

UNIVERSIDADE FEDERAL DO MARANHÃO
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM
REDE NACIONAL - PROFMAT

WALTER REIS

GEOMETRIA FRACTAL: uma abordagem voltada para o ensino médio

São Luís
2014

WALTER REIS

GEOMETRIA FRACTAL: uma abordagem voltada para o ensino médio

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, da Universidade Federal do Maranhão, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. José Antônio Pires Ferreira
Marão

São Luís
2014

Reis, Walter.

Geometria fractal: uma abordagem voltada para o ensino médio/Walter Reis. - São Luis, 2014.

125f.

Impresso por computador (fotocópia).

Orientador: José Antônio Pires Ferreira Marão.

Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal do Maranhão, Mestrado Profissional de Matemática, 2014.

1. Geometria - Ensino médio 2. Geometria fractal 3. Euclides
4. Caos I.Título.

CDU 514:37.016

WALTER REIS

GEOMETRIA FRACTAL: uma abordagem voltada para o ensino médio

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, da Universidade Federal do Maranhão, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Aprovado em de de 2014.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. José Antônio Pires Ferreira Marão (Orientador)

UNIVERSIDADE FEDERAL DO MARANHÃO

Prof. Dr. Felix Silva Costa

UNIVERSIDADE ESTADUAL DO MARANHÃO

Prof. Dr. Manoel Ferreira Borges Neto

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE SÃO PAULO

Dedico este trabalho à minha esposa Flávia, companheira inseparável em todos os momentos bons e ruins da minha vida, sempre ao meu lado dando apoio, carinho e motivação durante toda a minha caminhada e, acima de tudo, sendo compreensiva em aceitar os meus vários momentos de reclusão no nosso lar dedicados ao estudo, pesquisa e elaboração deste trabalho. A você o meu sincero amor e admiração.

AGRADECIMENTOS

À Deus nossa fonte e inspiração de vida. Aos nossos professores pelo apoio ao longo do curso.

À minha mãe Iolanda e meus filhos Jefferson e Anderson pela compreensão em entender a falta de atenção ao longo de todo o decorrer deste trabalho, sempre de forma solícita e motivadora.

Ao meu orientador Prof. Dr. José Antônio Pires Ferreira Marão pela atenção, paciência e por ser inspiração profissional pelo modo carismático, competente e gentil como trata a todos e à sua profissão.

Aos nossos colegas de turma pela motivação e cooperação mútua e pelo espírito de perseverança demonstrado por todos no decorrer de toda esta jornada.

Aos colegas do Tribunal de Justiça do Maranhão, em especial, Ao Dr. Ailton Castro Aires pelo incentivo e apoio dado em toda minha trajetória.

"A geometria dos fractais não é apenas um capítulo da matemática, mas aquele que ajuda todos os seres humanos a verem a mesma realidade de maneiras diferentes."

Benoit Mandelbrot

RESUMO

O trabalho tem como meta mostrar a importância da geometria fractal como recurso para o ensino de diversos temas matemáticos: frações, progressões, potência e limites, por exemplo (MOURA, 2011). Inicialmente faz-se um breve histórico da evolução da geometria desde Euclides, passando pelas geometrias não euclidianas até os fractais. Posteriormente é retratada a situação do ensino da matemática no Brasil e no mundo, mostrando algumas pesquisas que tentam resgatar a importância da matemática enquanto ciência. Os fractais são definidos, exibidas suas principais características e apresentados alguns fractais precursores. Posteriormente, conceitua-se *Caos*, mostrando sua relação com os fractais, bem como sua aplicação em diversas áreas da ciência. Faz-se algumas considerações sobre a evolução do ensino da geometria, abordando alguns outros temas matemáticos. Por fim, é apresentada a proposta de intervenção para inserção da *geometria fractal* como recurso didático a ser utilizado no ensino de diversos temas matemáticos.

Palavras-chaves: geometria fractal. Euclides. Caos. Ensino da geometria. Proposta de intervenção.

ABSTRACT

This work aims to show the importance of fractal geometry as a resource for teaching various mathematical topics: fractions, progressions, power limits. Initially it is a brief history of the evolution of geometry from Euclid, through the non-Euclidean geometries by fractals. Then we depict the state of mathematics education in Brazil and worldwide, showing some research trying to recover the importance of mathematics as a science . We define fractals, we show the main characteristics and present some precursors fractals. Conceptualize *Chaos*, showing its relation to the fractal and its application in various areas of science. We make some comments on the evolution of the teaching of geometry, addressing some other mathematical topics. Finally, the proposed intervention for insertion of *fractal geometry* as a teaching resource to be used in the teaching of various mathematical topics is presented .

Keywords: Fractal geometry. Euclid. Chaos. Teaching geometry. Intervention Proposed.

.

Lista de Figuras

1.1	<i>Representação do ponto $P(x, y)$ com distância u à origem</i>	15
1.2	<i>Sistema mongeano de projeção</i>	16
2.1	<i>Triângulo de Sierpinski</i>	29
2.2	<i>Folha de samambaia</i>	30
2.3	<i>Brócolis - auto semelhança aproximada</i>	30
2.4	<i>Jogo do caos</i>	36
5.1	<i>Curva de Koch</i>	48
5.2	<i>Floco de Neve de Koch</i>	48
5.3	<i>Curva quadrangular de Koch</i>	49
5.4	<i>Ilha quadrangular de Koch</i>	49
5.5	<i>Curva de Peano Switch-back Type (Peano-S)</i>	51
5.6	<i>Curva de Peano Switch-back Type (Peano-R)</i>	51
5.7	<i>Curva de Peano Meander Type (Peano-M)</i>	51
5.8	<i>Curva de Hilbert dos níveis 1 a 6</i>	52
5.9	<i>Construção da curva de Sierpinski</i>	52
5.10	<i>Construção da curva modificada de Sierpinski</i>	53
5.11	<i>Construção da curva modificada de Sierpinski</i>	53
5.12	<i>Triângulo de Sierpinski dos níveis 0 a 5</i>	54
5.13	<i>Tapete de Sierpinski com 4 iterações</i>	55
5.14	<i>Conjunto de Cantor dos níveis 0 a 5</i>	55
5.15	<i>Pentagonal tipo Dürer até o nível 3</i>	56
5.16	<i>Hexagonal tipo Dürer até o nível 3</i>	56

