdots+\cdots$$

é 2. Convém lembrar que foi o parisiense Nicole Oresme (1325 - 1382), usando o seu processo gráfico, que conseguiu provar mais facilmente a proposição. Além dessa, Oresme deu outras contribuições às séries infinitas, entre elas conseguiu provar que a série harmônica

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots$$

é divergente.

Na primeira metade do século dezesseis houve outra contribuição para as sequências e progressões. O mundo viu surgir significativa quantidade de algebristas na Alemanha, a mais importante obra foi produzida em 1544 por Michael Stifel (cerca de 1487 - 1567), intitulada *aritmética integra*. A obra inclui o triângulo de pascal, radicais, potências e dá um tratamento aos números negativos, além de relações envolvendo progressões aritméticas e geométricas.

Em 1667 o matemático escocês James Gregory (1638 - 1675) publicou uma obra intitulada *vera circuli et hyperbolae quadratura*, contendo resultados muito significativos sobre análise infinitesimal. Nesta obra Gregory estendeu o algoritmo de Arquimedes à quadratura de elipses e hipérboles. Tomou um triângulo inscrito de área a_0 e um quadrilátero circunscrito de área A_0; duplicando sucessivamente o número de lados dessas figuras ele formava a sequência $a_0, A_0, a_1, A_1, a_2, A_2, a_3, A_3, \ldots$ e mostrava que que a_n é a média geométrica dos dois termos imediatamente precedentes e A_n a média harmônica dos dois termos precedentes. Assim ele tinha duas sequências, a das áreas inscritas e a das áreas circunscritas, ambas convergindo para a área da cônica. O termo "convergir" foi usado nesse sentido pela primeira vez, por Gregory.

Em BOYER (1996, p. 265) encontramos sobre Gregory,

> $(\cdots)$ Tinha descoberto independentemente do teorema binomial para potências fracionárias, resultado conhecido antes por Newton (mas ainda não publicado) e tinha descoberto a série de Taylor, por um processo equivalente ao de diferenciação sucessiva, mais de quarenta anos antes de Taylor publicá-la. $(\cdots)$

Ele também obteve a série de potências para a função arctg(x)

$$\int_0^x \frac{dx}{1+x^2} = arctg(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots$$

Esse resultado é conhecido como "série de Gregory".

Outro matemático que realizou grandes contribuições ao tema foi Isaac Newton (1642 - 1727). Nascido no natal de 1642, ano da morte de Galileu, é sempre lembrado como um dos maiores matemáticos de todos os tempos. Newton realizou diversos trabalhos com séries, mas a maior expressão (para a matemática) atribuída a ele foi a criação do Cálculo. Newton foi sucessor de Jonh Wallis (1616-1703) e de Isaac Barrow (1630-1677), matemáticos que trabalhavam com o infinito e cujas obras já apresentavam alguns resultados relativos aos processos hoje conhecidos como derivação e integração (FONSECA, 2012. p. 37).

Dentre os trabalhos de Newton, destacam-se a formulação do teorema binomial e as séries infinitas. Sobre o teorema Binomial, sabe-se por BOYER (1996, p. 270-272) que foi descoberto entre 1664 e 1665, foi descrito em duas cartas de 1676 de Newton ao secretário da Real Society, e publicado por Wallis (com crédito a Newton) na *álgebra* de Wallis, de 1685. O próprio Newton nunca publicou o teorema tinomial, nem o provou; mas redigiu e finalmente publicou várias exposições de sua *análise infinita* . A primeira dessas, cronologicamente, foi a *De analysi per aequationes numero terminorum infinitas*, composta em 1669. Nela escreveu:

> E tudo que a análise comum [isto é, a álgebra] executa por meio de equações com número finito de termos (desde que possa ser feito) esse novo método sempre pode executar por meio de equações infinitas. Por isso não hesitei em dar a isso o nome de ánálise também. Pois os raciocínios aqui não são menos certos que na outra; nem as equações, menos exatas; embora nós mortais cujos poderes de raciocínio estão restritos a limites estreitos, não possamos nem exprimir nem conceber todos os termos dessas equações de modo a saber exatamente delas as quantidades que queremos. Para concluir, podemos merecidamente considerar como pertencente às áreas e comprimentos etc. das curvas podem ser exata e geometricamente determinados.

A *De analysi* de Newton revela-se importante pois, além de apresentar o seu trabalho sobre processos infinitos (séries infinitas), constitui a primeira exposição da principal descoberta matemática de Newton, o cálculo.

Há que destacar a importância dos trabalhos deste matemático em ″séries″, pois depois dele o demais matemáticos foram encorajados a enfrentar processos infinitos, que eram temidos e rejeitados pelos gregos, e com Newton o assunto passou a ser matemática legítima.

Frequentemente lembrado como o outro inventor do cálculo, o alemão Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) nascido em Leipzig, assim como Newton realizou diversos trabalhos sobre séries infinitas. Em 1676 o matemático Huygens lhe propôs o problema de achar a soma dos recíprocos dos números triangulares, isto é, $\frac{2}{n(n+1)}$. Engenhosamente ele escreveu cada termo como a soma de duas frações, usando

$$\frac{2}{n(n+1)} = 2\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right),$$

de onde se conclui que a soma da série infinita é 2 (BOYER, 1996. p. 276).

Com a descoberta do cálculo, alguns matemáticos se interessaram em conhecer, entender e transmitir o novo assunto. Dentre os discípulos de Leibniz cabe citar dois irmãos suíços, Jaques Bernoulli (1654 - 1705) e Jean Bernoulli (1667 - 1748). Estes eram integrantes da família que mais produziu matemáticos célebres que se tem notícia. Segundo BOYER (1996, p. 286) essa família produziu cerca de uma dúzia de membros com destaque na matemática e na física.

Desses membros, destaca-se o que primeiro alcançou proeminência na matemática, Jacques Bernoulli. Ele se interessou, dentre outros temas, por séries infinitas, e em seu primeiro artigo sobre o assunto em 1689 ele apresentou a bem conhecida *"desigualdade de Bernoulli"*, $(1+x)^n > 1+nx$, onde x é real, $x > -1$, $x \neq 0$ e n é um inteiro maior que um. A ele é frequentemente atribuída a demonstração de que a série harmônica é divergente, pois a maior parte das pessoas não conhecia as provas mais antigas de Oresme e Mengoli. Na verdade, Jaques Bernoulli acreditava que seu irmão fora o primeiro a observar a divergência da série harmônica. Jaques Bernoulli ficou fascinado pela série dos recíprocos dos números figurados e embora soubesse que a série dos recíprocos dos quadrados perfeitos é convergente, não conseguiu achar sua soma. Como os termos de

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} + \cdots$$

são, termo a termo, menores ou iguais aos de

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \cdots + \frac{1}{n(n-1)} + \cdots$$

e sabe-se que esta última série converge para 2, era claro para Bernoulli que a primeira era convergente (BOYER, 1996. p. 287).

Outros dois matemáticos sempre lembrados, quando o assunto é *séries*, são Colin Maclaurin (1698 - 1746) e Brook Taylor (1683 - 1731). Um dos feitos do primeiro, a chamada série de Maclaurin, que aparece em sua obra *Treatise of Fluxions* de 1742 é apenas um caso especial da chamada *Série de Taylor*, que foi pulicada por Taylor em 1715 na obra *Methodus incrementorum et inversa.* Taylor graduou-se em Cambridge e era um entusiasmado admirador de Newton e secretário da Royal Society. Seu nome é lembrado quase exclusivamente em conexão com a série

$$\underbrace{f(x+a) = f(a) + f'(a)x + f''(a)\frac{x^2}{2!} + f'''(a)\frac{x^3}{3!} + \cdots + f^{(n)}(a)\frac{x^n}{n!} + \cdots}_{\text{Equação 1: série de Taylor}}$$

que apareceu em sua obra *methodus incrementorum.* Essa série se familiariza com a Série de Maclaurin substituindo a por zero (BOYER, 1996. p. 296).

$$\underbrace{f(x+0) = f(0) + f'(0)x + f''(0)\frac{x^2}{2!} + f'''(0)\frac{x^3}{3!} + \cdots + f^{(n)}(0)\frac{x^n}{n!} + \cdots}_{\text{Equação 2: série de Maclauren}}$$

Leonard Euller (1707 - 1783), matemático nascido na Basileia - Suiça, no primeiro volume de sua obra *Introductio (1748)* escreve sobre processos infinitos - produtos infinitos e frações contínuas, bem como inúmeras séries infinitas.

Um resultado encontrado por Euller guarda uma história bastante interessante, trata-se da somação dos recíprocos dos quadrados dos inteiros: $\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\cdots$ Em 1673 Leibniz teria sido questionado sobre a série, mas não de resposta. Em 1689 Jaques Bernoulli confessou sua incapacidade em achar a soma. Em 1736 Euller achou a resposta,

$$\frac{\pi^2}{6}=\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\cdots$$

Euller é considerado um dos maiores matemáticos de todos os tempos,

> $(\cdots)$ publicou mais de 500 artigos durante sua vida. Por quase meio século de sua morte obras de Euller continuavam a aparecer nas publicações da Academia de S. Petesburgo. Uma lista bibliográfica da obras de Euller, inclusive itens póstumos, contém 886 itens; e avalia-se que a coleção de suas obras, que está sendo publicada sob os auspícios da Suiça, chegará a perto de setenta e cinco volumes substanciais. Sua pesquisa matemática chegava em média a 800 páginas por ano durante toda a sua vida; nenhum matemático jamais superou a produção desse homem (BOYER, 1996. p. 304)

Mais do que qualquer outro período, o século dezenove merece ser considerado a Idade de Ouro da Matemática. Seu crescimento durante estes cem anos é de longe maior que a soma total da produtividade em todas as épocas precedentes. O matemático mais importante que viveu nessa época foi o alemão Carl Friedrich Gauss (1777 - 1855), cuja genialidade se manifestou precocemente. Uma história muito curiosa que é contata sobre a sua infância, mais exatamente quando tinha 10 anos, ilustra tal precocidade:

Um dia, para ocupar a classe, o professor mandou que os alunos somassem todos os números de um a cem, com orientações para que cada um colocasse sua resposta sobre a mesa logo que completasse a tarefa. Quase imediatamente, Gauss colocou sua ardósia sobre a mesa dizendo. Aí está! O professor olhou-o com desdém enquanto os outros trabalhavam intensamente. Quando o instrutor finalmente olhou os resultados, a ardósia de Gauss era a única com a resposta 5050, sem outro cálculo (BOYER, 1996. p. 343).

O menino Gauss, evidentemente, calculou a soma dos termos da progressão aritmética $(1, 2, 3, 4, 5, \cdots, 99, 100)$, ou seja, $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \cdots + 99 + 100$, presumivelmente pela formula

$$\frac{n(n+1)}{2}.$$

Dentre outras contribuições, deve-se a Gauss outra descoberta brilhante. Em 1796, pouco antes de completar 19 anos, mostrou que era possível construir, com régua e compasso, o polígono regular de dezessete lados. Outras contribuições de Gauss foram: O método dos mínimos quadrados, a prova da lei da reciprocidade quadrática na teoria dos números e o *Teorema Fundamental da Álgebra*. Devido a sua precocidade e genialidade, Gauss é chamado de "O Príncipe da matemática".

Figura 2.6: *Carl Friedrich Gauss*

Fonte: *http://pt.wikipedia.org/wiki/Carlhspace0.2cmFriedrich hspace0.2cmGauss*

Pôde-se notar que as sequências e séries vêm sendo estudadas há milênios e foram importantes ferramentas na resolução de problemas que o homem enfrentou ao longo do tempo. Foram estudadas por grandes matemáticos, provavelmente os maiores, como Arquimedes, Newton, Leibniz, Euller e Gauss. Constituíram-se ferramentas importantes para o desenvolvimento do Cálculo, nos dias atuais são aplicáveis a processos e recursos computacionais, são fundamentais ao entendimento de processos infinitos e aos conceitos de convergência e divergência, além de ser um dos conceitos matemáticos mais aplicáveis ao cotidiano dos estudantes. Por esses motivos merece atenção e um maior aprofundamento desde o ensino médio.

3 SEQUÊNCIA NUMÉRICA

A ideia ou noção de sequência é, provavelmente, um dos conceitos matemáticos mais presentes no cotidiano das pessoas. Quando no ensino médio o professor provoca seus alunos a emitirem o que entendem por sequência ou sucessão, é bem provável que encontre alguma resposta coerente. Isto por que o conceito está muito associado à ideia de ordem, ou até mesmo aos números naturais, aos quais até mesmo os indivíduos com baixa alfabetização conhecem (quando realizam uma contagem qualquer). Para NETO (1979, p. 41), isto acontece sempre que temos a necessidade de colocar "em uma certa ordem"os elementos de um conjunto.

SANTOS (2013, p. 6) apresenta alguns exemplos de sequência que são percebidos no cotidiano das pessoas e que podem facilitar o entendimento do estudante de matemática básica, como segue:

> A sequência dos dias da semana (domingo, segunda, ..., sábado).
>
> A sequência dos meses do ano (janeiro, fevereiro, ..., dezembro).
>
> A sequência dos números naturais (1, 2, 3, 4, ...).
>
> A sequência dos anos, a partir de 1990, nos quais a Copa do mundo de futebol foi realizada (1990, 1994, 1998, 2002, 2006, 2010).

Em todas essas situações observa-se certa ordem nos termos, o que é convergente com o pensamento de NETO (1979, p. 41).

Além dessa ideia ou noção intuitiva de sequência, uma definição matemática mais formal ou mais rigorosa é cabível e necessária desde o Ensino Médio. É cabível, pois o principal requisito é que o aluno conheça a definição de função (isto ocorre no primeiro ano do ensino médio regular) e é necessária para uma melhor formação e para o prosseguimento dos estudos, especialmente para aqueles que pretendem ingressar em carreiras das ciências exatas e das ciências sociais aplicadas.

Antes de apresentar a definição, cabe ressaltar que neste texto será adotado, se não houver menção em contrário.

- O conjunto dos números naturais como $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 5, 6, 7, 8, \ldots\}$;

- A partir deste ponto, as sequências que serão estudadas são as sequências de números reais, ou simplesmente sequências reais.

A seguir, algumas formas de definir sequência.

Em HEFEZ (2011, p. 11), é dada a seguinte definição para sequência:

Seja A um conjunto qualquer. Uma sequência em A é uma função

$$\begin{aligned} s : \mathbb{N}^* &\longrightarrow A \\ n &\longmapsto s(n) \end{aligned}$$

É comum denotar o número $s(n)$ por s_n. Uma sequência s, também, pode ser denotada por (s_n). Cabe ressaltar que neste caso o autor inclui o elemento zero dentre os números naturais.

Em SANTOS (2013, p. 6), também é dada outra definição para sequência infinita de números reais:

$$\begin{aligned} f : \mathbb{N} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ n &\longmapsto f(n) = a_n \end{aligned}$$

Outra forma de enunciar a definição de sequência seria.

Uma sequência numérica é uma função

$$\begin{aligned} f : \mathbb{N} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ n &\longmapsto a_n \end{aligned}$$

onde n é o índice da sequência e a_n é o *n-ésimo* termo da sequência.

Pode-se, também, representar a mesma sequência por $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots)$ ou $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, ou simplesmente (a_n), para indicar a sequência cujo *n-ésimo* termo é a_n.

Obviamente, se o domínio da função f for limitado (ou restrito) ao conjunto $\{1, 2, 3, 4, \ldots, n\}$, ou seja,

$$\begin{aligned} f : \{1, 2, 3, 4, \ldots, n\} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ n &\longmapsto a_n \end{aligned}$$

diz-se que a sequência é finita e pode ser escrita $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n)$.

Quanto ao entendimento e compreensão da definição, chama-se a atenção para o seguinte detalhe: não se deve confundir a sequência (função) com a imagem da função (conjunto). Para fixar as ideias, seja o exemplo abaixo que ilustra melhor esta observação:

Exemplo 1. Seja a sequência

$$\begin{aligned} f : \mathbb{N} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ n &\longmapsto a_n \end{aligned}$$

onde $a_n = 1$, para todo n. Ou seja, a sequência é $(1, 1, 1, \cdots)$, o que é diferente do conjunto imagem da função f, $Im(f) = \{1\}$.

São exemplos de sequências numéricas.

1. A sequência $(a_n) = (2, 4, 8, \ldots)$, de termo geral $a_n = 2^n$;
2. A sequência $(b_n) = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots)$, de termo geral $b_n = \frac{1}{n}\cdot$

Como já foi dito na introdução existem diversos tipos de sequências numéricas. Dentre estas, os padrões mais estudados no ensino médio são as progressões aritméticas e as progressões geométricas. A seguir, serão mostradas as suas respectivas definições.

3.1 Progressões aritméticas

Há diversas ocasiões em nossas vidas em que nos deparamos com grandezas que sofrem aumentos iguais e periódicos. Por exemplo,

1. A sequência (1990, 1994, 1998, 2002, 2006, 2010), dos anos em que ocorreu a copa do mundo. Nesta sequência, há um incremento fixo de quatro anos de um termo para o outro;
2. Um pequeno criador que possui 10 animais, analisando suas economias e receitas mensais percebe que pode adquirir mensalmente, a partir do mês de janeiro, três animais até o mês de dezembro do mesmo ano. Dessa forma,

   Quantidade inicial: 10 animais;

   Quantidade adquirida em janeiro: 3, ficando com $10 + 3 = 13$ animais;

   Quantidade adquirida em fevereiro: 3, ficando com $13 + 3 = 16$ animais;

   E assim sucessivamente, até o mês de dezembro.

Dessa forma, a sequência formada pelas quantidades de animais que o pecuarista possui no fim de cada mês será $(13, 16, 19, 22, 25, \ldots, 46)$. Nota-se que a grandeza "número de animais" sofre incrementos mensais de três animais e, assim como no primeiro exemplo, o incremento constante caracteriza a sequência conhecida por progressão aritmética. Adquirida esta noção intuitiva, segue a definição:

Uma *progressão aritmética* (PA) é uma sequência na qual a diferença entre cada termo e o termo anterior é constante. Essa diferença constante é chamada de *razão* da progressão e representada pela letra r. Em outras palavras, uma sequência $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots)$ é uma P.A se $a_n - a_{n-1} = r$; $n \in \mathbb{N}, n \geqslant 2$ e $r \in \mathbb{R}$ (LIMA, 2006. p. 1).

No exemplo 2, a razão da PA é $r = 3$, o primeiro termo é $a_1 = 13$ e o último termo é $a_{12} = 46$.

Um exemplo de progressão aritmética é a sequência dos números inteiros pares positivos $(0, 2, 4, 6, \ldots, 2n, \ldots)$, pois cada termo, a partir do segundo é igual ao anterior mais 2.

Assim, na progressão aritmética $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots)$ de razão r, sabe-se que

$$\begin{aligned} a_2 - a_1 &= r \\ a_3 - a_2 &= r \\ a_4 - a_3 &= r \\ \vdots \quad &\quad \vdots \\ a_{n-1} - a_{n-2} &= r \\ a_n - a_{n-1} &= r \end{aligned}$$

Somando membro a membro as $n - 1$ igualdades acima, teremos

$$a_n - a_1 = (n-1)r$$

Ou seja,

$$a_n = a_1 + (n-1)r.$$

Esta expressão nos fornece o termo geral [1] de uma *progressão aritmética*, a partir da qual se pode obter qualquer termo da sequência, conhecendo-se o primeiro termo e a razão da progressão.

[1] Às vezes é conveniente escrever o termo geral como $a_n = a_0 + nr$. Associando uma *progressão aritmética* à função afim, os termos dessa sequência são as imagens dos números inteiros pela função a_n e sua representação gráfica será uma sequência de pontos colineares.

Em algumas aplicações das *progressões aritméticas*, como abordado nos capítulos seguintes será necessário e de grande utilidade saber como calcular a soma dos termos de uma PA. Como foi mostrado no primeiro capítulo, o matemático alemão Carl F. Gauss (1777 - 1855), quando tinha apenas dez anos de idade conhecia um artificio que lhe permitiu calcular com muita rapidez a soma dos cem primeiros números inteiros maiores que zero. Adiante, será mostrada a expressão que generaliza a soma dos n primeiros termos de uma PA.

Seja a PA $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots)$ de razão r, denota-se por S_n a soma dos n primeiros termos, ou seja,

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n,$$

reescrevendo a soma, do último para o primeiro, temos

$$S_n = a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \cdots + a_1,$$

Somando estas duas igualdades, tem-se

$$2 \times S_n = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + (a_3 + a_{n-2}) + \ldots + (a_n + a_1).$$

Observe que, ao passar de um parênteses para o seguinte, a primeira parcela aumenta de r e a segunda parcela diminui de r, o que não altera a soma. Portanto, todos os parênteses são iguais ao primeiro, $(a_1 + a_n)$ (LIMA, 2006, p. 6).

Como são n parênteses, tem-se

$$2 \times S_n = (a_1 + a_n)n \quad \text{e} \quad S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}\cdot$$

Exemplo 2. Calcular a soma dos n primeiros números naturais.

Resolução: a sequência dos n primeiros números inteiros é $(1, 2, 3, 4, \ldots, n)$ é uma PA de razão $r = 1, a_1 = 1$ e $a_n = n$. Portanto, a soma pode ser obtida pela expressão encontrada acima. Logo,

$$S_n = \frac{(1 + n)n}{2}.$$

No *capítulo 2* foi mostrado que os pitagóricos conheciam os números figurados e dente estes, viu-se que o resultado acima nos fornece a classe dos números triangulares.

Agora, utilizando os números triangulares, prossegue-se com a visualização da soma dos n primeiros números naturais, interpretando-a e realizando outra demonstração do resultado obtido algebricamente, analisando figura construída, conforme segue:

Na primeira linha o número 1 é representado por um disco de cor roxa, na segunda o número 2 representado por dois discos de cor roxa e assim sucessivamente até a *n-ésima* linha, o número n representado por n discos de cor roxa, formando um triangulo retângulo. Sobre este, coloca-se um triângulo semelhante com discos em branco, obtendo um retângulo de lados contendo n e $n+1$discos, conforme a figura abaixo.

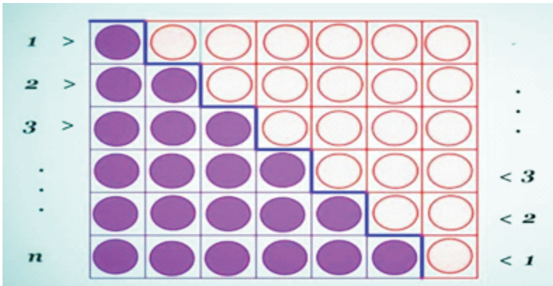

Figura 3.1: *Representação para a soma dos n primeiros números naturais*

Fonte: *Adaptado de Fonseca (2012)*

Nota-se claramente que se trata um retângulo de lados n e $n+1$ discos, cuja área é $n(n+1)$. S_n equivale à metade dessa área, ou seja, representa a área do triângulo retângulo de altura equivalente a n discos e base equivalente a $n+1$ discos. Portanto $S_n = \dfrac{n(n+1)}{2}$, que é o mesmo resultado encontrado algebricamente.

3.2 Progressões geométricas

Quando uma pessoa aplica seu dinheiro em um banco que garante rendimento mensal de 1%, o valor inicialmente aplicado sofrerá aumentos sucessivos com taxa de juros constante e igual a 1%.

De modo geral, nesta seção trata-se das sequências que variam com taxa de crescimento (ou decrescimento) constante. Uma grandeza que em certo momento apresenta um valor a sofre variação e passa a valer b, apresenta crescimento (ou decrescimento) $(b-a)$. Consequentemente, sua taxa de variação em relação ao seu valor inicial será o quociente $\dfrac{(b-a)}{a}$, que se equivale a $\left(\dfrac{b}{a}-1\right)$. Para este resultado ser constante, basta que o quociente $\dfrac{b}{a}$ também o seja. Este comportamento é observado com muita frequência e diversos fenômenos. Um clássico exemplo que pode ser tomado é o de um empréstimo adquirido à taxa de juros constante e que deve ser devolvido em parcelas iguais e periódicas. Essa propriedade caracteriza um importante tipo de sequência, a *progressão geométrica*. Entendida a noção intuitiva, vejamos a definição.

Por definição, uma *progressão geométrica* (PG) é uma sequência na qual é constante o quociente da divisão de cada termo, a partir do segundo, pelo seu antecedente. Esse quociente constante é representado por q e chamado de razão (MORGADO, WAGNER e ZANI, 1993. p. 18). Ou seja, a sequência $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots)$ é uma *progressão geométrica* se para todo n tivermos $\dfrac{a_2}{a_1} = \dfrac{a_3}{a_2} = \cdots = \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = q$, com $a_n \neq 0$ para todo n e consequentemente q deve ser um número real diferente de zero.

São Exemplos de *progressões geométricas*.

1) $(2, 4, 6, 8, \ldots, 2n, \ldots)$ que é a sequência dos inteiros pares positivos. Neste caso $q = 2$ e $a_1 = 2$;
2) $\left(1, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{4}, \ldots, \dfrac{1}{2^{n-1}}\right)$ onde $q = \dfrac{1}{2}$ e $a_1 = 1$.

A partir da definição reescrevemos os n primeiros termos, conforme abaixo.

$$
\begin{aligned}
a_2 &= a_1 q \\
a_3 &= a_2 q \\
a_4 &= a_3 q \\
\vdots \quad & \quad \vdots \\
a_{n-1} &= a_{n-2} q \\
a_n &= a_{n-1} q.
\end{aligned}
$$

Multiplicando, membro a membro, essas $(n-1)$ igualdades, obtém-se

$$a_n = a_1 q^{n-1}$$

que é a expressão do termo geral [2] de uma progressão geométrica de razão q e primeiro termo a_1, a partir da qual pode-se obter qualquer termo da sequência, conhecendo a razão e o primeiro termo. Por exemplo,

[2] Às vezes é conveniente escrevermos o termo geral de uma PG como $a_n = a_0 \times q^n$ (exponencial).

1) O décimo termo de uma PG de razão q e primeiro a_1 pode ser escrito $a_{10} = a_1 q^9$;

2) Na PG $(3, 6, 12, \ldots)$, o sétimo termo é $a_7 = 3 \times 2^{7-1} = 3 \times 2^6 = 192$.

Observação 1. Neste texto optou-se pela abordagem das *progressões geométricas* associada ao conceito de taxa de crescimento constante, conforme se percebe na definição acima, pela maior facilidade de associação a fenômenos que ocorrem na vida real ou na natureza. Entretanto, alguns autores definem P.G de forma estritamente algébrica, como abaixo.

> Chama-se progressão geométrica (PG) uma sequência dada pela seguinte fórmula de recorrência[3]
>
> $$\begin{cases} a_1 = a \\ a_n = a_{n-1} \times q, \quad \text{para todo} \quad n \in N, n \geqslant 2. \end{cases}$$
>
> em que a e q são números reais dados (IEZZI e HAZZAN, 2004. p. 24).

Em consequência apresenta a sequência $(3, 0, 0, 0, 0, \ldots, 0, \cdots)$ como exemplo de PG.

Em outra definição estritamente algébrica tem-se

> *Uma sequência $a(a_k)k \geqslant 1$ de números reais é uma progressão geométrica (abreviamos PG) se existir um número real q, tal que, a recorrência*
>
> $$a_{k+1} = qa_k$$
>
> *que também admite $q = 0$ e consequentemente $a_k = 0$, para todo $k > 1$* (NETO, 2012. p. 105).

que também admite $q = 0$ e consequentemente $a_k = 0$, para todo $k > 1$.

Como foi mencionada, a intenção deste texto é apresentar uma abordagem contextualizada, de tal forma que os elementos e conceitos matemáticos estejam relacionados com a realidade ou com fenômenos da natureza. Acredita-se que uma definição puramente algébrica, em nível de ensino médio, pode dificultar a assimilação do tema, principalmente o entendimento da sua aplicabilidade e relevância para o cotidiano dos alunos. A forma de abordagem e definição dos elementos que adotamos ratifica-se com o que pensa LIMA (2006), sobre o ensino de sequências e progressões,

[3]Em geral, uma equação de recorrência é uma equação envolvendo uma certa quantidade de termos de sequência x_n (OLIVEIRA e FERNANDEZ, 2010. p. 226).

(···) uma progressão geométrica é uma sequência na qual a taxa de crescimento de cada termo para o seguinte é sempre a mesma e esse instrumento matemático foi criado para descrever grandezas que variam com taxa de crescimento constante. É absurdo, mas infelizmente comum, ensinar progressões geométricas e não relacioná-las à ideia de taxa de crescimento.

Dessa forma, não faz sentido (ou ainda, é contraditório) ter uma sequência cuja definição está associada à taxa de crescimento e ao mesmo tempo se ter exemplares desta que não apresentam crescimento ou cuja taxa de crescimento é indeterminada.

3.2.1 Aplicações da definição de progressão geométrica

Alguns problemas de taxa de crescimento podem ser resolvidos aplicando-se diretamente a definição de PG, conforme será visto nos exemplos a seguir:

Exemplo 3. O déficit habitacional é um dos grandes problemas sociais que o Brasil vem enfrentando nas últimas décadas. Para saber mais sobre esse problema e apontar soluções é fundamental que se tenha informações a respeito do crescimento populacional brasileiro. O gráfico e a tabela abaixo trazem informações relativas a essas variáveis.

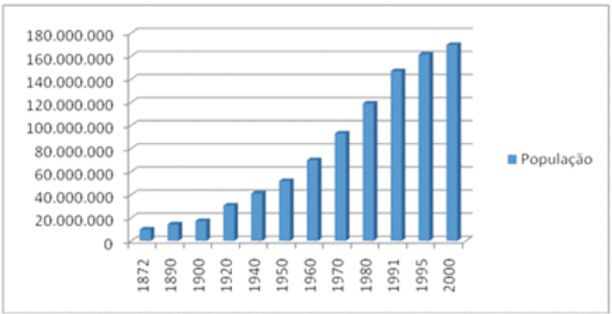

Figura 3.2: *Crescimento da população brasileira no período 1872-2000*

Fonte: *IBGE - Anuários Estatísticos do Brasil - 2000. Disponível em: http://br.monografias.com/trabalhos3/deficit-habitacional/deficit-habitacional2.shtml*

Período	Taxa de Crescimento
940/1950	2,35
1950/1960	3,06
1960/1970	2,87
1970/1980	2,48
1980/1990	1,93
1990/2000	1,63
2000/2010	1,35
2010/2020	0,92
2020/2030	0,58

Tabela 3.1: *Taxa de crescimento médio anual da população brasileira (1940-2030)*
Fonte: *IBGE - Anuários Estatísticos do Brasil - 2000. Disponível em: http://br.monografias.com/trabalhos3/deficit-habitacional/deficit-habitacional2.shtml*

Considerando que a população brasileira em 2030 alcançará a marca de 223.507.500 habitantes e que a partir desse ano passará a crescer a uma taxa de 1% a cada década, qual a população brasileira em 2050? (aproximadamente).

Resposta:

Para iniciar a resposta, faz-se necessário lembrar, conforme visto na introdução deste capítulo, que se uma grandeza passa do valor a para o valor b, a taxa de crescimento é dada por $\frac{(b-a)}{a}$ ou $\left(\frac{b}{a}-1\right)$. Além disso, a *grandeza população* possui taxa de crescimento constante e igual a 1%, portanto tem o comportamento de uma *progressão geométrica.*

Assim, sendo qa razão da PG, então $q-1=1\%$, ou seja, $q=1,01$.

Escrevendo o termo geral da sequência como $P_n=P_0\times 1,01^n$ e sabendo que para duas décadas (2030 a 2050), tem-se $n=2$, então

$$P_2 = 223.507.500 \times 1,01^2 = 228.000.000.$$

ou seja, a população brasileira em 2050 será 228 milhões de habitantes, aproximadamente.

Exemplo 4. Uma metalúrgica produziu, no ano de 2013, 200 peças de grande porte para a indústria naval. As vendas dessas peças têm projeção de crescimento de 5% ao ano, em decorrência do crescimento da indústria naval no mesmo patamar para os próximos anos. Qual deverá ser a produção anual de peças de grande porte dessa metalúrgica, para atendimento à demanda da industrial naval em 2016, considerando que a sua carteira de cliente se manteve inalterada?

Resposta:

A grandeza *produção de peças de grande porte* apresenta taxa de crescimento constante. Logo, a sequência anual de quantidades de produtos produzidos caracteriza uma PG de razão $q = 1 + 5\% = 1,05$.

Deseja-se saber a produção em 2016, ou seja, para daqui a três anos. Escrevendo o termo geral dessa PG da forma $a_n = a_0 \times q^n$ e sabendo que $a_0 = 200$, teremos

$$a_3 = 200 \times 1,05^3 = 200 \times 1,16 = 232,00.$$

Portanto, a produção deverá ser de, no mínimo, 232 peças para o atendimento à indústria naval.

Um pouco de história

A teoria criada por **Tomas Robert Malthus** (1766-1834), economista e demógrafo inglês, e que ganhou o nome de ″**Malthusianismo**″ foi a primeira teoria populacional a relacionar o crescimento da população com a fome, afirmando a tendência do crescimento populacional em progressão geométrica, e do crescimento da oferta de alimentos em progressão aritmética (Fonte: http://www.infoescola.com).

Figura 3.3: *Thomas Malthus*

Fonte: *http://www.brasilescola.com/matematica/progressoes.htm*

3.2.2 A soma dos termos de uma progressão geométrica

Como visto no *capítulo 2*, *Euclides de Alexandria* conhecia uma expressão equivalente à soma dos termos de uma *progressão geométrica*. A proposição 35 do livro IX de *Os elementos* está sob a seguinte forma:

> "Se tantos números quantos quisermos estão em proporção continuada, e se subtrairmos do segundo e último números iguais ao primeiro, então assim como o excesso do segundo está para o primeiro, o excesso do último estará para todos aqueles que o precedem".

Que se equivale a,

$$\frac{a_{n+1} - a_1}{a_1 + a_2 + \ldots + a_n} = \frac{a_2 - a_1}{a_1}.$$

Além do termo geral, outra relação muito útil em aplicações das *progressões geométricas* é a expressão que fornece a soma dos n primeiros termos desse tipo de sequência. No exemplo 4 da seção 3.2.1, se fosse pedido o total de peças vendidas pela metalúrgica de 2013 a 2016 bastaria somar as quantidades de 2014, 2015 e 2016, mas se o número de termos fosse grande isto seria muito trabalhoso. Nesse caso seria útil um dispositivo matemático que abreviasse os cálculos e reduzisse o tempo. Por esse e outros motivos é conveniente conhecer tal dispositivo.