5.17	<i>Octogonal tipo Dürer até o nível 3</i>	57
5.18	<i>Árvore pitagórica fundamental, níveis 0,1 e 3</i>	57
5.19	<i>Árvores pitagóricas isósceles retangular e obtusângula</i>	57
5.20	<i>Árvores pitagóricas equilátera e bifurcada 180°</i>	58
5.21	<i>Árvores pitagóricas bifurcadas 60° e 120°</i>	58
5.22	<i>O conjunto de Cantor até a 6ª iteração</i>	61
5.23	<i>As três primeiras etapas na construção do conjunto de Cantor</i>	63
5.24	<i>Construção do floco de neve de Koch</i>	64
5.25	<i>Área do floco de neve de Koch</i>	66
5.26	<i>Triângulo de Sierpinski até o nível 3</i>	68
5.27	<i>: Níveis 0 a 3 da construção da Esponja de Menger</i>	70
5.28	<i>Parte retirada na interação da esponja de Menger</i>	73
5.29	<i>Estágios 0,1 e 2 e cortes do nível 1 e 2 da esponja de Menger</i>	73
6.1	<i>Peças de madeira ou EVA</i>	75
6.2	<i>Níveis 0 a 2 do fractal triminó</i>	76
6.3	<i>Tríminó</i>	76
6.4	<i>Carpete de Sierpinski</i>	77
6.5	<i>Planificação do cartão degraus centrais</i>	78
6.6	<i>Dobradura inicial (Passo 2)</i>	78
6.7	<i>Passo 3</i>	78
6.8	<i>Passo 4</i>	79
6.9	<i>Primeira geração do cartão fractal</i>	79
6.10	<i>Passo 6</i>	79
6.11	<i>Passo 7</i>	80
6.12	<i>Primeira e segunda geração do cartão fractal</i>	80
6.13	<i>Cartão fractal degraus centrais</i>	80

6.14	<i>Paralelepípedo obtido na primeira iteração</i>	81
6.15	<i>Triângulo de Pascal</i>	84
7.1	<i>Contagem de triângulos</i>	89
7.2	<i>Conjunto de mandelbrot e floco de neve de Koch</i>	90
7.3	<i>George Cantor</i>	91
7.4	<i>Atividade sobre sequências</i>	91
7.5	<i>Contagem de quadrados</i>	92
7.6	<i>Atividade com o floco de neve</i>	93
7.7	<i>Variação do floco de neve com quadrados</i>	95
7.8	<i>Variação do floco de neve com pentágonos</i>	95
7.9	<i>Contagem de círculos</i>	95
7.10	<i>Variação do tapete de Sierpinski</i>	96
7.11	<i>Contagem de quadrados</i>	97
7.12	<i>Fractal tridimensional</i>	99
7.13	<i>Atividade cap.10 - Áreas, pag. 364</i>	99
7.14	<i>Atividade: contagem de mosaicos</i>	101
7.15	<i>Atividade de contagem de lados no floco de neve</i>	102
7.16	<i>Atividade na esponja de Menger</i>	104
7.17	<i>Texto sobre números complexos</i>	106
7.18	<i>Texto sobre o triângulo de Sierpinski</i>	106
7.19	<i>Variação tridimensional do carpete de Sierpinski</i>	107

Lista de Tabelas

1.1	<i>Tripolaridade da atividade matemática</i>	22
1.2	<i>Dificuldades na utilização de linguagem algébrica</i>	23
1.3	<i>Esquema segundo CASSIRER</i>	24
2.1	<i>Interpretação da natureza por fractais</i>	30
2.2	<i>Dimensão de objetos Fractais</i>	33
2.3	<i>Jogo do caos: (a) passo 1, (b) passo 2, (c) passo 3 e (d) passo 4</i>	37
5.1	<i>Contagem no Conjunto de Cantor</i>	63
5.2	<i>Variação do número de lados do floco de neve de Koch</i>	65
5.3	<i>Variação do comprimento N_n de cada lado do floco de neve de Koch</i>	65
5.4	<i>Contagem no triângulo de Sierpinski</i>	68
5.5	<i>Medida do lado do triângulo de Sierpinski</i>	69
5.6	<i>Contagem dos cubos da esponja de Menger</i>	71
6.1	<i>Iteração X número de paralelepípedos novos</i>	81
6.2	<i>Volumes no cartão Degraus Centrais</i>	82
7.1	<i>Contagem dos quadrados</i>	92
7.2	<i>Contagem de círculos</i>	100
7.3	<i>Contagem de mosaicos</i>	101

Sumário

Lista de Figuras	6
Lista de Tabelas	9
1 INTRODUÇÃO	14
1.1 A concepção do ensino de matemática nos dias atuais	18
1.2 De Euclides aos fractais	25
1.3 Benoit Mandelbrot: o pai dos fractais	26
2 FRACTAIS	28
2.1 Definição de fractal	28
2.2 Características dos fractais	29
2.2.1 Auto semelhança	29
2.2.2 Dimensão fractal ou dimensão Hausdorff-Besicovitch	31
2.2.3 Complexidade infinita	33
2.3 Caos e fractais	34
2.3.1 Ciência do caos: descobrindo ordem na aparente desordem	34
2.3.2 Fractais: o elo entre várias ciências	34
2.3.3 O jogo do caos	35
2.4 Aplicações da geometria fractal	37
3 A CONSTRUÇÃO DO CONHECIMENTO GEOMÉTRICO	40
4 A SITUAÇÃO DO ENSINO DE MATEMÁTICA, EM ESPECIAL DA GEOMETRIA, NA REDE PÚBLICA ESTADUAL	42
4.1 Natureza do trabalho	42