Seja a PG $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots)$, sobre a soma dos n primeiros termos (S_n), teremos:

Se a razão $q = 1$, então obviamente a sequência terá termos constantes e iguais a_1 e $S_n = n \times a_1$.

Se a razão $q \neq 1$, tem-se

$$\begin{aligned} S_n &= a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n \\ &\text{ou} \\ S_n &= a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + \cdots + a_1 q^{n-1}. \end{aligned}$$

Multiplicando esta última igualdade por q em ambos os membros [4], temos

$$\begin{aligned} q \times S_n &= a_1 q + a_1 q q + a_1 q^2 q + \cdots + a_1 q^{n-1} q \\ &\text{e} \\ q \times S_n &= a_2 + a_3 + \cdots + a_n + a_1 \times q^n = S_n - a_1 + a_1 q^n. \end{aligned}$$

o que equivale a

$$(q-1) S_n = -a_1 + a_1 q^n.$$

Portanto,

$$S_n = \frac{a_1(1 - q^n)}{1 - q}.$$

[4]Esta operação pode ser realizada, pois se viu na definição que $q \neq 0$.

Esta relação pode, inclusive, ser facilmente verificada através da indução matemática.

Assim, na PG do exemplo 2 da seção 3.2 acima $(3, 6, 12, \ldots)$, a soma dos sete primeiros termos será,

$$S_7 = \frac{3(1-2^7)}{1-2} = \frac{3(-127)}{(-1)} = 381.$$

O caso especial $|q| < 1$, abordaremos na seção sobre limite de sequências e séries, adiante.

3.3 sobre o limite de sequências

Nesta seção, busca-se uma introdução ao estudo do limite de sequências e ao estudo das séries numéricas adaptados para uma abordagem no ensino médio. Para melhor compreensão e estabelecer uma noção intuitiva, toma-se o exemplo a seguir:

Seja a sequência $(a_n) = \left(\frac{1}{n}\right) = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \cdots\right)$.

Tomando-se $n = 1000$, tem-se $a_n = \frac{1}{1000} = 0,001$;

Tomando-se $n = 10.000$, tem-se $a_n = \frac{1}{10.000} = 0,0001$.

Não é difícil perceber que, se n é grande, $a_n = \frac{1}{n}$ é pequeno. Em outras palavras, quanto maior o valor de n, mais $a_n = \frac{1}{n}$ torna-se menor e aproximadamente igual a zero, sendo essa diferença tão pequena quanto se queira. Assim, se é desejado que a diferença (ou aproximação) entre $\frac{1}{n}$ e zero seja menor que $0,0002$, deve-se ter:

$$\left|\frac{1}{n} - 0\right| < 0,0002$$

ou seja,

$$\left|\frac{1}{n}\right| < 0,0002 \longrightarrow n > 20.000.$$

Portanto, basta tomar $n > 20.000$, ou seja, $n = 20.001$ para que a diferença (aproximação) entre $a_n = \frac{1}{n}$ e zero seja menor que $0,0002$.

Neste caso, diz-se que o limite de $\frac{1}{n}$, quando n tende ao infinito é zero e denota-se por:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0 \quad \text{ou} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0 \quad \text{ou} \quad \lim \frac{1}{n} = 0$$

Abaixo, uma definição mais formal de limite de sequência.

Definição 1. Um número real S é dito o limite da sequência (a_n) de números reais quando, para todo número natural $\mathbb{N}$ (tão grande quanto quisermos), existir um índice n_0 (que depende de $\mathbb{N}$), tal que, para todo $n \geqslant n_0$, tenhamos $|a_n - s| < \dfrac{1}{\mathbb{N}}$, isto é, $s - \dfrac{1}{\mathbb{N}} < a_n < s + \dfrac{1}{\mathbb{N}}$. Se uma sequência (a_n) tiver limite S, diremos que ela é convergente para S (RIBENBOIM, 2012. p. 65).

Ou ainda,

Definição 2. Uma sequência $(a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n, \cdots)$ tem um limite l se, dado $\epsilon > 0$, é possível obter um número natural n_0 tal que, $|a_n - l| < \epsilon$ quando $n > n_0$. Neste caso, indica-se $\lim\limits_{n \to +\infty} (a_n) = l$ e diz-se que a sequência converge para l [5] (IEZZI e HAZZAN, 2004. p. 37).

Caso contrário, ou seja, se não existir o limite l, diz-se que a sequência diverge [6]

Por exemplo:

1. A sequência $(a_n) = \left(\dfrac{1}{n}\right) = \left(1, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{4}, \cdots\right)$ converge para zero.

   Isto pode ser verificado através da definição.

   De fato, dado $\epsilon > 0$, devemos determinar o número $n_0 \in \mathbb{N}$, tal que, para todo $n > n_0$, tenhamos:

   $$\left|\frac{1}{n} - 0\right| < \epsilon \Longrightarrow \frac{1}{n} < \epsilon.$$

   Portanto, basta que tomemos $n_0 \geqslant \dfrac{1}{\epsilon}$, pois $\dfrac{1}{\epsilon}$ pode não ser inteiro.

   Assim, para todo $n > n_0$, teremos $n > \dfrac{1}{\epsilon} \Longrightarrow \dfrac{1}{n} < \epsilon \Longrightarrow \left|\dfrac{1}{n} - 0\right| < \epsilon$. Isto mostra que $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{1}{n} = 0$.

2. A sequência $(b_n) = (n) = (1, 2, 3, 4, \dots)$ diverge, pois

   $$\lim_{n \to +\infty} n = +\infty$$

[5] Se uma sequência (a_n) é convergente, então ela tem um limite único.

[6] Se uma sequência (a_n) diverge, então (adaptado):

$\lim\limits_{n \to \infty} a_n = +\infty \Longleftrightarrow$ dado $M > 0; \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n > n_0 \Longrightarrow a_n > M;$.

$\lim\limits_{n \to \infty} a_n = -\infty \Longleftrightarrow$ dado $M > 0; \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n > n_0 \Longrightarrow a_n, < -M;$ (RIBENBOIM, 2012.p.82)

A seguir, enunciam-se duas proposições, a primeira servirá de auxilio para a obtenção da segunda, esta última será fundamental pra a continuação com estudo das *progressões geométricas* de razão $q < 1$.

Proposição 1. Se $a + 1 > 0$, então $(1 + a)^n \geqslant 1 + na, \forall n \in \mathbb{N}$.

Demonstração (indução):

- Para $n = 1$, temos:

$$(1 + a)^1 \geqslant 1 + 1a$$

onde ambos os membros são iguais a $1 + a$ e vale a igualdade. O que mostra a proposição válida para o caso inicial.

- Admite-se, por hipótese de indução, que a proposição seja válida para um $k \in \mathbb{N}$, qualquer, ou seja,

$$(1 + a)^k \geqslant 1 + ka$$

- $K + 1$. Deve-se mostrar que a proposição é válida para $k + 1$. Tem-se:

  Partindo da hipótese de indução e multiplicando ambos os membros da desigualdade pelo número positivo $1 + a$, obtém-se:

$$\begin{aligned} (1 + a)^{k+1} &\geqslant (1 + ka)(1 + a) \\ &\geqslant 1 + ka + a + ka^2 \\ &\geqslant 1 + (k + 1)a + ka^2 \geqslant 1 + (k + 1)a. \end{aligned}$$

  Isto mostra que a proposição é válida para $k + 1$.

  Portanto, pelo Princípio da Indução Finita, a proposição é válida para todo $n \in \mathbb{N}$.

Proposição 2. Se $|q| < 1, lim\ q^n = 0$.

Demonstração:

Se $q = 0$; é imediato, pois seguindo a definição, escolhendo $\epsilon > 0, |q^n - 0| = 0 < \epsilon$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Para $q \neq 0$, tem-se:

Pela definição, deve-se ter $|q^n - 0| < \epsilon$, ou seja $|q^n| < \epsilon$.

Sendo $|q| < 1$, então existe $M > 0$ (tão grande quanto se queira), tal que, $|q| = \dfrac{1}{M}$. Reescrevendo $M = a + 1 > 0$, tem-se $|q| = \dfrac{1}{(a+1)}$. Retomando,

$$|q^n| = \frac{1}{(1+a)^n} \leqslant \frac{1}{1+na} < \frac{1}{na} < \epsilon.$$

O que implica,

$$n > \frac{1}{\epsilon a}$$

Ou seja, basta que se tenha,

$$n_0 \geqslant \frac{1}{\epsilon a} \quad \text{(pois } \frac{1}{\epsilon a} \text{ pode não ser inteiro)}$$

Vejamos:

Dado $\epsilon > 0$ e para $n > n_0$, tem-se

$$n > \frac{1}{\epsilon a} \quad \longrightarrow \quad \epsilon > \frac{1}{na} > \frac{1}{(1+na)}.$$

Pela proposição 1,

$$\epsilon > \frac{1}{na} > \frac{1}{1+na} > \frac{1}{(1+a)^n} = \left(\frac{1}{1+a}\right)^n = |q|^n = |q^n|.$$

Portanto,

$$\epsilon > |q^n| \quad \text{ou} \quad |q^n - 0| < \epsilon.$$

Isto mostra que, se $|q| \leqslant 1, lim\ q^n = 0$.

A partir deste momento, conhecendo a definição de limite de uma sequência e já conhecendo a proposição 2 acima, fica fácil estabelecer a convergência das sequências dos exemplos abaixo.

Exemplos:

$\left(1, \dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{4^2}, \dfrac{1}{4^3}, \cdots, \left(\dfrac{1}{4}\right)^{n-1}, \left(\dfrac{1}{4}\right)^n, \cdots\right)$ tem limite zero. Logo, a sequência converge para zero, pois $q = \dfrac{1}{4}$, ou seja, $|q| < 1$.

$\left(1, -\dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{9}, -\dfrac{1}{27}, \cdots, \left(-\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}, \left(-\dfrac{1}{3}\right)^n, \cdots\right)$, tem limite zero. Logo, a sequência converge para zero, pois $q = -\dfrac{1}{3}$, ou seja, $|q| < 1$.

Conhecidos estes resultados, retorna-se ao caso da soma dos termos de uma progressão geométrica de razão q, com $|q| < 1$, tem-se:

Proposição 3. Seja a *progressão geométrica* $(a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n, \cdots)$ com razão q, tal que, $|q| < 1$. O limite da soma S_n, dos n primeiros termos da P.G, é

$$S = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \cdots + a_n + \cdots = \frac{a_1}{1-q}.$$

Demonstração:

Nesta proposição deve-se somar os infinitos termos da P.G, isto é uma tarefa que não é possível de fazer termo a termo. Para sanar este problema, basta calcular o limite da soma dos n primeiros termos, para n tendendo ao infinito.

Foi encontrado para a soma dos n primeiros termos de uma P.G que,

$$S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}.$$

Aplicando o limite, temos:

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}.$$

Na Proposição 2, vimos que $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$, pois $|q| < 1$. Assim,

$$S = \lim_{n\to\infty} = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q} = \frac{a_1(1-0)}{1-q}.$$

Portanto,

$$S = \frac{a_1}{1-q}.$$

O exemplo a seguir ilustra e facilita o entendimento desse resultado.

Seja a sequência $(0,1; 0,01; 0,001; 0,0001, \cdots)$. Sobre a soma de seus termos, sabe-se:

$$\begin{array}{rcl}
S_1 & = & 0,1 \\
S_2 & = & 0,1 + 0,01 = 0,11 \\
S_3 & = & 0,1 + 0,01 + 0,001 = 0,111 \\
S_4 & = & 0,1 + 0,01 + 0,001 + 0,0001 = 0,1111 \\
\cdots & \cdots & \cdots \\
S_n & = & 0,1 + 0,01 + 0,001 + 0,0001 + \cdots + \cdots = 0,11111\cdots
\end{array}$$

Percebe-se que quanto mais termos adicionarmos à soma, mais dígitos 1 acrescentamos à parte decimal da dízima periódica $0,11111\cdots$

Não esquecendo que a sequência se trata de uma P.G de razão $q = \dfrac{1}{10}$ e $a_1 = \dfrac{1}{10}$, o limite da soma é,

$$S = \frac{\frac{1}{10}}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{1}{9}$$

$\dfrac{1}{9}$ é, portanto, o limite da soma dos termos da sequência, em outros palavras, quanto mais elementos da sequência acima somarmos, mais nos aproximamos de $\dfrac{1}{9}$, porém nunca ultrapassaremos esse limite.

Aliás, se for feita a divisão de 1 por 9, percebe-se que o resultado é de fato a dízima periódica mostrada acima. Dessa forma, pode-se concluir que a fração geratriz (que dá origem) da dízima periódica $0,111111\cdots$ é $\dfrac{1}{9}$. Esta conclusão é uma das aplicações aritméticas mais imediatas do limite da soma dos termos de uma P.G de razão q (com $|q| < 1$), ou seja, descobrir a fração geratriz de uma dízima periódica. Vejamos os alguns exemplos:

1. Encontrar a fração geratriz do número decimal periódico $P = 10,5353\cdots$.

   Resposta:

   Inicialmente, vamos separar a parte inteira da parte decimal, onde observamos a dízima periódica. O número $P = 10,5353\cdots$ pode ser reescrito como $10 + 0,535353\cdots$.

   Deve-se notar que a parte decimal equivale a $0,53 + 0,0053 + \cdots$, ou seja, é a soma dos termos da sequência $(0,53; 0,0053; 0,000053; \cdots)$, que é uma P.G de razão igual a $\dfrac{1}{100} < 1$. O limite da soma dos termos dessa sequência é,

$$S = \frac{\frac{53}{100}}{1 - \frac{1}{100}} = \frac{53}{99}$$

   Retornando ao número P, teremos:

$$P = 10 + \frac{53}{99} = \frac{1043}{99}.$$

   O resultado obtido pode ser facilmente verificado através da divisão do numerador pelo denominador.

2. **Aplicação a um problema de física (movimento):**

   O gerente de operações da Companhia Paulista de Trens Metropolitanos - CPTM, em uma conversa informal com outros colegas relatou que num dia de trabalho muito turbulento houve o seguinte acontecimento em uma das linhas que gerencia:

   Um trem movia-se com velocidade constante quando, em uma passagem de nível um pouco adiante ($150m$), surge um veículo enguiçado sobre a linha férrea e o maquinista, imediatamente, começa a frear. O sistema de frenagem do trem garante que, naquela velocidade, no 1º segundo o trem anda 20 metros e em cada segundo seguinte anda, aproximadamente, 80% do que andou no segundo anterior. O contador do episódio ausentou-se rapidamente e não contou como tudo terminou. Mesmo não sabendo do final contado pelo gerente, a que conclusão os amigos chegaram sobre o episódio?

   Resposta:

   Esta questão poderia ser abordada através das leis e equações da Cinemática [7]. No entanto, trata-se de um problema associado a taxa de crescimento (na verdade decrescimento) igual a -20%, uma vez que a locomotiva anda a cada segundo sempre 80% do que andou no instante anterior.

   Assim, a sequência das distâncias percorridas pelo trem a cada segundo é, em metros, $(20, 16, \cdots)$. Esta sequência é uma P.G de razão $q = \dfrac{80}{100} = \dfrac{8}{10}$, $a_1 = 20$ e $\left|\dfrac{8}{10}\right| < 1$. Logo, a soma dos espaços percorridos tem um limite. O limite da soma é,

   $$S = \frac{20}{1 - \dfrac{8}{10}} = 100.$$

   Portanto, o trem percorrerá no máximo $100m$ e assim, os amigos chegaram à conclusão de que não houve choque entre o trem e o veículo, pois a distância entre eles, no início da frenagem era de $150m$.

Proposição 4. Se q é um número real positivo e $q > 1$, então a sequência de termo geral $a_n = q^n$ é divergente e $S = \lim\limits_{n\to\infty} q^n = +\infty$. [8]

Demonstração:

Deve-se mostrar que, para $M > 0$ existe um inteiro n_0, tal que, se $n > n_0$, então $q^n > M$.

[7] A cinemática é a parte da Física que estuda os movimentos dos corpos.

[8] Pode ser demonstrado que a proposição é válida inclusive para $|q| > 1$.

Pela proposição 1 e fazendo $q = 1 + a > 1$; com $a > 0$, então existe um natural n, tal que $q^n = (1+a)^n \geqslant (1+na) > na > M \Longrightarrow n > \dfrac{M}{a} = \dfrac{M}{q-1}$. Portanto,

Bata que se tome $n_0 \geqslant \dfrac{M}{a} = \dfrac{M}{q-1}$ $\left(\text{pois } \dfrac{M}{q-1} \text{ pode não ser inteiro}\right)$.

Verificando, tem-se:

Para $n > n_0 \Longrightarrow n > \dfrac{M}{a} \Longrightarrow 1 + na > na > M \Longrightarrow (1+a)^n > 1 + na > M$, ou seja,

$$(1+a)^n > M \Longrightarrow q^n > M.$$

O que comprova que $\lim_{n\to\infty} q^n = +\infty$ *e a sequência é divergente.*

Esta última proposição será útil em análise de crescimento de algumas sequências que estudaremos nos capítulos dedicados a aplicações.