4.2	População e amostra	43
4.3	Instrumento e coleta de dados	44
5	PROPOSTA DE INTERVENÇÃO	45
5.1	Por que explorando a geometria fractal na sala de aula?	46
5.2	Tipos de fractais	47
5.2.1	Fractais pela fronteira ou fractais geométricos	47
5.2.2	Fractais por remoção	53
5.2.3	Fractais tipo Dürer	55
5.2.4	Fractais do tipo árvore	57
5.3	Explorando fractais na sala de aula	58
5.3.1	O conjunto de Cantor (ou pente de Cantor)	59
5.3.2	Floco de neve de Koch	64
5.3.3	Triângulo de Sierpinski	67
5.3.4	Esponja de Menger	70
6	CONSTRUINDO FRACTAIS EM SALA DE AULA COM MANIPULAÇÃO DE MATERIAIS CONCRETOS	75
6.1	Fractal trîminó	75
6.2	Carpete de Sierpinski	77
6.3	Construção de um fractal cartão de degraus numa folha de papel	77
6.4	Fractais e o triângulo de Pascal	83
7	A PRESENÇA DO TEMA FRACTAIS NOS LIVROS DIDÁTICOS DA EDUCAÇÃO BÁSICA	85
7.1	Do ensino fundamental	88
7.1.1	RIBEIRO - Projeto Radix Matemática - 6º ano	88
7.1.2	RIBEIRO - Projeto Radix Matemática - 8º ano	89
7.2	Do ensino médio	90

7.2.1	SOUZA, Joamir - Novo olhar matemática - Ensino médio vol.1 . . .	90
7.2.2	SOUZA, Joamir - Novo olhar matemática vol.3	98
7.2.3	PAIVA - ensino médio VOL.1	99
7.2.4	PAIVA - ensino médio - vol. 3	104
7.2.5	RPM n°82, pg 63	106
CONSIDERAÇÕES FINAIS		109
BIBLIOGRAFIA		111
ANEXO		113

1 INTRODUÇÃO

A necessidade de medir terras determinou os primeiros passos da geometria. O filósofo grego Eudemo de Rodas, do século IV A.C., um dos primeiros historiadores das ciências, conta que os egípcios mediam suas terras para acompanhar o regime de inundações anuais do rio Nilo. De fato, o termo provém das palavras gregas *geo* (terra) e *metron* (medida).

Remetendo-se ao sentido moderno, geometria é a disciplina matemática que tem por objetivo o estudo do espaço e das formas nele contidas. Nas antigas culturas do Egito e da Mesopotâmia, a geometria consistia simplesmente num conjunto de regras empíricas.

Os gregos, entre os quais se destacou Euclides, no século III A.C., sistematizaram todos os conhecimentos existentes sobre o tema e estabeleceram seus fundamentos num conjunto de axiomas dos quais, segundo princípios dedutivos, se obtinham os demais resultados. A discussão dos princípios da geometria euclidiana levou à construção, no século XIX, de novos sistemas geométricos, denominados geometrias não euclidianas, e desembocou na generalização de seus métodos e sua aplicação a espaços cada vez mais abstratos.

A geometria, em qualquer de suas abordagens, apresenta uma série de elementos primários comuns. Distingue-se nesse nível os conceitos de plano, ponto, linha (reta, curva, etc.), superfície, segmento e outros que, combinados, formam todas as figuras geométricas. As geometrias descritiva e projetiva clássicas se ocupam da representação e das propriedades das figuras e de suas projeções. Distinguem-se nelas algumas figuras geométricas fundamentais, como os polígonos, a circunferência, os poliedros, a esfera, o cilindro e o cone.

René Descartes (1596-1650) estruturou a geometria analítica, cujo objetivo é estudar os problemas geométricos por meio de recursos da análise matemática. O método se baseia no princípio segundo o qual todo ponto de um plano pode ser definido por um, e somente um, par ordenado de números reais que representam a distância desse ponto à origem. No sistema de coordenadas cartesianas, a origem se situa na intersecção entre dois eixos perpendiculares chamados eixo das abscissas (ou eixo dos x) e eixo das ordenadas (ou eixo dos y).

Ao representar o ponto, que é um ente geométrico, por meio de um par de coordenadas cartesianas, que é um ente algébrico, a geometria analítica plana torna possível representar linhas retas e curvas por meio de equações.

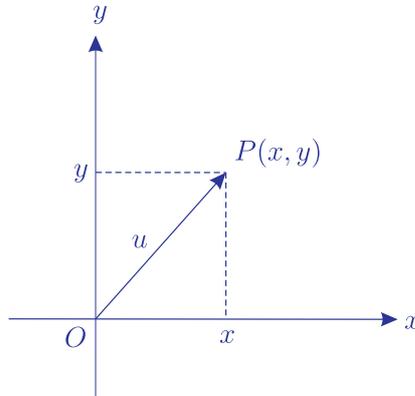


Figura 1.1: *Representação do ponto $P(x, y)$ com distância u à origem*

Fonte: *o autor*

Diferentemente de Descartes, que fundamentou a geometria analítica na correspondência numérica da localização dos pontos das figuras geométricas, Gaspar Monge empregou um tratamento puramente geométrico para estabelecer a correspondência entre os pontos do espaço tridimensional e os pontos de dois planos perpendiculares entre si, que formam um diedro de referência. Assim, cada ponto no espaço é projetado ortogonalmente sobre cada um dos dois planos do diedro, originando as projeções horizontal e vertical.

Pelo método de Monge uma figura do espaço tridimensional é estudada por meio de suas projeções nos planos do diedro. Sendo esses planos rebatidos um sobre o outro pela rotação de um deles em torno de sua intersecção (chamada linha de terra), as projeções aparecem desenhadas num só plano, chamado *épura*.

A concepção em questão reduziu a um pequeno número de princípios abstratos e invariáveis todas as operações geométricas que aparecem nas representações usuais de intersecção de plano com plano, de superfícies cilíndricas com esféricas, cônicas, etc., na perspectiva, nos desenhos técnicos, no estudo de sombras e demais representações gráficas. Em sua *Géometrie Descriptive*, Monge deu vários exemplos do emprego das projeções na demonstração das propriedades das figuras de três dimensões, além de semear os modernos estudos das transformações das figuras geométricas.

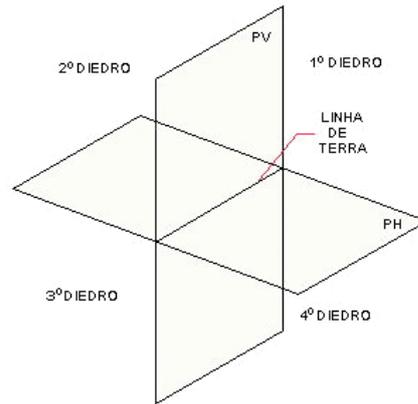


Figura 1.2: *Sistema mongeano de projeção*

Fonte: www4.faac.unesp.br

A geometria clássica tem entre seus princípios básicos o quinto postulado de Euclides, ou postulado das paralelas, que mereceu especulações de geômetras de todos os tempos. No século XVIII, Girolamo Saccheri e Johann Lambert formulavam várias hipóteses que procuravam substituir ou explicar aquele postulado. Mas o trabalho de maior repercussão foi o de Legendre, que fez uma revisão completa dos *Elementos* de Euclides, numa versão que foi amplamente divulgada na Europa e serviu de base para todos os cursos de geometria elementar das escolas secundárias brasileiras. O postulado das paralelas recebeu de Legendre o seguinte enunciado, equivalente ao de Euclides: "por um ponto dado pode-se traçar somente uma paralela a uma reta dada."

Em 1829 foram publicados em russo os trabalhos de Lobatchevski, nos quais estava estruturada uma nova geometria com a substituição do quinto postulado de Euclides por outro, não equivalente, o que originou uma geometria diferente da euclidiana. Foi chamada pelo autor de geometria imaginária e depois passou a ser conhecida como geometria não euclidiana hiperbólica.

O enunciado do quinto postulado da geometria de Lobatchevski é o seguinte: "*as retas de um plano podem classificar-se em dois grupos em relação a uma dada reta do mesmo plano: o grupo das que interceptam e o grupo das que não interceptam essa reta dada. As retas limites desses grupos chamam-se paralelos à reta dada.*" (Acesso em 30/01/2014: www.estudantedefilosofia.com.br).

Assim, enquanto por um ponto exterior a uma reta na *geometria euclidiana* só se admite uma reta que não intercepta a reta dada, na *geometria lobatchevskiana* há uma infinidade delas. Em outras palavras, enquanto na *geometria euclidiana* a soma de ângulos internos de um triângulo é igual a 180° , na *geometria lobatchevskiana* essa soma é menor que 180° .

Sem conhecer os trabalhos do geômetra russo, o húngaro János Bolyai tinha chegado a conclusões análogas sobre a possibilidade de estruturar uma nova geometria sem contradição lógica. Na mesma época, Gauss escreveu cartas em que relata ter chegado a conclusões semelhantes. Assim, a honra da criação da geometria não euclidiana está dividida entre esses três matemáticos.

Em 1854, Riemann apresentou ao mundo uma segunda geometria não euclidiana, conhecida como geometria elíptica, na qual se admite que "por um ponto exterior a uma reta não se pode traçar nenhuma paralela a ela" ou que "a soma dos ângulos internos de um triângulo é maior que 180° ."

Era preciso ter uma imaginação excepcional para considerar a possibilidade de uma geometria diferente daquela de Euclides, pois, o espírito humano por dois milênios estivera limitado pelo preconceito da tradição, à firme crença de que o sistema de Euclides era certamente a única maneira de descrever em termos geométricos o espaço físico, e que qualquer sistema geométrico contrário não poderia ser consistente (FALCÃO, 2008).

Posteriormente, a constante evolução da sociedade e, conseqüentemente, do conhecimento, suscitou, nas duas últimas décadas, no surgimento de uma nova ciência denominada *geometria fractal*. O termo fractal foi usado inicialmente pelo matemático polonês, Benoit Mandelbrot, que estabeleceu as bases desta nova geometria não euclidiana que, diferentemente das outras, surge como uma geometria com aplicação prática, apropriada para representar formas da natureza.

O presente trabalho tem como objetivo primordial demonstrar a praticidade do uso da geometria fractal no currículo do *ensino médio* (e até do *fundamental*). Sendo assim, buscando um melhor desencadeamento das ideias, o trabalho foi dividido como segue.

1. A concepção do ensino de matemática nos dias atuais;
2. De Euclides aos fractais;
3. A construção do conhecimento geométrico;
4. A situação do ensino de matemática, em especial da geometria, na rede pública estadual;

5. Proposta de intervenção;
6. Construindo fractais em sala de aula com manipulação de materiais concretos;
7. Fractais e o triângulo de Pascal;
8. A presença do tema fractais nos livros didáticos da educação básica.

1.1 A concepção do ensino de matemática nos dias atuais

Paralelamente ao surgimento da *geometria fractal*, nas duas últimas décadas, foi observada uma crescente preocupação com a *Educação Matemática* em vários países. A exemplo desta realidade desenvolveu-se na Dinamarca, a partir do trabalho de Mogens Niss, um projeto denominado KOM ¹ (BORBA, 2010). A preocupação dos educadores dinamarqueses foi motivada por algumas questões, dentre as quais destacamos: O que significa dominar a matemática? O que significa ser um bom professor de matemática?