3.4 Séries numéricas

Seja a sequência $(a_n) = (a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n, \cdots)$, sobre a soma dos seus termos, sabe-se:

$$\begin{aligned}
S_1 &= a_1 \\
S_2 &= a_1 + a_2 \\
S_3 &= a_1 + a_2 + a_3 \\
S_4 &= a_1 + a_2 + a_3 + a_4 \\
\cdots & \cdots \cdots \\
S_n &= a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \cdots + a_n
\end{aligned}$$

Essas somas sucessivas dão origem à sequência $(S_n) = (S_1, S_2, S_3, \cdots, S_n, \cdots)$, chamada de sequência das somas parciais (ou reduzidas) e introduzem o conceito de série numérica. Ou seja, o somatório

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots$$

é chamado de **Série Numérica** da sequência de termo geral a_n. Se for somado apenas os n primeiros termos da série, como feito acima, tem-se a **soma parcial (ou reduzida)** $S_n = \sum_{n=1}^{n} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$.

Definição 3. Se existir o limite,

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}(a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n),$$

diremos que a série $\sum a_n$ é *convergente* e o limite será chamado a *soma* da série. Escrevemos então

$$S = \sum a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots .$$

Se a sequência das reduzidas não convergir, diremos que a série $\sum a_n$ é divergente (LIMA, 2012. p. 134).

O primeiro contato que o estudante do ensino médio tem com as séries numéricas é através da soma dos infinitos termos de uma *progressão geométrica (a série geométrica)* de razão q, com $|q| < 1$, como viu-se na seção anterior. No entanto, não é comum ser tratada com esta nomenclatura. Além destas, há outras séries que podem ser introduzidas nesse nível de ensino, mas não são abordadas.

Nesse primeiro contato com as séries muitas dúvidas podem surgir e dificultar o aprendizado se não forem sanadas: É possível somar infinitos números? Como isto pode ser feito?

Esse tipo de dúvida costuma ser comum no primeiro contato coisas infinitas. Ocorre que de fato não é possível somar infinitos números um a um, deve-se saber como é o padrão da soma de um número finito de termos (uma formula fechada), para então aplicar o limite, quando o número de termos tender ao infinito.

Segundo FONSECA (2012, p. 46), a introdução do conteúdo de sequências e séries em sala de aula não é simples, uma vez que, costumeiramente estaremos somando uma quantidade infinita de números reais e o resultado pode não ser ″o infinito″, como no caso das séries convergentes.

Essa problemática pode ser reduzida, ou até mesmo contornada, se for evitada a abordagem exclusivamente algébrica, procurando de alguma forma possibilitar ao aluno perceber o que acontece e que o mesmo participe da construção do seu conhecimento.

Exemplo 5. Seja a sequência $(b_n) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \cdots, \frac{1}{2^n}, \cdots)$ e a série

$$S_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \cdots$$

Sabe-se, pela proposição 2, que (b_n) converge para zero, pois $\left|\frac{1}{2}\right| < 1$.

Mas o que podemos afirmar sobre S_n?

A pergunta pode ser respondida com uma interpretação geométrica, conforme seque:

Consideremos as figura abaixo, que representam áreas respectivamente iguais a

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \ldots$$

Tem-se,

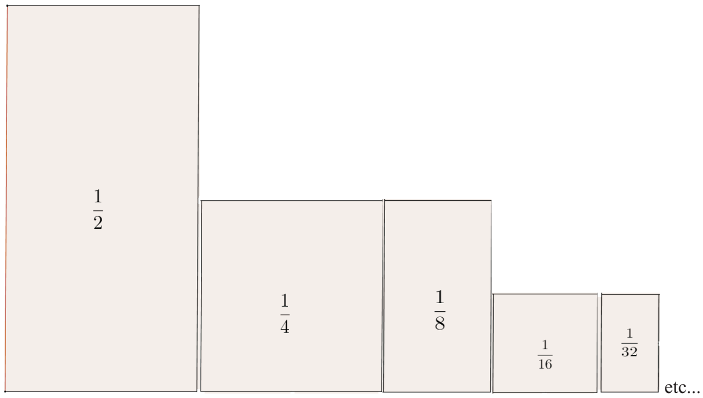

Figura 3.4: *Representação dos termos da progressão geométrica de razão 1/2*

Fonte: *elaborada pelo autor*

Reunindo-as em uma única figura (retângulo de área 1 u.a), temos:

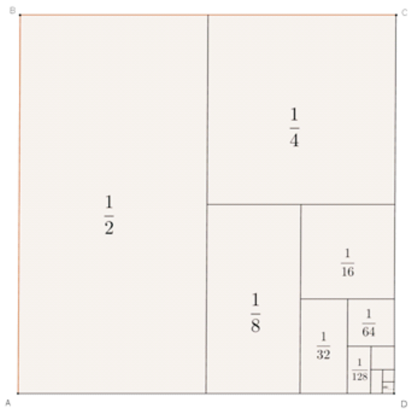

Figura 3.5: *Visualização geométrica da convergência da série geométrica de razão 1/2*

Fonte: *FONSECA (2012)*

Isto mostra que, a soma das áreas dos sucessivos retângulos, $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \ldots$, nunca ultrapassará a segunda metade do retângulo maior, ou seja, a série $S = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \cdots$ tem limite igual a 1. Para FONSECA (2012, p. 47) exemplos como esse podem ser muito úteis, pois mostram uma soma de infinitos termos que não possui um resultado infinito[9].

Contudo, não se deve descartar a importância da abordagem algébrica, pois ambas podem ser utilizadas convenientemente. Refazendo o mesmo exemplo algebricamente

[9]O decrescimento ″indefinido″ dos termos da sequência (b_n), que converge para zero, não é condição suficiente para a convergência da série, isto será demonstrado através de proposições, adiante.

tem-se:

Note que $(b_n) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \cdots, \frac{1}{2^n}, \cdots\right)$ é uma P.G cuja razão é $q = \frac{1}{2} = \left|\frac{1}{2}\right| < 1$ e $a_1 = \frac{1}{2}$, e o limite da soma dos seus termos (série), de acordo com a 3, é

$$S = \frac{a_1}{1-q} \Longrightarrow \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}$$

Portanto, $S = 1$.

Isto mostra que a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ converge para 1 e confirma o resultado obtido através da visualização geométrica.

Exemplo 6. Seja a sequência $(c_n) = (\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \cdots, \frac{1}{3^n}, \cdots)$.

Sabe-se, pela proposição 2, que (c_n) converge para zero, pois $\left|\frac{1}{3}\right| < 1$.

Mas, o que podemos afirmar sobre S_n?

Esta pergunta também pode ser respondida através de uma interpretação geométrica, como foi feito no exemplo acima:

Considere um triângulo isósceles ABC, cuja área mede *1 u.a*, base $AB = b$, lados $AC = BC = a$ e mediana CM (relativa à base AB), conforme a figura abaixo.

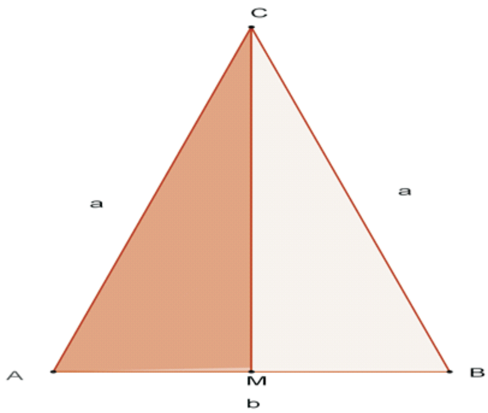

Figura 3.6: *Triângulo isósceles de área igual a 1 u.a*

Fonte: *elaborada pelo autor*

Deve-se lembrar que em um triângulo isósceles os segmentos que unem o Baricentro [10] (G) aos vértices dividem o triângulo em três outros triângulos de áreas iguais a um terço

[10]Baricentro é o ponto de encontro das medianas de um triângulo.

da área do triângulo inicial [11] . Dessa forma, tomando o Baricentro G do triângulo ABC, tem-se três novos triângulos de áreas iguais a $\frac{1}{3}$. Assim, o triângulo ACG possui área igual a $\frac{1}{3}$, assim como o triângulo AGB. Deve-se notar que o triângulo AGB é isósceles e de base $AB = b$.

Repetindo o procedimento no triângulo isósceles AGB, o Baricentro G_1 o dividirá em três triângulos de áreas iguais a um terço da área de AGB, ou seja, a área do triângulo AG_1G será igual a $\frac{1}{9}$, assim como a área de AG_1B.

Repetindo o procedimento indefinidamente (tomando sempre o Baricentro G_n do triângulo de base $AB = b$), o triângulo AG_nB será sempre isósceles. Assim, as áreas dos triângulos ACG e dos sucessivos triângulos de vértices A e os Baricentros G_{n+1} e G_n formarão a sequência,

$$\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \ldots, \frac{1}{3^n}, \ldots\right)$$

que é exatamente a sequência (c_n).

Agrupando os sucessivos procedimentos no triângulo ABC, tem-se

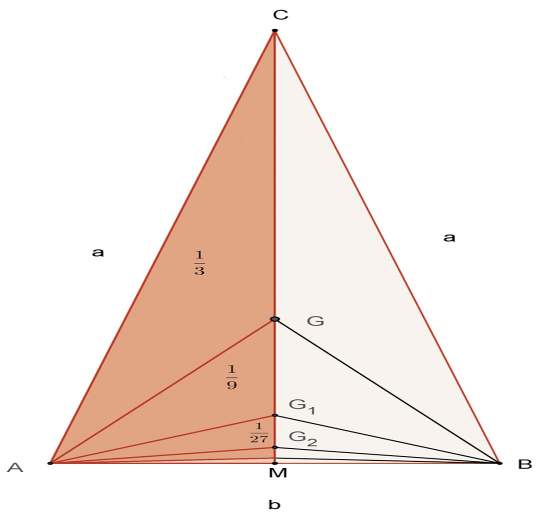

Figura 3.7: *Visualização geométrica da série* $\sum \frac{1}{3^n}$

Fonte: *elaborada pelo autor*

Isto mostra que a soma das áreas dos sucessivos triângulos, $\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \frac{1}{81}, \ldots$, preencherá a metade mais escura do triângulo ABC, mas nunca a ultrapassará. Ou seja, a série $S = \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \cdots + \frac{1}{2^n}, \cdots$ tem limite igual a $\frac{1}{2}$.

Refazendo o mesmo exemplo algebricamente teremos,

[11] Verificar esta propriedade pode ser um bom exercício de geometria a ser resolvido em sala de aula.

Note que $(C_n) = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \cdots, \frac{1}{3^n}, \cdots\right)$ é uma P.G cuja razão é $q = \frac{1}{3} = \left|\frac{1}{3}\right| < 1$ e $a_1 = \frac{1}{3}$, e o limite da soma dos seus termos (série), de acordo com a proposição 3, é

$$S = \frac{a_1}{1-q} \Longrightarrow S = \frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{2}{3}} = \frac{1}{2}$$

Portanto, $S = \frac{1}{2}$.

Isto mostra que a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n}$ converge para $\frac{1}{2}$ e como visto, chegou-se à mesma conclusão, tanto através da visualização geométrica como algebricamente. Cabe ressaltar que nos dois exemplos, o cálculo algébrico dentre outras vantagens, pode ser utilizado em sala de aula como uma forma de confirmação do resultado encontrado através da interpretação geométrica ou outros experimentos.

Em alguns casos não há grande dificuldade em perceber o que acontece. Sejam as séries: $\sum_{n=1}^{\infty} n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}$

1) A série $\sum_{n=1}^{\infty} n$. Suas somas parciais são:

$$\begin{array}{lcl}
S_1 & = & 1 \\
S_2 & = & 1+2=3 \\
S_3 & = & 1+2+3=6 \\
S_4 & = & 1+2+3+4=10 \\
\cdots & \cdots & \cdots \\
S_n & = & 1+2+3+4+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}
\end{array}$$

Pela definição, a convergência da série é determinada através do limite da sua soma parcial. Dessa forma, calculando o limite de S_n, tem-se:

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{n(n+1)}{2} = +\infty$$

Isto mostra que $\sum_{n=1}^{\infty} n$ é divergente. Este resultado é de fácil percepção, pois quantos mais números naturais forem somados à serie, percebe-se que ela continuará crescendo indefinidamente.

2) A série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1} = 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots$

É divergente, pois seu termo geral não tende a zero (mesmo que pareça). Suas somas reduzidas de ordem impar são iguais a 1 e as de ordem par são iguais a zero. Ou seja, como o limite de uma sequência (quando existe) é único, o limite da soma parcial não existe e a série é divergente.

Uma aplicação

Vejamos o seguinte exemplo de aplicação da definição de série a um problema de geometria euclidiana.

Na figura abaixo tem-se uma linha poligonal, de lados ora perpendicular a AB, ora perpendicular a AC. Sendo a e b, respectivamente, os dois primeiros lados da poligonal.

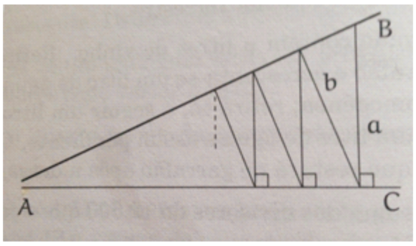

Figura 3.8: *Triângulo Retângulo - comprimento da poligonal*

Fonte: *MORGADO, WAGNER e ZANI (1993)*

Determinar:

a) O comprimento da mesma.

b) O comprimento do *n-ésimo* lado da poligonal.

Resolução:

Sejam $B_1, B_2, B_3, \cdots, B_n \cdots$ e $C_1, C_2, C_3, \cdots, C_n \cdots$ os respectivos pontos em que a poligonal encontra os lados AB e AC do triângulo ABC.

Nota-se que $\dfrac{b}{a} = \left|\dfrac{b}{a}\right| < 1$, pois o triângulo BCB_1 é retângulo em B_1 e possui hipotenusa $BC = a > b$. Além disso, os triângulos $BCB_1, B_1C_1B_2, B_2C_2B_3, \cdots$ são semelhantes, assim como $BCB_1, CB_1C_1, C_1B_2C_2, C_2B_3C_3, \cdots$ ou seja, os triângulos retângulos formados pela poligonal são todos semelhantes. Logo,

$$1 > q = \frac{b}{a} = \frac{B_1C_1}{b} = \frac{C_1B_2}{B_1C_1} = \frac{B_2C_2}{C_1B_2} = \frac{C_2B_3}{B_2C_2} = \cdots$$

Portanto, a sequência dos segmentos da poligonal $(a, b, B_1C_1, C_1B_2, B_2C_2, C_2B_3, \cdots)$ é uma P.G de razão $q = \frac{b}{a} = \left|\frac{b}{a}\right| < 1$. O comprimento da poligonal (S) pedido é dado pelo limite da série geométrica, que pela proposição 3 é:

$$S = \frac{a}{1 - \frac{b}{a}} = \frac{a}{\frac{a-b}{a}} = \frac{a^2}{a-b}.$$

O *n-ésimo* termo da poligonal é o *n-ésimo* termo da P.G determinada pelos segmentos da poligonal, onde $a_1 = a$ e $q = \frac{b}{a}$. Portanto,

$$a_n = a\left(\frac{b}{a}\right)^{n-1}$$

Comentário: O exemplo acima mostra a interdisciplinaridade do tema e sua aplicação em outras áreas da matemática. Do ponto de vista didático, quando proposto ao aluno, exige que o mesmo resgate seus conhecimentos sobre geometria euclidiana, triângulos, semelhanças e proporcionalidade, além de sequências e séries.

Critérios de Comparação

Existem séries que podem oferecer dificuldade em achar uma formula fechada para a sua soma parcial, o que torna mais trabalhosa a tarefa de encontrar o seu limite. Nessas e em muitas outras ocasiões é conveniente saber, pelo menos, afirmar a convergência ou a divergência da série. Com esse propósito, deve-se conhecer algumas proposições necessárias e convenientes ao ensino médio.

Proposição 5. Se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é convergente, então $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, ou seja, se $\lim_{n\to\infty} S_n = S$, então $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Demonstração:

Seja $S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$. Então existe $S = \lim_{n\to\infty} S_n$, pois a série S_n é convergente. Evidentemente, também se tem $S = \lim_{n\to\infty} S_{n-1}$. Logo,

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}(S_n - S_{n-1}) = \lim_{n\to\infty} S_n - \lim_{n\to\infty} S_{n-1} = S - S = 0$$

Ou seja,

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

A recíproca da Proposição 5 não é verdadeira (justificativa será apresentada na seção seguinte). Ou seja, não se deve achar que o fato da sequência (a_n) convergir para zero é suficiente para que a série $\sum a_n$ seja convergente.

No entanto, a primeira condição necessária para a convergência de uma série é que o seu termo geral a_n tenda para zero (LIMA, 2012. p. 135). Portanto, a proposição 5 é um teste muito útil para analisar a convergência de uma série, especialmente quando o se tem o interesse somente de saber se converge ou não converge, pois de acordo com a afirmação acima, se $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$,então $\sum a_n$ diverge [12].

Exemplo:

1. A série geométrica $\sum\limits_{n=0}^{\infty} q^n$ é divergente quando $|q| \geqslant 1$, pois conforme vimos na proposição 4, o termo geral da série não tende para zero. Quando $|q| < 1$, a série geométrica $\sum\limits_{n=0}^{\infty} q^n$ converge, pois de acordo com a proposição 3, $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \dfrac{1}{1-q}$. Além disso $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$.