Como possível resposta à primeira pergunta o Kom identificou oito competências necessárias para que o professor (e também o aluno) obtenha o competence ²:

1º grupo - Habilidade para perguntar e responder perguntas em matemática e com a Matemática

- *Competência de pensamento matemático*: dominar modos matemáticos de pensamento;
- *Competência no tratamento de problemas*: formular e resolver problemas matemáticos;
- *Competência de modelagem*: ser capaz de analisar e construir modelos matemáticos concernentes a outras áreas;
- *Competência de raciocínio*: estar apto a raciocinar matematicamente.

¹Equivalente em português a "competências e aprendizagem da matemática."

²Significa conhecer, compreender, fazer, usar e possuir uma opinião bem fundamentada sobre a matemática em uma variedade de situações e contextos.

2º grupo - Habilidade para lidar com a linguagem matemática e seus instrumentos

- *Competência de representação*: poder manejar diferentes representações de entidades matemáticas;
- *Competência em simbologia e formalismo*: estar apto a manejar a linguagem simbólica e os sistemas matemáticos formais;
- *Competência de comunicação*: estar apto a se comunicar em, com e sobre a matemática;
- *Competência em instrumentos e acessórios*: estar apto a fazer uso e estabelecer relações com instrumentos e acessórios em Matemática.

Como resposta para a segunda pergunta: o que significa ser um bom professor de matemática?

Uma primeira resposta foi:

Um bom professor de matemática é aquele que efetivamente estimula o desenvolvimento de competências matemáticas em seus estudantes (BORBA, 2010, pg.38).

Porém, o que isto significa em termos mais específicos? Para o Kom, o bom professor precisa de três componentes principais em sua formação: uma formação matemática baseada na abordagem por competências, um componente de formação geral e de pedagogia e competências pedagógicas e didáticas com atenção específica para a matemática.

Esta última competência, a mais abrangente, pode ser subdividida em seis competências, a saber.

- *Competência em currículos*: inclui as habilidades para entender, analisar, avaliar, relacionar e implementar currículos e planos de ensino em matemática. Também é necessária ou desejável a habilidade para construir novos currículos e planos de ensino;
- *Competência pedagógica*: inclui as habilidades de propor, planejar, organizar, orquestrar e realizar o ensino de matemática, além de habilidade em criar situações de ensino/aprendizagem, selecionar e criar materiais pedagógicos;

- *Competência na detecção de aprendizagem:* inclui as habilidades de descobrir, interpretar e analisar a aprendizagem dos alunos em matemática, bem como suas noções, convicções e atitudes para com a disciplina;
- *Competência em avaliação:* inclui as habilidades para identificar, avaliar, caracterizar e comunicar os resultados da aprendizagem e as competências dos estudantes, bem como informar e ajudar cada um deles individualmente em outros contextos relevantes;
- *Competência de colaboração:* inclui a habilidade de colaborar com os colegas, dentro e fora da matemática, e com outros participantes do processo educacional em assuntos relativos ao ensino da matemática, suas condições limitantes e suas circunstâncias;
- *Competência de desenvolvimento profissional:* inclui a habilidade de desenvolver a própria competência como professor de matemática, participando de atividades de desenvolvimento profissional, tais como cursos em serviço, pesquisas de desenvolvimento de projetos e conferências; refletir sobre seu próprio ensino e necessidades de desenvolvimento; manter-se atualizado sobre novos desenvolvimentos e tendências na pesquisa e prática.

O livro *Tendências Internacionais em Formação de Professores de Matemática* aborda um problema que preocupa grande parte dos educadores matemáticos: enquanto a matemática acadêmica se desenvolve enquanto pesquisa, as salas de aula do ensino fundamental e até das universidades caminham na direção contrária ao desenvolvimento da matemática. O livro trás à tona uma questão que tem se tornado o grande fator para que a educação básica seja um problema: A formação do professor de matemática (BORBA, 2010).

Sendo assim, várias perguntas surgem: como o professor deve lidar com o livro didático na sala de aula? Que matemática o futuro professor deve estudar para que seja um professor competente? Que novas demandas as tecnologias da comunicação e informação trazem para o professor de matemática? Qual a dinâmica adequada para a educação continuada do professor? Esta é apenas uma amostra de indagações que têm sido tratadas no Brasil e no exterior. Estas indagações estão longe de obter uma resposta simples por ser um problema complexo.

Sobre este tema, segundo Moreira e David, 2005, no Brasil a formação do professor de matemática foi contrastada por duas tendências: a primeira conhecida como *transposição didática* veria o conhecimento escolar como aquele que é didatizado a partir do conhecimento científico ou acadêmico.

Nessa visão, à pedagogia caberia apenas o papel de "azeitar" o conhecimento científico permitindo, assim, que o sistema de licenciatura, baseado no modelo (3+1) (três anos de conteúdo matemático mais um de pedagogia) pudesse sobreviver sofrendo adaptações apenas em relação às tensões entre o desenvolvimento do conhecimento científico e a ordem a ser exposta em sala de aula.

Neste sentido, nas disciplinas pedagógicas seriam estudados os principais problemas relacionados à forma como o conhecimento acadêmico foi transposto para a sala de aula. Esta tendência em educação matemática ficou conhecida como "didática francesa."

A segunda aponta que o conhecimento escolar é independente do conhecimento científico. Essa tendência, ainda de acordo com Moreira e David (2005), se apoia no sistema francês, no qual as regras eram somente para a escola, e não a partir de algum tipo de transposição do conhecimento científico. Segundo essa visão, o movimento da escola seria independente da dinâmica da ciência.