2. A série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n}{2n+1}$ é divergente, pois $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{2n+1} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{2+\dfrac{1}{n}} = \dfrac{1}{2}$.

3. Como foi visto, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n$ diverge, pois $\lim\limits_{n\to\infty} n$ é diferente de zero.

Proposição 6. Seja a sequência constante $(a_n) = (k, k, k, \cdots, k, \cdots)$, sendo k qualquer número real diferente de zero, ou seja, $a_n \neq 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$. A série $\sum k$ é divergente.

Demonstração:

Sabe-se que $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} k = k$. Logo, pelo critério acima, a série $\sum k$ é divergente.

Exemplo 7. A série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2} + \cdots + \dfrac{1}{2} + \cdots$ é divergente.

Exemplo 8. A série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 3 = 3 + 3 + \cdots + 3 + \cdots$ é divergente.

[12] Isto pode ser mais bem entendido se percebermos que: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ é convergente $\longrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ é equivalente a $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0 \longrightarrow \sum a_n$ é divergente.

Proposição 7. Sejam $\sum a_n$ e $\sum b_n$ séries de termos positivos.

a) Se $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge e $b_n \geqslant a_n, \forall\, n \in \mathbb{N}$, então $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge;

b) Se $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ diverge e $b_n \leqslant a_n, \forall\, n \in \mathbb{N}$, então $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge.

Demonstração:

a) Como $b_n > 0$ para todo n, então a sequência das somas parciais $S_n = \sum_{1}^{n} b_n$ é crescente, ou seja, $S_{n+1} > S_n, \forall\, n$. O mesmo acontece com a_n, sendo $T_n = \sum_{1}^{n} a_n$, tem-se $T_{n+1} > T_n$. Além disso, como $b_n \geqslant a_n, \forall\, n$, tem-se:

$$T_n \leqslant S_n.$$

Se $\sum b_n$ converge então, pela definição de convergência de uma série, existe o limite da sua soma parcial, ou seja,

$$T_n \leqslant S_n < \lim_{n\to\infty} S_n = S$$

Portanto, (T_n) é uma sequência crescente e limitada (superiormente por S e inferiormente por zero). Logo T_n converge [13] para um certo T, ou seja, $T = \lim_{n\to\infty} T_n$. O que implica $\sum a_n$ converge.

b) Suponhamos que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ seja convergente.

Sendo $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ convergente e $b_n \leqslant a_n, \forall\, n \in \mathbb{N}$. Então pela letra *a)*, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge. Isto contraria a hipótese de $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ ser divergente. Portanto, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge.

3.4.1 A Série harmônica

Seja a sequência $\left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots\right)$. Na seção sobre limite de sequência foi visto que ela converge para zero. Mas o que se pode afirmar sobre a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots$$

[13] Ver apêndice

Antes da resposta conheçamo-la melhor.

A série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ recebe o nome Série Harmônica (o nome harmônica vem da semelhança com a proporcionalidade do comprimento de ondas sonoras) e transcende os limites da matemática pura, é encontrado na física (no estudo de ondas) e é também muito aplicada na música, conforme veremos a seguir.

Segundo ARDELE (2001, p.1) O estudo e entendimento da Série Harmônica teve origem no século VI a.c com as experiências feitas pelo filósofo e matemático grego Pitágoras. Pitágoras afirmou que qualquer som para ser musical teria que ter altura definida, emitido por um instrumento ou por fonte natural, resultando em uma vibração ondulatória regular. Essa vibração é composta pelo som gerador (1ª nota) e outros sons definidos de intensidade menor e frequência mais aguda, chamados de sons harmônicos ou série harmônica.

> Assim, se tomarmos como exemplo uma corda de um violão (6ª Corda - Nota Mi Grave), notaremos que além de vibrar em toda a sua extensão, também vibra em sua metade, em sua terça parte, em sua quarta parte e quinta parte, etc., produzindo sons cada vez mais agudos. A vibração da corda pode ser definida como ciclos ou Hertz (01 ciclo = é igual a ida e volta da vibração da corda). Então ao tocarmos a 6ª Corda do Violão (nota Mi Grave) temos: 1ª ciclo = nota Mi (fundamental); 2º ciclo = nota Mi, uma oitava mais aguda; 3º ciclo = nota sol uma oitava + uma quinta aguda; etc. A série harmônica é fisicamente infinita, e suas primeiras 16 notas surgem, ao subdividir uma corda vibrante (experiência de Pitágoras) em 2 – 3 – 4 – 5 – 6 – 7 – 8 – 9 – 10, etc. partes iguais (ARDELE, 2001.p.1-2).

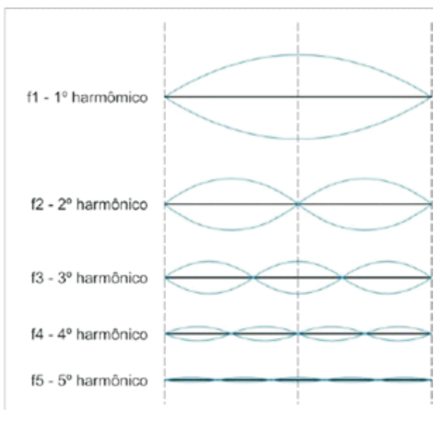

Figura 3.9: *Série harmônica de uma nota musical (subdivisão de harmônicos)*

Fonte: *http://pt.scribd.com/doc/56289539/Apostila-Acustica-Eletrica-Em-Audio*

CASTRO (2012) faz uma associação entre nota musical e cor através da série harmônica.

> $(\cdots)$ criei determinados padrões para representar notas em oitavas diferentes e para diferenciar suas distâncias em uma série harmônica. Eis os padrões que estabeleci:
> Para diferenciar a mesma nota em oitavas diferentes, dobra-se seu valor de brilho quando ascende na escala e divide-se pela metade quando descende a escala.
> Para representar as notas de uma série harmônica, vai-se aumentando seu contraste à razão de $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}$, assim por diante (como quando se desenha um objeto distante). Assim, uma única nota estará associada com diversas tonalidades que irá compor uma cor relacionada precisamente a esta nota.

Como visto, a série harmônica é um instrumento matemático de grande utilidade na teoria musical. Iniciou-se esta seção com uma pergunta a respeito da série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$. A resposta é que a série é divergente. Este fato costuma gerar estranheza num primeiro momento, pois como visto, o seu termo geral se torna tão pequeno quanto se queira, bastando tomar n suficientemente grande, ou seja, a diferença para zero se torna cada vez menor e por fim chega-se à conclusão de que $\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0$.

O fato de a série harmônica ser divergente justifica a afirmação de que a recíproca da proposição 5 não é verdadeira, pois neste caso, temos uma série cujo termo geral tem limite zero, mas que é divergente. Este fato fica mais bem entendido com a demonstração da proposição a seguir.

Proposição 8. A série harmônica $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ é divergente.

Demonstração:

A demonstração será feita utilizando critérios de comparação. Vejamos,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots$$

Agrupando os termos da série da seguinte forma, tem-se

- 1 nota-se que $1 \geqslant \frac{1}{2}$;
- $\frac{1}{2}$ nota-se que $\frac{1}{2} \geqslant \frac{1}{2}$;
- $\frac{1}{3}+\frac{1}{4}$ nota-se que $\frac{1}{3}+\frac{1}{4} \geqslant \frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$;
- $\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}$ nota-se que $\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8} \geqslant \frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}=\frac{1}{2}$;
- $\frac{1}{9}+\frac{1}{10}+\cdots+\frac{1}{16}$ nota-se que $\frac{1}{9}+\frac{1}{10}+\cdots+\frac{1}{16} \geqslant \frac{1}{16}+\cdots+\frac{1}{16}=\frac{1}{2}$;

$\ldots$ $\ldots$ $\ldots$

E assim sucessivamente [14], de forma que $\left(\frac{1}{2^{k-1}+1}+\frac{1}{2^{k-1}+2}+\cdots+\frac{1}{2^{k}}\right) > \left(\frac{1}{2^{k}}+\frac{1}{2^{k}}+\cdots+\frac{1}{2^{k}}\right)=\frac{1}{2}$ e cada parêntese possui 2^{k-1} termos.

Sejam as sequências,

$$(a_n)=\left(1,\left(\frac{1}{2}\right),\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right),\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right),\cdots,\left(\frac{1}{2^{k-1}+1},\frac{1}{2^{k-1}+2}+\cdots+\frac{1}{2^{k}}\right),\cdots\right)$$

e,

$$(b_n)=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2},\cdots,\frac{1}{2},\cdots\right).$$

Foi visto com o agrupamento que, $b_n \leqslant a_n$, para todo n. Assim, como $\sum b_n$ é divergente, pelo critério de comparação conclui-se que a série $\sum a_n$ é divergente. Além disto, $\sum a_n = \sum \frac{1}{n} = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots$. Isto mostra que a série harmônica $\left(\sum \frac{1}{n}\right)$ é divergente [15].

[14] Generalizando, teríamos: $\left(\frac{1}{2^{k-1}+1}+\frac{1}{2^{k-1}+2}+\cdots+\frac{1}{2^{k}}\right) > \left(\frac{1}{2^{k}}+\frac{1}{2^{k}}+\cdots+\frac{1}{2^{k}}\right)=\frac{1}{2}$, onde cada parêntese possui 2^{k-1} termos.

[15] O primeiro matemático a demonstrar a divergência da série harmônica foi Nicole Oresme (1325-1382), Bispo de Lisieux, professor da universidade de paris, foi um destacado intelectual da sua época em vários campos do conhecimento, como filosofia, matemática, astronomia, física, biologia, música e economia.

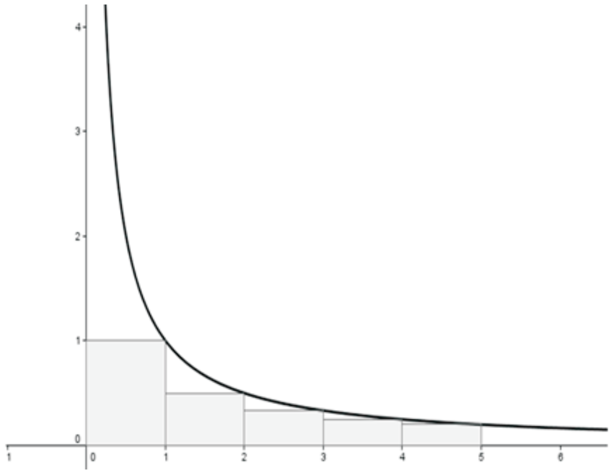

Figura 3.10: *Representação geométrica da série harmônica*

Fonte: *SANTOS (2013)*

Um fato histórico

Além das contribuições já citadas no capítulo 2, Leonard Euller realizou outros trabalhos sobre sequências e séries. Notadamente, se utilizou do fato de a série harmônica ser divergente para provar o resultado já demonstrado por Euclides sobre a existência de infinitos números primos, conforme abaixo:

Se existissem somente k primos - $p_1, p_2, \cdots, p_k$ - então todo número da forma $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_z}$. Seja o maior dos expoentes α_i para o número n e formemos o produto

$$P = \left(1 + \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_1^2} + \cdots + \frac{1}{p_1^a}\right)\left(1 + \frac{1}{p_2} + \frac{1}{p_2^2} + \cdots + \frac{1}{p_2^a}\right)\cdots\left(1 + \frac{1}{p_k} + \frac{1}{p_k^2} + \cdots + \frac{1}{p_k^a}\right)$$

Nesse produto os termos $\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{n}$ forçosamente aparecem, bem como outros, portanto o produto P não pode ser menor que $\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{n}$. Da fórmula para a soma de uma progressão geométrica vemos que os fatores no produto são respectivamente menos que

$$\frac{1}{1 - \frac{1}{p_1}}, \frac{1}{1 - \frac{1}{p_2}}, \frac{1}{1 - \frac{1}{p_2}},$$

e assim por diante. Logo,

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} < \frac{p_1}{p_1 - 1} \times \frac{p_2}{p_2 - 1} \times \frac{p_3}{p_3 - 1} \cdots \times \frac{p_k}{p_k - 1}$$

para todos os valores de n. Então, se K, o número de primos, fosse finito, a série harmônica seria necessariamente convergente. Com uma análise bem elaborada Euller mostrou que a série infinita formada com os recíprocos dos primos é ela própria divergente, a soma S_n sendo assíntótica a $ln\ n$ para valores do inteiro n (BOYER, 1996. p. 308).

Viu-se nesta seção que o conhecimento da *série harmônica* e suas características, além de ter sua importância dentro da matemática, como no caso dos números primos de Euller, é aplicável em outras áreas do conhecimento, como no exemplo da música. Além disso, a comprovação de sua divergência pode ser muito útil para um melhor entendimento sobre séries numéricas, especialmente para compreender que o fato do limite do termo geral ser zero não é o bastante para que uma série seja convergente.

4 Aplicações na geometria fractal

Muitos estudantes, especialmente na educação básica, costumam pensar que ao contrário das demais ciências, a matemática não têm evoluído. Isto se deve, dentre outros aspectos, ao fato de muitos dos elementos matemáticos que conhecem, especialmente os geométricos, terem sido desenvolvidos há séculos ou até mesmo há milênios. Isto pode ser prejudicial ao aprendizado em matemática, principalmente no que tange à motivação. Há algumas ferramentas que podem ser utilizadas para minimizar esses entraves. Uma delas é explorar os conceitos matemáticos através de modelos e padrões ainda desconhecidos pela maioria dos estudantes do ensino médio, elementos estes que possibilitarão o conhecimento de novas áreas da matemática e suas possíveis aplicações. Nesse contexto, a *Geometria Fractal* apresenta elementos bastante interessantes.

> $(\cdots)$ no Ensino Médio, aprofundam-se os estudos das noções de geometrias não-euclidianas ao abordar a geometria dos fractais, geometria projetiva, geometria hiperbólica e elíptica. Na geometria dos fractais, pode-se explorar: o floco de neve e a curva de Koch; triângulo e tapete de Sierpinski, conduzindo o aluno a refletir e observar o senso estético presente nessas entidades geométricas, estendendo para as suas propriedades $(\cdots)$ (PARANÁ, 2008. p. 57).

Mas o que é a *Geometria Fractal? Qual a sua origem?*

Para JANOS (2008) a Geometria Fractal é uma linguagem matemática que descreve, analisa e modela as formas encontradas na natureza.

Nas últimas décadas o mundo passou por transformações intimamente ligadas ao conhecimento matemático, o surgimento da informática e dos processos computacionais deram fortes contribuições para o desenvolvimento da Geometria Fractal. Mas, o processo de surgimento dessa nova geometria se iniciou bem antes, quando alguns matemáticos do final do século XIX e do início do século XX, como Cantor [1], Koch [2], Sierpinski [3], Peano

[1]Geog Cantor (1945-1918), matemático Russo cujos trabalhos ligados Teoria dos Conjuntos estão na base do aparecimento do famoso fractal Conjunto de Cantor.

[2]Niels Fabian Helge Von Koch (1870-1924), matemático Sueco que introduziu em 1904 o fractal conhecido como A Curva de Koch.

[3]Waclaw Sierpinski (1882-1969), matemático Polaco que criou em 1916 o fractal que recebeu o seu nome Triangulo de Sierpinski.

[4]e Hilber [5] analisaram e propuseram a criação de figuras pouco convencionais e estranhas ao seu tempo, que receberam o nome de ″monstros matemáticos″.

Em 1975 o matemático Polonês Benoit Mandelbrot, nascido em Varsóvia - 1924, criou a denominação FRACTAIS, à qual os já conhecidos ″monstros matemáticos″ se enquadram. Mandelbrot denominou fractais, baseando-se no latim, do adjetivo fractus, cujo verbo frangere correspondente significa quebrar: criar fragmentos irregulares, fragmentar.

Mandelbrot Inicialmente definiu:

- um fractal é, por definição, um conjunto para o qual a dimensão Hausdorff-Besicovitch excede estritamente a dimensão topológica.

  Outra definição:

  Um conjunto F é fractal se, por exemplo:

- F possui alguma forma de ″autossimilaridade″ ainda que aproximada ou estatística;

- A dimensão fractal, definida de alguma forma, é maior que a sua dimensão topológica;

- O conjunto F pode ser expresso através de um procedimento recursivo ou iterativo (BARBOSA, 2005. p. 18-19)

Na definição acima, encontramos as duas principais características de um fractal, a autossimilaridade (ou autossemelhança) e dimensão não inteira.

A auto similaridade (ou autossemelhança) diz respeito ao fato de uma parte do fractal ser igual (ou similar) ao todo.

[4]Giuseppe Peano (1858-1932) matemático Italiano que descreveu a primeira curva em 1890. Desde então, foram descobertas, por outros matemáticos, curvas que por possuem características comuns à primeira, foram denominadas Curvas de Peano.

[5]David Hilbert (1862-1943), matemático alemão que criou o fractal A Curva de Hilbert.

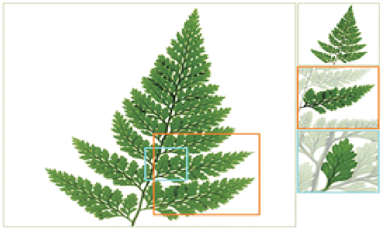

Figura 4.1: *Autssemelhança na folha de samambaia*

Fonte: *http://www.educ.fc.ul.pt/icm/icm99/icm43/exempl_f.htm*

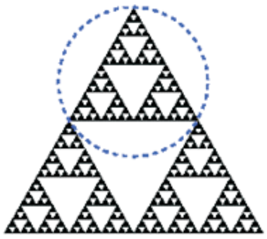

Figura 4.2: *Autossemelhança no Triângulo de Sierpinski*

Fonte: *http://en.wikipedia.org/wiki/File:Sierpinski_triangle_evolution.svg*

A outra característica peculiar aos fractais é a dimensão. É possível mostrar que a dimensão d de um objeto pode ser encontrada através da expressão:

$$d = \frac{logN}{log\frac{1}{r}}$$

Onde:

N = número de partes em que se divide o objeto;

r = coeficiente de redução

Esta relação é válida para calcular a dimensão de qualquer objeto, tanto figuras euclidianas de dimensão inteira como figuras fractais com dimensão fracionária.

Essas características pedem ser mais bem entendidas num estudo mais aprofundado sobre a geometria fractal. Esta seção propõe a utilização de alguns fractais clássicos como instrumentos de fixação da aprendizagem dos conceitos vistos sobre sequências e séries numéricas. Isto é possível e pertinente, pois

> A geometria fractal permite a integração de diversos temas da matemática e de outras áreas, desde as ciências naturais às econômico-sociais e à tecnologia. Quando incluída no ensino, permite desenvolver o espírito experimental dos alunos de forma a entender a geometria de objetos não tradicionais e de estabelecer modelos

> matemáticos para auxiliar os estudos dos fenômenos naturais (SANTOS, 2006. p. 7).

Neste capítulo, serão analizados a curva de Koch, o floco de neve de Koch e o triângulo de Sierpinski.

4.1 A curva de Koch

1. No estágio inicial é um segmento de reta de comprimento l;
2. No estágio 1 o segmento é dividido em três partes iguais, sendo retirado de a parte do meio. Sobre a parte central retirada é construído um triângulo equilátero de lado $\frac{l}{3}$, retirando-se a sua base;
3. No estágio 2 é repetido o processo do estágio 1 nos quatro segmentos de comprimento $\frac{l}{3}$;
4. O processo é repetido indefinidamente, conforme a figura abaixo.

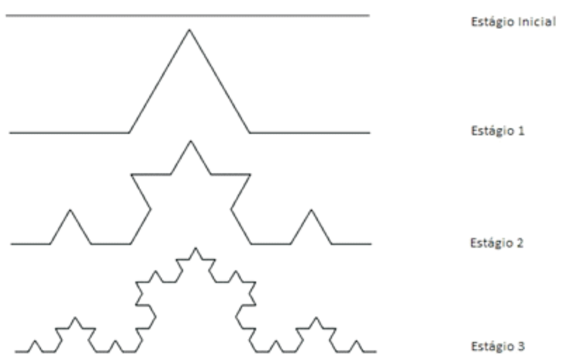

Figura 4.3: *A curva de Koch - estágio inicial ao estágio 3*

Fonte: *o autor*

Percebe-se que há três elementos do fractal que sofrem alteração de um estágio para o outro, o número de segmentos (lados), o comprimento de cada segmento (lado) e o perímetro (comprimento total) da curva. Sendo $N(l)_n, l_n$ e P_n, respectivamente o número de segmentos, o comprimento de cada segmento e o perímetro da curva no estágio n, temos:

O número de segmentos $(N(l)_n)$

Vejamos,

No estágio inicial $(N(l)_0)$	temos	1 segmento
No estágio 1	temos	4 segmentos
No estágio 2	temos	16 segmentos
No estágio 3	temos	64 segmentos

Nota-se que na sequência $(1, 4, 16, 64, \ldots)$, formada pelos números de segmentos em cada etapa, apresenta os quocientes $\frac{4}{1} = \frac{16}{4} = \frac{64}{16} = \cdots = 4$, constantes e iguais a 4. Portanto, essa sequência é uma progressão geométrica de razão $q = 4$. Dessa forma, o termo geral da sequência é,

$$N(l)_n = 4^n.$$

Esta expressão fornece o número de segmentos da curva de Koch no estágio n.

Assim, concluí-se que o número de segmentos da curva de Koch cresce em P.G de razão 4, ou seja, apresenta taxa de crescimento [6] igual a 300%. Além disso, $\lim_{n\to\infty} N(l)_n = \lim_{n\to\infty} 4^n = +\infty$ Portanto, o número de segmentos da curva de Koch tende ao infinito.

O comprimento de cada segmento (l_n)

Vejamos,

No estágio inicial (l_0)	o segmento mede	l
No estágio 1	cada segmento mede	$\frac{l}{3}$
No estágio 2	cada segmento mede	$\frac{l}{9} = l\left(\frac{1}{3}\right)^2$
No estágio 3	cada segmento mede	$\frac{l}{27} = l\left(\frac{1}{3}\right)^3$

Deve-se notar que a sequência $\left(l, \frac{l}{3} \left(\frac{l}{3}\right)^2, \left(\frac{l}{3}\right)^3, \cdots\right)$, formada pelos comprimentos de cada segmento nas sucessivas etapas apresenta os quocientes de cada termo pelo seu

[6]Como foi visto a P.G é a sequência que apresenta taxa de crescimento constante e igual a $q-1$. Onde q é a razão da *progressão geométrica*.

antecessor (assim como o número de segmentos) constante e igual a $\frac{l}{3}$. Portanto, a sequência é uma progressão geométrica de razão $q = \frac{1}{3}$. Dessa forma, o termo geral da sequência é,

$$l_n = l\left(\frac{1}{3}\right)^n.$$

Esta expressão fornece o comprimento de cada segmento da Curva de Koch no estagio n.

Assim, concluí-se que o comprimento de cada segmento da Curva de Koch decresce em P.G de razão $q = \frac{1}{3}$, ou seja, apresenta taxa de crescimento [7] igual a $-66,66\cdots\%$ $\left(\text{ou } \frac{-2}{3}\right)$. Além disso, $\left|\frac{1}{3}\right| < 1$ isto implica, pela proposição 2, que $\lim_{n\to\infty} l_n = lX \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n = 0$. Portanto, o comprimento de cada segmento da curva de Koch tende para zero.

O perímetro da curva (P_n)

Vejamos,

No estágio n o número de segmentos é $N(l)_n = 4^n$ e o comprimento de cada segmento é $l_n = l\left(\frac{1}{3}\right)^n$. Assim, o perímetro da curva no estágio n será:

$$P_n = N(l)_n X l_n = 4^n x l \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

Portanto,

$$P_n = l\left(\frac{4}{3}\right)^n.$$

Esta expressão nos fornece o perímetro da curva de Koch no estágio n. Note que a sequência P_n é uma *progressão geométrica* de razão $q = \frac{4}{3}$ e $P_0 = l$.

Assim, concluí-se que o perímetro da curva de Koch cresce em P.G de razão $q = \frac{4}{3}$, ou seja, apresenta taxa de crescimento igual a $33,33\cdots\%$ $\left(\text{ou } \frac{1}{3}\right)$.

Deve-se notar também que $P_n = l\left(\frac{4}{3}\right)^n$ é a soma parcial da série que fornece o perímetro da curva. Aplicando o limite, quando n tende ao infinito, tem-se:

$$\lim_{n\to\infty} P_n = \lim_{n\to\infty} l\left(\frac{4}{3}\right)^n = lX \lim_{n\to\infty}\left(\frac{4}{3}\right)^n$$

[7] Neste caso, decrescimento.

Como $\frac{4}{3} > 1$, pela proposição 4, $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{4}{3}\right)^n = +\infty$, ou seja, o perímetro da Curva de Koch cresce indefinidamente (tende ao infinito) quando n tende ao infinito.

4.2 O floco de neve de Koch

O floco de neve de Koch é o fractal obtido através de uma variação da Curva de Koch. Neste caso, ao invés de iniciarmos com um segmento de reta, o estágio inicial será um triângulo equilátero de lado l, ou seja, o estágio $n + 1$ é obtido a partir do estágio n, dividindo cada lado em três partes iguais, construindo externamente sobre a parte central um triângulo equilátero e suprimindo então a parte central, conforme a figura abaixo:

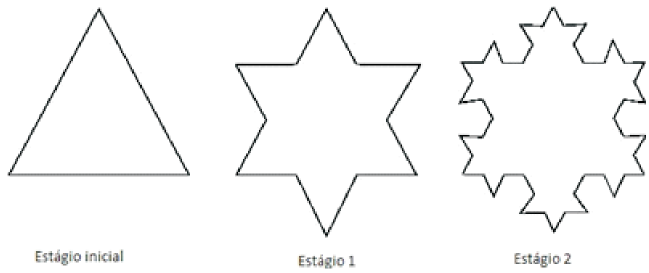

Figura 4.4: *Floco de neve de Koch - estágio inicial ao estágio 2*

Fonte: *o autor*

Análise do floco de neve de Koch

Percebe-se que neste caso, além dos elementos já analisados na Curva de Koch (número de segmentos, comprimento de cada segmento (lado) e o perímetro), o número de triângulos acrescentados e a área delimitada pelo Floco de Neve de Koch também sofrem variação de um estágio para o outro. Sendo $N(l)_n, l_n, P_n, N(T)_n$ e A_n, respectivamente o número de segmentos, o comprimento de cada segmento, o perímetro, o número de triângulos acrescentados e a área delimitada pelo Floco de Neve de Koch no estágio n, temos:

O número de segmentos $(N(l)_n)$

A única diferença do Floco de Neve para a Curva de Koch, neste caso, é que agora no estágio inicial temos três segmentos (os três lados do triângulo). Assim, o número de segmentos da Curva de Koch no estágio n é:

$$N(l)_n = 3 \times 4^n$$

As considerações são as mesmas vistas na Curva de Koch.

O comprimento de cada segmento/lado (l_n)

Aqui, o número de segmentos inicial não interfere no comportamento do segmento. Dessa forma, o comprimento de cada segmento no estágio n do Floco de Neve de Koch será,

$$l_n = l\left(\frac{1}{3}\right)^n = \frac{l}{3^n}.$$

Logo, a sequência formada pelos comprimentos dos segmentos nos sucessivos estágios será $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \cdots, \frac{1}{3^n}, \cdots\right)$.

As demais considerações são as mesmas vistas na Curva de Koch.

O perímetro (P_n)

Para o perímetro, a única diferença do Floco de Neve para a Curva de Koch é que agora no estágio inicial temos três segmentos (os três lados do triângulo). Assim, o perímetro do Floco de Neve de Koch no estágio n é:

$$P_n = 3l\left(\frac{4}{3}\right)^n.$$

As demais considerações são as mesmas vistas na Curva de Koch. O Perímetro diverge (tende ao infinito).

O número de triângulos acrescentados $N(T)_n$

Como em cada estágio, cada segmento se divide em três, exclui-se o segmento do meio e acrescentam-se mais dois segmentos para formar um triângulo equilátero (sem a base), temos a seguinte contagem de segmentos:

Estágio $n-1$: 1 segmento $\longrightarrow$ Estágio $n : 3 - 1 + 2 =$ **4 segmentos** de comprimento um terço do anterior $\longrightarrow$ deram origem a **1(um) novo triângulo**.

Como já sabemos que o número de segmentos no estágio n é

$$N(l)_n = 3 \times 4^n.$$

Então, no estágio n, tem-se:

$$\begin{array}{lcl} 4 \text{ segmentos} & \longrightarrow & 1 \text{ novo triângulo} \\ 3 \times 4^n & \longrightarrow & N(T)_n \end{array}$$

Portanto,

$$N(T)_n = \frac{3}{4} \times 4^n \text{ ou } N(T)_n = 3 \times 4^{n-1}.$$

Esta expressão fornece o número de triângulos que são acrescentados em cada estágio, a partir do primeiro.

Isto mostra que a sequência do número de triângulos que são acrescentados a cada estágio é uma *progressão geométrica*. Onde, $a_1 = 3$ e $q = 4$. Assim, a sequência de triângulos adicionados é $(3, 12, 48, 96, \cdots, 3 \times 4^{n-1}, \cdots)$. Com isso conclui-se que, assim como ocorre com o número de segmentos, a quantidade de triângulos que são acrescentados ao Floco de Neve de Koch cresce em P.G de razão 4, ou seja, apresenta taxa de crescimento igual a 300%. Além disso, $\lim_{n\to\infty} N(T)_n = \lim_{n\to\infty} 3 \times 4^{n-1} = +\infty$. Portanto, o número de triângulos acrescentados tende ao infinito.

A Área (A_n)

Sabe-se que a área deste fractal no estágio inicial é a área do triângulo equilátero de lado l. Portanto,

$$A_0 = \frac{l^2\sqrt{3}}{2}.$$

Chamando a área acrescentada até o estágio n de $A_{acres.}$, então a área total (A_n) do Floco de Neve de Koch no estágio n, será

$$A_n = A_0 + A_{acres.}$$

Como já se conhece A_0, vamos ao cálculo de $A_{acres.}$ Para tanto, devemos observar a área que é acrescentada em cada estágio. Isto é possível, pois já sabemos a quantidade de triângulos que são adicionados ($N(T)_n$) e o comprimento de cada segmento (l_n). A área acrescida no estágio n será o produto de $N(T)_n$ pela área de um triângulo.

Vejamos,

No estágio n o comprimento do lado de cada um dos triângulos adicionados é $\dfrac{l}{3^n}$. Logo a área de um triângulo acrescentado no estágio n é:

$$A_1 = \frac{\left(\dfrac{l}{3^n}\right)^2 \sqrt{3}}{4} \longrightarrow A_1 = \frac{l^2\sqrt{3}}{4} \times \frac{1}{9^n}.$$

Portanto, a área total acrescida no estágio n será

$$N(T)_n \times A_1 = \frac{3}{4} \times 4^n \times \frac{l^2\sqrt{3}}{4} \times \frac{1}{9^n} = \frac{3l^2\sqrt{3}}{4} \times \frac{1}{9} \times \left(\frac{4}{9}\right)^{n-1}.$$

Assim, a sequência das sucessivas áreas acrescidas será

$$\left(\frac{3l^2\sqrt{3}}{4} \times \frac{1}{9}, \frac{3l^2\sqrt{3}}{4} \times \frac{1}{9} \times \left(\frac{4}{9}\right), \frac{3l^2\sqrt{3}}{4} \times \frac{1}{9} \times \left(\frac{4}{9}\right)^2, \ldots, \frac{3l^2\sqrt{3}}{4} \times \frac{1}{9} \times \left(\frac{4}{9}\right)^{n-1}, \ldots\right).$$

A sequência obtida é uma *progressão geométrica*, onde

$$a_1 = \frac{3l^2\sqrt{3}}{4} \times \frac{1}{9}, \ q = \frac{4}{9} \ \text{ e } \ a_n = \frac{3l^2\sqrt{3}}{4} \times \frac{1}{9} \times \left(\frac{4}{9}\right)^{n-1}.$$

Como estamos à procura das áreas acrescentadas até o estágio n, $A_{acres.}$ será dada pela soma dos n primeiros termos da PG, ou seja,

$$A_{acres.} = a_1 \frac{1-q^n}{1-q} \Longrightarrow A_{acres.} = \frac{3l^2\sqrt{3}}{4} \times \frac{1}{9} \times \frac{1-\left(\dfrac{4}{9}\right)^n}{1-\dfrac{4}{9}}$$

$$\therefore$$

$$A_{acres.} = \left(\frac{l^2\sqrt{3}}{4} \times \frac{3}{5}\right) - \left(\frac{3l^2\sqrt{3}}{20} \times \left(\frac{4}{9}\right)^n\right).$$

Retomando A_n, temos

$$A_n = A_0 + A_{acres.}$$

$$A_n = \frac{l^2\sqrt{3}}{4} + \left(\frac{l^2\sqrt{3}}{4} \times \frac{3}{5}\right) - \left(\frac{l^2 3\sqrt{3}}{20} \times \left(\frac{4}{9}\right)^n\right)$$

$$\therefore$$

$$A_n = l^2\left(\frac{2\sqrt{3}}{5} - \frac{3\sqrt{3}}{20} \times \left(\frac{4}{9}\right)^n\right)$$

E esta é a expressão que fornece a área do Floco de Neve de Koch no estágio n.

Note que o resultado encontrado é a soma parcial da série

$$\left(\frac{l^2\sqrt{3}}{4}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3l^2\sqrt{3}}{4}. \times \frac{1}{9} \times \left(\frac{4}{9}\right)^{n-1}.$$

Para encontrar o valor da série, vamos aplicar o limite, quando n tende ao infinito, à sua soma parcial $S_n = A_n$. Assim, temos

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} S_n &= \lim_{n\to\infty} A_n \\
&= \lim_{n\to\infty} l^2\left(\frac{2\sqrt{3}}{5} - \frac{3\sqrt{3}}{20} \times \left(\frac{4}{9}\right)^n\right) \\
&= l^2\left\{\left(\lim_{n\to\infty} \frac{2\sqrt{3}}{5}\right) - \left(\frac{3\sqrt{3}}{20} \times \lim_{n\to\infty} \left(\frac{4}{9}\right)^n\right)\right\}.
\end{aligned}$$

Mas, $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{4}{9}\right)^n = 0$, pois $\left|\frac{4}{9}\right| < 1$ e $\lim_{n\to\infty} \frac{2\sqrt{3}}{5} = \frac{2\sqrt{3}}{5}$ (constante). O que resulta,

$$\lim_{n\to\infty} A_n = \frac{2\sqrt{3}}{5}\, l^2.$$

Portanto, a área do Floco de Neve de Koch tende (converge) para $\frac{2\sqrt{3}}{5}\, l^2$. O que leva a concluir que a área delimitada pelo Floco de Neve de Koch nunca ultrapassa esse resultado, qualquer que seja o número de estágios.