Ainda segundo BORBA, há matemáticas diversas sendo desenvolvidas em ambientes culturais diferentes: a escola e a academia. Justificativas e formas de expressão são aceitas em um meio, e não em outro. Por outro lado, essas duas modalidades de matemática não são conjuntos disjuntos; há, portanto, interseções entre elas.

Segundo FALCÃO, a atividade matemática é vista num aspecto tripolar, entendendo como atividade matemática um contexto complexo de atividades que abarca não somente o contexto escolar, mas igualmente o contexto da matemática-da-rua e a chamada "matemática dos matemáticos." Esta tripolaridade pelo termo genérico matemática pode ser visto na tabela a seguir.

Matemática escolar	Matemática extraescolar	Matemática dos matemáticos
Conjunto de iniciativas estruturadas voltadas para a negociação, em contexto cultural específico (sala de aula), de atividades voltadas para o desenvolvimento conceitual em matemática.	Conjunto de atividades envolvendo conhecimentos matemáticos no contexto de situações extraescolares culturalmente significativas (comércio, práticas profissionais).	Corpo de conhecimentos socialmente compartilhado, epistemologicamente delimitado e praticado por grupos profissionais institucionais específicos: os centros de produção de conhecimento matemático acadêmico.
<ul style="list-style-type: none"> • Didática de conteúdos específicos; • Psicologia escolar. 	<ul style="list-style-type: none"> • Psicologia social; • Antropologia da matemática; • Etnomatemática. 	<ul style="list-style-type: none"> • Epistemologia da matemática; • História da matemática.
Psicologia da educação matemática		

Tabela 1.1: *Tripolaridade da atividade matemática*

Fonte: FALCÃO, 2008, pg. 18

Outra dificuldade apontada por FALCÃO verificada na aprendizagem da matemática é a passagem da linguagem natural para o simbolismo formal, no contexto da introdução à álgebra na escola, conforme mostrado na tabela a seguir.

Tipo de dificuldade.	Descrição
<i>1. Suporte simbólico misto.</i>	Utilização de elementos de representação simbólica oriundos da linguagem natural e formal.
<i>2. Distinção entre variáveis e parâmetros</i>	Dificuldade de diferenciação de variáveis e parâmetros na proposição de fórmulas genéricas ou equações correspondentes a dados empíricos modelizados ou problemas a por em equação.
<i>3. Generalidade da expressão.</i>	Dificuldade em trabalhar com entidades literais, propondo-se frequentemente valores numéricos específicos para os parâmetros da expressão.
<i>4. Caráter sintético da expressão.</i>	Dificuldade em propor expressão única, capaz de sumariar todas as relações pertinentes ao problema ou modelo.
<i>5. Gestão da ordem de prioridade das operações indicadas pela expressão.</i>	Ausência de marcadores formais que auxiliem a explicitação da ordem de prioridade de operações, como, por exemplo, parênteses, colchetes, barras em expressões fracionárias.

Tabela 1.2: *Dificuldades na utilização de linguagem algébrica*

Fonte: FALCÃO, 2008, pg. 52

CASSIRER, defensor da corrente denominada "aprendizagem por conceitos" nos ensina que os conceitos são formados a partir da "captura" lógica de certos traços e regras, buscando-se reproduzir artificialmente, em laboratório. Tal processo, seria dado em etapas na forma a seguir.

1. Observação sistemática do conjunto de traços imediatamente "salientes" dos objetos dados a conhecer;
2. Estabelecimento de um conjunto de hipóteses de organização;
3. Teste de hipóteses: procedimento exaustivo, armazenagem de informações,

diminuição do campo de busca por confirmação/desconfirmação das hipóteses testadas;

4. Estabelecimento da regras.

O aprendizado de qualquer conteúdo escolar, incluindo a aprendizagem da matemática, se concretiza pela aprendizagem dos conceitos relacionados com o saber. Neste aspecto:

“ O conceito não é derivado, mas presumido, pois, atribuir a uma multiplicidade informacional uma ordem e um encadeamento dos elementos que a compõem implica, desde logo, pressupor o conceito, se não em sua forma final, ao menos de forma coerente com sua função fundamental” (CASSIRER apud FALCÃO, 2008).

Segundo CASSIRER, o conceito a partir da multiplicidade de coisas do mundo empírico ocorre segundo o esquema:

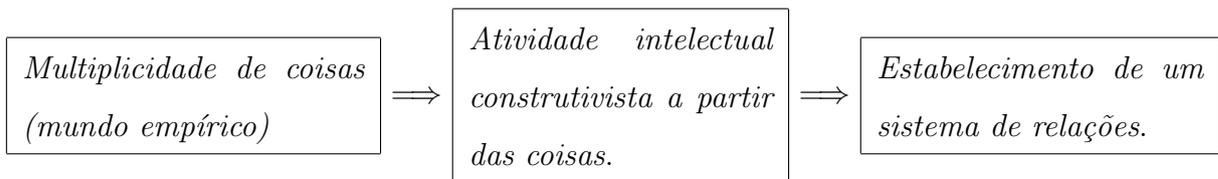


Tabela 1.3: *Esquema segundo CASSIRER*

Outra vertente defende que a construção do conhecimento é dada segundo o “teoremas-em-ação”, por exemplo, o jangadeiro nordestino demonstra competência para compor vetorialmente a direção do vento, a inclinação da vela de sua jangada e a direção do leme. Este jangadeiro não “sabe” composição vetorial, mas funciona de forma coerente com tal modelo científico. Neste sentido dispõe de um conhecimento-vetorial-em-ação. (VERGNAUD apud FALCÃO).

A representação simbólica dos conceitos se baseia em processo, no âmbito do qual as peculiaridades dos meios de simbolização (dentre os quais merece especial destaque a linguagem) influirão no resultado final. Inversamente, a simbolização não pode ser vista independentemente das questões de conceptualização: o mundo não é construído pela linguagem, e sim com a linguagem, que é precedida pela ação, pelo gesto, pela imagem mental.