Isto também pode ser percebido geometricamente. Tomando o hexágono de lado [8] igual a $l\frac{\sqrt{3}}{3}$ e área $A_h = \frac{\sqrt{3}}{2}l^2 > \frac{2\sqrt{3}}{5}l^2$, vê-se que a área do Floco de Neve de Koch é menor que a área do hexágono, conforme encontrado em CANGUSSU (2013. p. 41).

[8] A medida do lado do hexágono é dois terços da mediana (igual à altura) do triângulo do estágio inicial (de lado l), ou seja, $l_h = \frac{2}{3}\frac{l\sqrt{3}}{2} = l\frac{\sqrt{3}}{5}$ e $A_h = 6 \times \frac{\left(\frac{l\sqrt{3}}{3}\right)^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{l^2\sqrt{3}}{2}$.

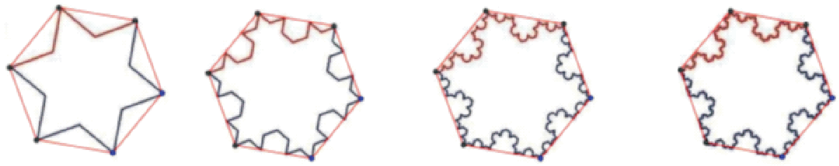

Figura 4.5: *Hexágono e o floco de neve*

Fonte: *CANGUSSU (2013)*

Dessa forma, conclui-se que o Floco de Neve de Koch é um fractal que apresenta o perímetro infinito, porém limitado por uma área que é finita.

4.3 O triângulo de Sierpinski

O fractal estudado nesta seção será o Triângulo de Sierpinski (ou A cesta de Sierpinski). Este fractal, assim como os fractais de Koch vistos acima, apresenta características notáveis. É obtido a partir de sucessivos processos (estágios), conforme abaixo:

1. No estágio inicial um triângulo equilátero de lado igual a l;
2. No estágio 1 - Marcar os segmentos dos pontos médios formando quatro triângulos equiláteros e semelhantes ao estágio inicial. Eliminar (remover) o central (que aparece invertido em relação ao original), o que pode ser codificado com cor branca e os três que restarem com a cor preta.
3. Estágio 2 - Repetir o procedimento do estágio 1 em cada um dos triângulos não eliminados;
4. Repetir o processo indefinidamente, conforme a figura abaixo.

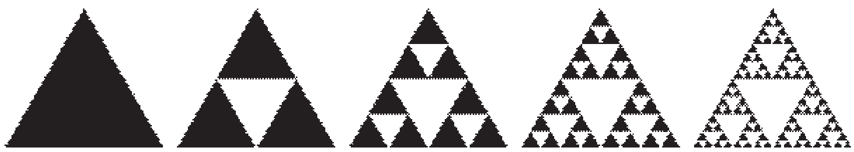

Figura 4.6: *Triângulo de Sierpinski - Estágio inicial ao estágio 4*

Fonte: *http://en.wikipedia.org/wiki/File: Sierpinski_triangle_evolution.svg*

Percebe-se que há quatro elementos do fractal que sofrem alteração de um estágio para o outro, o comprimento de cada segmento (lado), o número de triângulos, o perímetro e a área restante (escura). Sendo l_n, T_n, P_n e A_n, respectivamente, o comprimento de cada segmento (lado), o número de triângulos, o perímetro e a área restante (escura) no estágio n, tem-se:

O comprimento de cada lado (segmento)

Vamos à análise, conforme a tabela abaixo:

ESTÁGIO	MEDIDA DE CADA LADO (SEGMENTO)		
Inicial (zero)	l	=	l
1	l/2	=	l/2
2	(l/2)/2	=	(l/2)²
3	(l/2)²/2	=	(l/2)³

Tabela 4.1: *Variação do comprimento dos lados no triângulo de Sierpinski*

Como pode-se ver, a sequência dos sucessos comprimentos de cada lado no triângulo de Sierpinski é uma *progressão geométrica* de razão $q = \dfrac{1}{2}$ e $a_0 = l$. Assim, o comprimento de cada lado no estágio n é,

$$l_n = l\left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

Aplicando o limite, quando n tende ao infinito, temos:

$$\lim_{n\to\infty} l_n = \lim_{n\to\infty} l\left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$$

Portanto, o comprimento de cada lado do Triângulo de Sierpinski tende para zero.

O número de triângulos

Analiza-se segundo a tabela abaixo.

ESTÁGIO	NÚMERO DE TRIÂNGULOS		
Inicial (zero)	1	=	3^0
1	3	=	3^1
2	9	=	3^2
3	27	=	3^3

Tabela 4.2: *Variação do número de triângulos - Triângulo de Sierpinski*

Como pode-se ver, a sequência dos sucessos números de triângulos em cada estágio do triângulo de Sierpinski é uma *progressão geométrica* de razão $q = 3$ e $a_0 = 1$. Assim, o número de triângulos restantes no estágio n é,

$$T_n = 3^n$$

Aplicando o limite, quando n tende ao infinito, tem-se:

$$\lim_{n\to\infty} T_n = \lim_{n\to\infty} 3^n = +\infty$$

Portanto, o número de triângulos do Triângulo de Sierpinski tende para o infinito.

O perímetro

Sabe-se como se comporta o comprimento de cada lado e o número de triângulos no *n-ésimo* estágio. Além disso, o perímetro de um triângulo no *n-ésimo* estágio é $3l_n$. Portanto, o perímetro do triângulo de Sierpinski no estágio n será:

$$P_n = 3l_nT_n = 3l\left(\frac{1}{2}\right)^n 3^n$$

$$\therefore$$

$$P_n = 3l\left(\frac{3}{2}\right)^n$$

Devemos notar que o perímetro cresce em P.G de razão $q = \frac{3}{2}$, ou seja, apresenta taxa de crescimento igual a $\frac{1}{2}$.

Aplicando o limite, quando n tende para o infinito, tem-se:

$$\lim_{n\to\infty} P_n = \lim_{n\to\infty} 3l\left(\frac{3}{2}\right)^n = +\infty, \text{ pois } \left|\frac{3}{2}\right| > 1$$

Portanto, o perímetro do triângulo de Sierpinski tende para o infinito.

A área restante (escura)

Para saber como se comporta a área do triângulo de Sierpinski, utilizam-se dois elementos vistos acima, o número de triângulos e o comprimento de cada lado. A área no *n-ésimo* estágio será, portanto, o produto da quantidade de triângulos pela área de um triângulo (equilátero).

Sabe-se que a medida dos lados de um triângulo no estágio n é

$$l_n = l\left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

Logo, sua área será:

$$(A_1)_n = \frac{(l_n)^2\sqrt{3}}{4} = \frac{\left(l\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)^2\sqrt{3}}{4}$$

$$\therefore$$

$$(A_1)_n = \frac{l^2\sqrt{3}}{4}\left(\frac{1}{4}\right)^n$$

Assim, sabendo que $T_n = 3^n$, a área total no estágio n será,

$$A_n = (A_1)_n \times T_n$$

$$A_n = \frac{l^2\sqrt{3}}{4}\left(\frac{1}{4}\right)^n 3^n$$

$$\therefore$$

$$A_n = \frac{l^2\sqrt{3}}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^n \text{ ou ainda, } A_n = A_0\left(\frac{3}{4}\right)^n$$

Devemos notar que a área decresce em P.G de razão $q = \dfrac{3}{4}$, ou seja, apresenta taxa de crescimento [9] igual a $-\dfrac{1}{4}$.

Aplicando o limite, quando n tende para o infinito, tem-se:

$$\lim_{n\to\infty} A_n = \lim_{n\to\infty} \frac{l^2\sqrt{3}}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^n = 0, \text{ pois } \left|\frac{3}{4}\right| < 1$$

Portanto, a área do triângulo de Sierpinski tende para zero.

4.4 Conclusão

Com o estudo dos fractais realizou-se aplicações de diversos conceitos relacionados às primeiras seções, tais como: sequências, progressões, taxa de crescimento, limite de uma sequência, soma dos termos de uma sequência, limite da soma (série), convergência e divergência. Além disto, mostrou-se a interdisciplinaridade do tema, pois também foram explorados diversos elementos de geometria euclidiana, como: segmento de reta, triângulos, proporcionalidade, semelhanças, perímetros e áreas.

Por fim, viu-se que é possível ter em uma área limitada (finita) uma quantidade infinita de objetos e cuja soma é também infinita. Isto indica que, além de outras vantagens já mencionadas, os fractais podem inclusive ser utilizados como elementos facilitadores para o entendimento da noção intuitiva de limite de uma sequência, da convergência ou divergência de uma série.

[9] Neste caso, decrescimento.

5 APLICAÇÕES NA MATEMÁTICA FINANCEIRA

A Matemática financeira é possivelmente um dos temas matemáticos mais presentes no cotidiano das pessoas. Nos últimos anos, com a abertura e estabilização da economia Brasileira, a oferta de crédito no país aumentou consideravelmente e grande parte da população antes excluída do sistema financeiro passou a adquirir crédito com mais facilidade, porém na maioria dos casos sem a devida consciência. Isto vem desencadeando diversas discussões em torno da educação financeira no Brasil e, mais especificamente no âmbito escolar, sobre uma maior abordagem da matemática financeira na educação básica.

Nesta seção, aborda-se a Matemática Financeira através de problemas, aplicáveis à realidade de alunos do ensino médio, que serão resolvidos como aplicações de *sequências (progressões geométricas ou progressões aritméticas)*. Com isto, pretende-se mostrar que o tema não precisa, necessariamente, ser tratado como algo isolado das outras áreas da matemática, ou mesmo distante da realidade dos alunos.

A operação básica da Matemática Financeira é a operação de empréstimo. Alguém que dispõe de um capital C (chamado *principal*), empresta-o a outrem por um certo período de tempo, e após esse período, recebe o seu capital C de volta, acrescido de uma remuneração J pelo empréstimo. Essa remuneração recebe o nome de juro. A soma $C + J$ é chamada de montante e será representada por M. A razão $i = \dfrac{J}{C}$, que é a taxa de crescimento do capital, será sempre referida ao período de operação e chamada de *taxa de juros* (LIMA, 2006. p. 44).

Vejamos os exemplos:

Exemplo 9. No mês de Janeiro o aluno Daniel retirou o equivalente a $R\$200,00$ em lanches na lanchonete da sua escola. No final do mês procurou o dono do estabelecimento para comunicar que só poderia pagar aquele valor em quatro semanas e foi informado que lhe seria cobrado 5% do valor da sua compra a cada semana de atraso. Quanto Daniel deverá desembolsar para pagar a sua dívida.

Resposta:

Os juros cobrados a cada mês serão $J = 0,05 \times 200 = 10,00$. Deve-se notar que a dívida aumentará a cada mês $R\$10,00$, ou seja, tem comportamento de uma *progressão aritmética* de razão igual a 10 e $D_0 = 200$. Logo, o valor da dívida na quarta semana será,

$$D_4 = 200 + 4 \times 10 = 240.$$

Portanto, Daniel deverá pagar $R\$240,00$.

Como visto no exemplo acima, os juros de cada período foram calculados sempre sobre o capital emprestado (*principal*), neste caso, dizemos que a operação foi realizada sob o regime de juros simples. Dessa forma, se emprestarmos um capital C a juros simples, então os juros em cada um dos n períodos da operação será $J = iC$, ou seja, o capital cresce em P.A de razão $J = iC$. Logo, após os n períodos o montante será dado pelo *n-ésimo* termo da P.A, ou seja, $M = C + n(iC)$.

Entretanto, nas operações realizadas no sistema financeiro oficial isto ocorre de maneira diferente. Naturalmente, os investimentos e financiamentos são atualizados de acordo com o saldo apresentado no período imediatamente anterior. Portanto, os juros (ou atualização) de um capital assim calculados são chamados de juros compostos, ou ainda, dizemos que se trata do regime de juros compostos.

Dentre as suas principais aplicabilidades no cotidiano, destaca-se a comparação de investimentos e no caso de empréstimos ou financiamentos, comparar as opções apresentadas por um credor e realizar a escolha mais vantajosa para o cidadão.

Proposição 9. No regime de juros compostos de taxa i, um capital (*principal*) C_0 transforma-se, depois de n períodos de tempo, em um montante $C_n = C_0(1+i)^n$.

Demonstração:

Sabendo-se que a taxa de juros i é a taxa pela qual cresce o principal C_0, ou seja, a taxa de crescimento do principal ao longo do tempo, então fica estabelecida uma *progressão geométrica* de razão igual a $1 + i$.

Dessa forma, o valor do principal após n períodos será dado pelo *n-ésimo termo* da P.G, logo:

$$C_n = C_0(1+i)^n.$$

Este resultado será uma importante ferramenta em alguns de nossos cálculos, pois uma quantia que hoje vale P, daqui a n períodos de tempo, aplicado a uma taxa i valerá

$P(1+i)^n$. Da mesma forma, algo que no futuro (daqui a n períodos de tempo) valerá P, na data atual vale $\dfrac{P}{(1+i)^n}$.

Exemplo 10. O pai de Felipe, tentando motivá-lo a melhorar suas notas, lhe impôs o seguinte desafio: Caso Felipe consiga passar de ano sem precisar das provas de recuperação receberá a sua mesada anual (que já foi depositada integralmente nesse mesmo dia em poupança) depois de seis meses. Quanto será o valor que Felipe resgatará da poupança, caso alcance o objetivo, sabendo que seu pai depositou $R\$500,00$ e o banco onde a mesada foi depositada remunera seus clientes a uma taxa de 1% ao mês.

Resposta:

Nota-se que a mesada crescerá a uma taxa constante de 1% (ou $0,01$) ao mês. Logo, crescerá em *progressão geométrica* de razão igual a $1+0,01=1,01$. Assim, depois de seis meses, o valor da mesada (m) será equivalente ao sexto termo da P.G ($a_6 = a_0 q^6$), ou seja,

$$m = 500(1+0,01)^6 = 500(1,01)^6$$

$$\therefore$$

$$m = 530,76.$$

Portanto, se atingir o objetivo, Felipe receberá $R\$530,76$.

Exemplo 11. Sabendo que a taxa de rendimento da poupança é de 1% ao mês, Felipe deseja saber em quanto tempo terá o triplo do valor investido, caso decida aplicar uma parte do seu dinheiro em poupança.

Resposta:

Considerando que ele aplicará o valor C_0 e que a taxa de rendimento da poupança é constante e igual a 1% (ou $0,01$), então o valor aplicado crescerá em *progressão geométrica* de razão igual a $1+0,01=1,01$.

Felipe deseja que o seu investimento triplique, ou seja, que depois de n meses de aplicação o valor final seja $3C_0$. Este valor é, portanto, o *n-ésimo* termo da P.G que descreve o crescimento do capital investido. Logo,

$$a_n = a_0 q^n \Longrightarrow 3C_0 = C_0 1,01^n \Longrightarrow 3 = 1,01^n$$

$$n = \frac{log3}{log1,01} \cong 111meses.$$

Portanto, para triplicar um investimento aplicado em caderneta de poupança que rende 1% ao mês, é necessário deixar o valor aplicado por 111 meses ou 9 anos e 3 meses, aproximadamente.

Exemplo 12. Pedro e Antônio possuíam a mesma quantia e as investiram em uma mesma data, porém em bancos diferentes. O banco de Pedro remunera seu investimento em 2% ao mês, já o de Antônio remunera o investimento em 3% ao mês. Sabendo que Antônio resgatou sua aplicação depois de 4 meses e que Pedro fez o mesmo depois de 6 meses, quem resgatou o maior valor?

Resposta:

Admitindo que a quantidade que ambos possuíam era $C_0 = R\$100,00$.

O investimento de Antônio tem taxa de crescimento constante de $3\% = 0,03$ ao mês. Logo, a sequência formada pelo valor do investimento de Antônio ao longo do tempo é uma P.G de razão $q = 1+0,03 = 1,03$. Assim, depois de 4 meses o valor que ele resgatará será dado pelo quarto termo da P.G, ou seja,

$$a_4 = C_0(1,03)^4 = 1,1255C_0 = 1,1255 \times 100 = 112,55.$$

Já o investimento de Pedro tem taxa de crescimento constante de $2\% = 0,02$ ao mês. Logo, a sequência formada pelo valor do investimento de Pedro ao longo do tempo é uma P.G de razão $q = 1 + 0,02 = 1,02$. Assim, depois de 6 meses o valor que ele resgatará será dado pelo sexto termo da P.G, ou seja,

$$p_6 = C_0(1,02)^6 = 1,1262C_0 = 1,1262 \times 100 = 112,62.$$

Portanto, Pedro resgatou um valor pouco maior do que Antônio resgatou.

Exemplo 13. Jorge realizou um empréstimo bancário de $R\$4000,00$ para financiar a sua lavoura, a uma taxa de juros de $4,5\%$ ao mês. O pagamento do empréstimo deverá ser realizado imediatamente após a colheita dos produtos, que irá ocorrer em um ano. Nessas condições:

a) Qual o valor a ser pago pelo agricultor?

b) Quanto Jorge pagará de juros nesse empréstimo?

c) Qual a taxa de juros total da operação?

Resposta:

a) Como o pagamento deve ocorrer imediatamente a colheita, então a liquidação se dará em 12 meses. A dívida é reajustada com taxa constante de $4,5\%(0,045)$ ao mês, ou seja, apresenta taxa de crescimento constante. Dessa forma, a evolução do saldo devedor no decorrer do tempo tem o comportamento de uma P.G de razão igual a $1 + 0,045 = 1,045$ e o valor a pagar será o 12^o termo, ou seja,

$$a_{12} = a_0 q^{12} = 4000(1,045)^{12} = 6.783,53$$

Portanto, o agricultor pagará $R\$6.783,53$ um ano após a aquisição do empréstimo.

b) Os juros pagos serão dados por $J = 6.783,53 - 4000 = R\$2.783,53$.

c) A taxa de juros total da operação é taxa de crescimento, ou seja, $i_T = \dfrac{2.783,53}{4.000,00} \cong 0,6959 = 69,59\%$. Portanto, a taxa de crescimento total da dívida foi de $0,6959$ (ou $69,59\%$), ou ainda, como o prazo total foi de um ano, a taxa de juros anual foi de $69,59\%$ (aproximadamente).

Exemplo 14. Certo dia Gabriel ouviu sua mãe dizer que fez um empréstimo em seis parcelas mensais de $R\$1.970,17$ a uma taxa de juros 5% ao mês. Nessas condições, qual o valor do empréstimo adquirido pela mãe de Gabriel?

Resposta:

Como o empréstimo é submetido à taxa de juros de 5% (taxa de crescimento constante), então pela proposição 9, sabemos que:

A primeira parcela corresponde, na data do empréstimo a $\dfrac{1970,17}{1+0,05}$;

A segunda parcela corresponde, na data do empréstimo a $\dfrac{970,17}{(1+0,05)^2}$;

E assim sucessivamente até a sexta parcela, que corresponde na data do empréstimo a $\dfrac{1970,17}{(1+0,05)^6}$.

Mas, a soma de todas essas parcelas corresponde ao valor do empréstimo (E) na data de sua realização, ou seja,

$$E = \frac{1970,17}{1+0,05} + \frac{1970,17}{(1+0,05)^2} + \cdots + \frac{1970,17}{(1+0,05)^6}$$

Se observarmos, a soma acima se refere à soma dos seis termos de uma P.G de razão igual a $\dfrac{1}{1+0,05}$ *e primeiro termo igual a* $\dfrac{1970,17}{1+0,05}$. Pela soma dos termos de uma *progressão geométrica*, a soma fica:

$$E = \frac{1970,17}{1+0,05} \times \frac{1-\left(\dfrac{1}{1+0,05}\right)^6}{1-\dfrac{1}{1+0,05}} = \frac{1970,17}{1,05} \times \frac{1-\left(\dfrac{1}{1,05}\right)^6}{\dfrac{0,05}{1,05}}$$

$$\therefore$$

$$E \cong 10.000,00$$

Portanto, a mãe de Gabriel fez um empréstimo no valor de $R\$10.000,00$ (aproximadamente).

Exemplo 15. Paulo investiu todo o seu dinheiro em uma aplicação financeira que rende 6% ao mês. Em certo dia visitou uma loja de eletrodomésticos e decidiu adquirir uma televisão nova que custa de $R\$2.000,00$. O vendedor lhe ofereceu as duas opções de pagamento:

1) À vista, com 10% de desconto;

2) Pagamento em seis parcelas. Uma de $R\$1000,00$ imediatamente e as cindo restantes no valor de $R\$200,00$, no fim de cada mês após a compra.

Resposta:

Deve-se lembrar que todo o dinheiro de Paulo está na aplicação, o que indica que o pagamento da televisão sairá do valor aplicado.

Na primeira opção, se há um desconto de 10%, então o valor para pagamento no ato é $R\$1.800,00$.

Para saber qual a melhor opção, precisa-se comparar os valores em uma mesma data. Neste caso, escolheremos a data da compra e a taxa de crescimento utilizada para a comparação será a taxa de rendimento da aplicação financeira (6%), pois o dinheiro que pagará a televisão sairá da aplicação e Paulo deixará de ganhar seus rendimentos. Assim, a segunda opção é equivalente, na data da compra a,

$$1000 + \left(\frac{200}{1+0,06} + \frac{200}{(1+0,06)^2} + \cdots + \frac{200}{(1+0,06)^5}\right).$$

Nota-se que a expressão dentro do parêntese corresponde à soma dos cinco termos de uma P.G de razão $q = \dfrac{1}{1+0,06}$ e $a_1 = \dfrac{200}{1+0,06}$, portanto a soma acima será dada por:

$$1000 + \frac{200}{1+0,06}\left(\frac{1-\left(\dfrac{1}{1+0,06}\right)^5}{1-\dfrac{1}{1+0,06}}\right) = 1000 + \frac{200}{1,06}\left(\frac{1-\left(\dfrac{1}{1,06}\right)^5}{\dfrac{0,06}{1,06}}\right)$$

$$1000 + 842,47 = 1.842,47$$

Portanto,

Como na primeira opção temos um pagamento de $R\$1.800,00$ na data da compra e a segunda opção equivale a um pagamento de $R\$1.842,47$ na data da compra, concluí-se que a melhor opção de pagamento é a opção 1 (com 10% de desconto à vista).

CONSIDERAÇÕES FINAIS

O trabalho apresentou uma proposta de abordagem de sequências para o ensino médio com um maior aprofundamento em suas aplicações, não se limitando exclusivamente às progressões aritméticas e geométricas como é de costume. Trouxe a definição de série, termo do qual grande parte dos autores e professores desse nível de ensino costumam abster-se. Além disso, o texto prezou por um enfoque que possibilita a noção intuitiva dos elementos matemáticos através de visualizações, interpretações e demonstrações geométricas (além da algébrica).

Em todas as seções os elementos matemáticos foram definidos visando a sua aplicabilidade em problemas reais, com isto aproxima-se a matemática da realidade de quem a estuda. Isto foi feito das primeiras seções até o capítulo final, em que utiliza-se os conhecimentos de progressões geométricas para resolver problemas práticos da matemática financeira, sem necessariamente recorrer a fórmulas ou termos específicos. Dessa forma, buscou-se estimular a percepção de que as sequências estão intimamente ligadas a diversos acontecimentos da vida das pessoas e que podem ser ferramentas muito úteis na tomada de decisões.

Dentre outros aspectos importantes já destacados, as aplicações na geometria fractal e na matemática financeira possibilitam a introdução desses temas no currículo do ensino médio sem que haja uma interrupção dos temas mais tradicionais. Entretanto, as suas inserções devem ser feitas de acordo com a percepção do professor, respeitando as características, as limitações e objetivos do público alvo. Além desses aspectos, a abordagem abre caminho para a utilização de softwares e demais recursos computacionais aplicados aos elementos explorados, como forma de completar e dinamizar as atividades.

Assim, espera-se que esta proposta possa servir como fonte de consulta a professores que desejam adotar um enfoque prático e interdisciplinar às suas aulas de sequências, bem como aos estudantes do ensino médio que desejarem aprimorar seus conhecimentos sobre o tema.

APÊNDICE

Outras considerações sobre sequências

Diz-se que uma sequência (x_n) é *limitada* quando o conjunto dos seus termos é limitado, isto é, quando existem números reais a e b, tais que $a \leqslant x_n \leqslant b$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Isto quer dizer que todos os termos da sequência pertencem ao intervalo $[a, b]$.

Todo intervalo $[a, b]$ está contido num intervalo da forma $[-c, c]$, com $c > 0$ (*intervalo simétrico*). Para ver isto, basta tomar $c = max\{|a|, |b|\}$. Como a condição $x_n \in [-c, c]$ é equivalente a $|x_n| \leqslant c$, vemos que uma sequência (x_n) é limitada se, e somente se, existe um número real um número real $c > 0$ tal que $|x_n| \leqslant c$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Daí resulta que (x_n) é limitada se, e somente se, $(|x_n|)$ é limitada (LIMA, 2012. p. 101).

Quando uma sequência (x_n) não é limitada, diz-se que ela é *ilimitada*.

Uma sequência diz-se limitada superiormente quando existe um número real b tal que $x_n \leqslant b$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Isto significa que todos os termos x_n pertencem à semi-reta $(-\infty, b]$. Analogamente, diz-se que (x_n) é limitada inferiormente quando existe $a \in \mathbb{R}$ tal que $a \leqslant x_n$ (ou seja, $x_n \in [a, +\infty)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Evidentemente, uma sequência é limitada se, e somente se, é limitada superior e inferiormente.

Uma sequência (a_n) de números reais é dita uma sequência MONÓTONA se $a_1 \leqslant a_2 \leqslant a_3 \leqslant \cdots \leqslant a_n \leqslant \cdots$ ou $a_1 \geqslant a_2 \geqslant a_3 \geqslant \cdots \geqslant a_n \geqslant \cdots$. No primeiro caso, dizemos que ela é monótona crescente, enquanto no segundo caso ela é monótona decrescente (RIBEMBOIM, 2012. p. 69).

Se tivermos $a_1 < a_2 < a_3 < \cdots < a_n < \cdots$ ou $a_1 > a_2 > a_3 > \cdots > a_n > \cdots$, diz-se somente que é, respectivamente, crescente ou decrescente.

Teorema 1. Toda sequência monótona limitada é convergente.

Demonstração:

Consideremos a sequência monótona (a_n), monótona não decrescente e limitada, isto é, onde $a_1 \leqslant a_2 \leqslant a_3 \leqslant \cdots \leqslant a_n \leqslant \cdots$. Tomemos C, igual ao maior valor entre a_n e

$n; n \in \mathbb{N}$. Afirma-se que $C = \lim_{n\to\infty} a_n$. Assim, dado $\epsilon > 0$, como $C - \epsilon < C$, o número $C - \epsilon$ não é cota superior do conjunto dos a_n. Logo, existe algum $n_0 \in \mathbb{N}$, tal que, $C - \epsilon < x_n$. Como a sequência é monótona , $n > n_0 \Longrightarrow x_{n_0} \leqslant x_n$ e, portanto, $C - \epsilon < x_n$. Como $x_n \leqslant C$ para todo n, vemos que $n > n_0 \Longrightarrow C - e < a_n < C + \epsilon$. Assim, temos de fato $\lim a_n = C$, como queríamos demonstrar.

BIBLIOGRAFIA

[1] ANDERLE, D. Série Harmônica, 2001. Disponível em: *http://www.dirsom.com.br/index_htm_files/Serie%20Harmonica.pdf*. Acesso em: 19 de março de 2014;

[2] BOYER, Carl B. *História da Matemática*. Tradução de Helena Castro. 2ª ed. São Paulo: Blücher, 1996.

[3] BARBOSA, Ruy Madsen. Descobrindo a geometria fractal - para a sala de aula.- 3.ed.- Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2005.

[4] CANGUSSU, Everton soares. O ensino de sequências de recorrências na educação básica com o auxílio de linguagem de programação. 2013.

[5] CASTRO, D. S. Cores Harmônicas. Disponível em: *http://culturadigital.br/dacio/2012/07/02/cores-harmonicas/*. Acesso em 19 de março de 2014.

[6] DA COSTA, Ailton Barcelos. História das Sequências e Progressões. Disponivel em: *http://www.geocities.ws/ailton_barcelos/historia.sequencias_progres.doc*. Acesso em 25/01/2014;

[7] FONSECA, Daila Silva Seabra de Moura. Convergência de sequências e séries numéricas no cálculo: um trabalho visando a corporificação dos conceitos. 2012. Disponível em: *http://repositorio.sisbin.ufop.br/bitstream/123456789/2971/1/DISSERTA%C3%87%C3%83O _Converg%C3%AAnciaSequ%C3%AAnciaS%C3%A9ries.PDF*. Acesso em 17/02/2014, às 19:42.

[8] HEFEZ, Abramo. Elementos de aritmética. 2.ed. Rio de Janeiro: SBM, 2011.

[9] IEZZI, Gelson ... et. al. Matemática: ciência e aplicações, - v.1 - 6. ed. - São Paulo: Saraiva, 2010;

[10] IEZZI, Gelson; HAZZAN, Samuel. Fundamentos de matemática elementar, 4: sequências, matrizes, determinantes, sistemas. - 7. ed. - São Paulo: Atual, 2004.

[11] JANOS, Michel. Geometria fractal. Rio de Janeiro: Ed. Ciencia Moderna, 2008.

[12] LIMA, Elon Lages. A matemática do ensino médio-volume 2 / Elon Lages Lima, Paulo Cezar Pinto Carvalho, Eduardo Wagner, Augusto César Morgado. - 6.ed. - Rio de Janeiro: SBM 2006.

[13] LIMA, Elon Lages. Curso de Análise; v.1. 14. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2012.

[14] MORGADO, Augusto Cesar; WAGNER, Eduardo; ZANI, Sheila C. Progressões e Matemática Financeira. SBM, Col. do Professor de Matemática. Rio de Janeiro, 1993.

[15] NETO, Antonio Caminha Muniz. Tópicos de Matemática Elementar. v.1. SBM, Col. do Professor de Matemática. Rio de Janeiro, 2012.

[16] NETO, AREF Antar ... et. al. Progressões e Logarítmos-Noções de Matemática. São Paulo: Moderna, v. 2, 1979.

[17] NUNES, Raquel Sofia Rabelo. Geometria Fractal e Aplicações. Dissertação de Mestrado. Departamento de Matemática Pura - Faculdade de Ciências da Universidade do Porto, 2006. Disponível em: *http://www.fc.up.pt/pessoas/jfalves/Teses/Raquel.pdf.* Acesso em 21 de março de 2014;

[18] OLIVEIRA, Fabiana Soares de. O estudo das sequências através de padrões numéricos. 2011. Disponível em:
http://dspace.bc.uepb.edu.br:8080/jspui/bitstream/123456789/471/1/PDF%20-%20Fabiana%20Soares%20de%20Oliveira.pdf. Acesso em
29/01/2014.

[19] OLIVEIRA, Krerley Irraciel Martins; FERNANDEZ, Adán Jose Corcho. Iniciação à Matemática: um curso com problemas e soluções.- 2.ed. Rio de Janeiro: SBM, 2010.

[20] PCN, Ensino Médio. Parâmetros Curriculares Nacionais-Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais: Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. In: Matemática 1998, p.108. . Disponível em: http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/CienciasNatureza.pdf. Acesso em: 25/01/2013.

[21] RIBEMBOIM, Paulo. Funções, Limite e Continuidade. 1. ed. - Rio de Janeiro: SBM; 2012.

[22] SANTOS, Gabriel peres. Sequências Numéricas e Aplicações. 2013.

[23] SODRÉ, Ulysses. Sequências Reais. Universidade Estadual de Londrina: Londrina,

2010. Disponível em:
http://www.uel.br/projetos/matessencial/superior/matzoo/sequencias.pdf. Consulta em 01.03.2014, às 20:51;

[24] SOUZA, Joamir Roberto de. Novo olhar matemática: versão com progressões, v. 1 - 1.ed. - São Paulo: FTD, 2011.

[25] PARANÁ, Secretaria de Estado da Educação do. Diretrizes Curriculares da Educação Básica - Matemática, 2008. Disponível em:
http://www.educadores.diaadia.pr.gov.br/arquivos/File/diretrizes/dce_mat.pdf. Acesso em 27 de março de 2014.

[26] http://pt.wikipedia.org/wiki/Plimpton_322. Acesso em 14/02/2014 às 03:37;

[27] http://www.uned.es/geo-1-historia-antigua-universal/ASIRIA/BABILONIA/PLIMTOM%20322.htm. Acesso em 20/02/2014, às 23:35;

[28] http://www.matematica.br/historia/prhind.html. Acesso em 14/02/2014 às 03:32

[29] http://phylos.net/matematica/grecia-antiga/#biblio. Acesso em 14/02/2014 às 03:07;

[30] http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/opombo/seminario/rhind/inicio.htm. Acesso em 25/01/2014.

[31] http://www.rpm.org.br/conheca/45/1/euclides.htm. Acesso em 14/02/2014 às 02:58.

[32] http://en.wikipedia.org/wiki/Fibonacci. Acesso em 14/02/2014 às 02:45;

[33] http://pt.wikipedia.org/wiki/Carl_Friedrich_Gauss. Acesso em 21/02/2014, às 02:18;

[34] http://www.infoescola.com/geografia/teoria-populacional-malthusiana/. Consulta em 07/03/2014.

[35] http://pt.scribd.com/doc/56289539/Apostila-Acustica-Eletrica-Em-Audio. Acesso em 19 de março de 2014;

[36] http://en.wikipedia.org/wiki/File:Sierpinski_triangle_evolution.svg;

[37]
http://www.educ.fc.ul.pt/icm/icm99/icm43/exemplhttp://www.educ.fc.ul.pt/icm/icm99/icm43

/exempl_f.htm;f.htm;