O escopo deste trabalho é mostrar é que o ensino de matemática não pode mais ser tratado como se fosse um sistema imutável. O mundo mudou, as necessidades do homem

moderno mudaram e a educação tem que se adequar às demandas sociais atuais. Neste aspecto SKOVSMOSE fala:

“Em muitas escolas, mudanças radicais têm acontecido nas aulas de matemática. A metodologia tradicional tem sido ameaçada por abordagens temáticas e por trabalhos com projetos. E a tal ponto que já não se consegue tão facilmente distinguir uma aula de matemática de uma aula de outra disciplina” (SKOVSMOSE, 2010, pg.17).

E ainda:

“O absolutismo filosófico sustenta que algumas verdades absolutas podem ser obtidas pelo indivíduo. O absolutismo da sala de aula vem à tona quando os erros (dos alunos) são tratados como absolutos: “isto está errado!”, “corrija essas contas!”. Dessa forma, o absolutismo de sala de aula parece querer sustentar que os erros são absolutos e podem ser eliminados pelo professor. Não queremos dizer, contudo, que seja proibido apontar os erros em sala de aula. Não queremos pregar o relativismo absoluto, mas, temos a impressão de que o absolutismo na filosofia da matemática foi transferido automaticamente para o absolutismo pedagógico, que fundamenta certas maneiras de interação em sala de aula” (SKOVSMOSE, 2010, pg.22).

Assim, o ensino da matemática precisa ser revisto nas nossas escolas e que toda a problemática que existe nos sistemas do ensino brasileiro desde as questões políticas até a formação continuada do professor precisa ser revista. Não se pode ficar a mercê das questões apontadas por Falcão, Borba e Skovsmose acerca dos problemas do ensino da Matemática em todo o mundo. O professor de matemática precisa estar ciente das mudanças da didática da matemática e rever suas competências, adequando-as à nova realidade social.

1.2 De Euclides aos fractais

Há mais de dois mil anos, Euclides, segundo conta a tradição, enquanto caminhava pela praia, notou que a areia, vista como um todo, se assemelhava a uma superfície contínua e uniforme, embora fosse composta por pequenas partes visíveis.

Desde então se empenhou em tentar provar, matematicamente, que todas as formas da natureza podiam ser reduzidas a formas geométricas simples (cubos, esferas, prismas, cones, pirâmides, dentre outros).

Concentrado, sobretudo nas formas, deixou de lado um elementantíssimo neste tipo de análise: a dimensão. No entanto, inconscientemente, esta foi a chave para o pensamento inicial de Euclides, já que um grão de areia, considerado isoladamente, apresenta três dimensões (largura, comprimento e altura), enquanto a superfície arenosa da praia é visualmente plana (com duas dimensões).

Georg Cantor, em 1883, criou um método simples de transformar uma linha numa poeira de pontos, que apesar de não passar de pontos isolados no intervalo $[0, 1]$, tem mais pontos do que os números racionais, ou seja, tem uma quantidade não numerável de pontos. Nesta mesma época, em 1890, Giuseppe Peano gerou pela primeira vez uma curva ondulada que tocava em cada ponto do plano, ou seja, uma curva com "duas dimensões".

Todas estas formas pareciam sair das categorias usuais de linhas unidimensionais, bidimensionais e planos tridimensionais, daí serem denominadas "*casos patológicos*", também conhecidas como "*monstros matemáticos*".

Poincaré, em 1880, ao analisar a estabilidade do sistema solar, desenvolveu um método qualitativo no qual cada ponto representava uma diferente órbita planetária, criando o que hoje é chamada Topologia, ciência de grande aplicação no estudo das dimensões.

A partir do século XX, desenvolveu-se o estudo da ciência hoje conhecida como *Caos*. Essa ciência buscava ver ordem em fenômenos aparente irregulares. Não faltam exemplos nas diversas áreas da ciência, na *biologia*, o crescimento das plantas; na *física*, a trajetória da propagação de uma onda; na *medicina*, a frequência dos batimentos cardíacos e na *economia*, as oscilações nas bolsas de valores, por exemplo.

1.3 Benoit Mandelbrot: o pai dos fractais



Em 1935, o matemático polonês, Benoit Mandelbrot, descobriu padrões nos "monstros matemáticos" e sua interrelação com os fenômenos imprevisíveis. Num tempo em que o treino matemático era fortemente analítico, Mandelbrot visualizava os problemas, sempre que possível, de forma a resolvê-los em termos geométricos. No decorrer dos anos, diversos problemas que não pareciam relacionados foram se unindo cada vez mais, dando origem à *geometria fractal*.

Mandelbrot nasceu em Varsóvia (1924), de família judia, da Lituânia. Em 1936 sua

família mudou-se para Paris. Antecipando-se ao nazismo, deslocaram-se para Tulle. Enfrentaram as dificuldades da guerra e a opressão dos invasores. Quando Paris foi libertada do jugo alemão, submeteu-se aos exames de admissão da Escola Normal Politécnica, sendo aprovado.

Na época havia o movimento do grupo Bourbaki, do qual participava um grupo de jovens matemáticos, que buscavam a reconstrução da matemática francesa, e entre eles estava o seu tio Szolem Mandelbrot.

Os Bourbaki buscavam uma matemática formal e pura, sem influências possivelmente enganosas pelo visual geométrico. Estas ideias se propagaram mundo afora atingindo vários países, inclusive os Estados Unidos e, nós brasileiros, chegamos a ter mesmo excessos, principalmente na educação. A matemática tornou-se mais rigorosa, pautando-se no método axiomático.

Mandelbrot não suportou o predomínio da abstração imposta por Bourbaki, deixando a França em 1948, foi estudar Ciência Aeroespacial nos Estados Unidos, tendo conseguido posteriormente um cargo na IBM - Centro de Pesquisas Thomas Watson, que financiava projetos de pesquisas. Sustentado pelos recursos da IBM buscou durante anos situações, algumas vezes de cientistas de outras áreas, para aplicar suas idéias. Na IBM deparou-se com ruídos nas linhas telefônicas entre computadores. Usou um antigo trabalho de Cantor conhecido como Conjunto de Cantor entendendo estes ruídos como um destes conjuntos. Vistos pela ótica de Mandelbrot a aleatoriedade dos ruídos apresentavam certo padrão de regularidade. Mandelbrot passou então a aplicar suas idéias em diversas áreas, determinando inclusive um padrão para a variação econômica no preço do algodão em 1950, sendo convidado nesta época a proferir palestras em Harvard.

A geometria fractal de Mandelbrot ainda constituía uma pálida imagem da realidade, mas, a reconhecia toda vez que visualizadas.

Entre outras aplicações, os fractais vieram dar uma nova luz à ciência do *caos*, pois, através deles, os estudiosos passaram a identificar uma certa ordem em muitos dos fenômenos ditos irregulares ou caóticos.

2 FRACTAIS

2.1 Definição de fractal

Nos últimos anos, diferentes definições de fractais têm surgido. Entretanto, a noção que serviu de "fio condutor" a todas as definições foi introduzida por Benoit Mandelbrot, através do neologismo "fractal", originário do verbo latim *fractus*, que significa irregular ou quebrado, como disse o próprio Mandelbrot: "eu cunhei a palavra fractal do adjetivo em latim *fractus*. O verbo em latim correspondente *frangere* significa quebrar, criar fragmentos irregulares. É contudo sabido - e como isto é apropriado para os nossos propósitos! - que, além de significar quebrado ou partido, *fractus* também significa irregular. Os dois significados estão preservados em fragmento" ¹

Os fractais são formas geométricas abstratas de uma beleza incrível, com padrões complexos que se repetem infinitamente, mesmo limitados a uma área finita. Mandelbrot constatou ainda que todas estas formas e padrões possuíam algumas características comuns e que havia uma curiosa e interessante relação entre estes objetos e aqueles encontrados na natureza.

K. J. Falconer, autor de duas obras importantes sobre fractais (1985 e 1990), sugeriu o entendimento de fractal por caracterizações:

Um conjunto F é fractal se, por exemplo,

- F possui alguma forma de "autossimilaridade" ainda que aproximada ou estatística;
 - A dimensão, definida de alguma forma, é maior que a dimensão topológica;
 - O conjunto F pode ser expresso através de um procedimento recursivo ou iterativo.
- (FALCONER apud BARBOSA, 2006)

Nota-se do exposto que o conceito de fractal ainda deixa muito a desejar, principalmente no caso de se querer uma definição formal.

¹BARSA, Nova Enciclopédia. Encycropedia Britannia. Vol 7. Gráfica Melhoramentos. São Paulo, 1998. p. 74.

2.2 Características dos fractais

Conforme mencionado acima, um fractal apesar de não ter ainda uma definição formal, pode ser entendido ou visualizado por caracterizações. Há três características que definem um fractal. São elas: *auto semelhança*, *dimensão fractal*; sendo esta não necessariamente inteira e a *complexidade infinita*.

2.2.1 Auto semelhança

A auto semelhança, ou auto similaridade, caracteriza-se pelo fato de uma pequena parte do fractal ser igual (ou similar) ao todo. Observa-se que o conjunto total é constituído por pequenas réplicas desse mesmo conjunto, ou seja, qualquer que seja a ampliação considerada, obtém-se sucessivas cópias do objeto inicial.

Convém agora distinguir dois tipos diferentes de auto semelhança: *exata* e a *aproximada* ou *estatística*. A *auto semelhança exata* é obviamente um conceito artificial, visto apenas nos fractais gerados por recursos computacionais. O mesmo já não se pode dizer em relação à *auto semelhança estatística*, que encontra boas aproximações em formas naturais, uma vez que não são rigorosamente iguais.

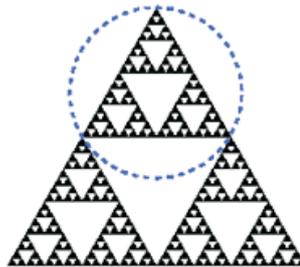


Figura 2.1: *Triângulo de Sierpinski*

Fonte: *www.mat.uc.pt, 2013*

Na figura 2.1, conhecida como triângulo de Sierpinski, a auto semelhança é exata, uma vez que as réplicas obtidas são de fato perfeitas. A parte destacada é uma réplica perfeita do conjunto total.

Nas figuras 2.2 e 2.3, a seguir, observa-se a semelhança "estatística", típica dos objetos naturais. Percebe-se na samambaia que o broto é similar ao ramo, que por sua vez é similar à folha, que é similar à planta. Convém ressaltar que as partes apesar de similares

não são uma réplica exata do conjunto total.

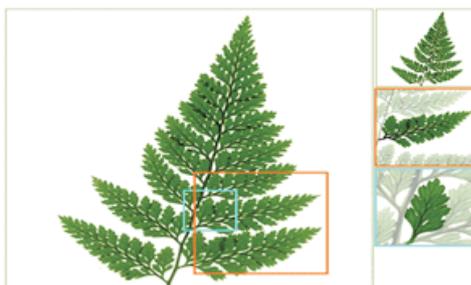


Figura 2.2: *Folha de samambaia*

Fonte: *www.mat.uc.pt, 2013*



Figura 2.3: *Brócolis - auto semelhança aproximada*

Fonte: *Maia apud Fuzzo, 2009*

No quadro abaixo, observa-se a construção de um fractal com auto semelhança exata. A cada estágio (ou iteração) a forma observada pode ser interpretada como uma aproximação de uma forma da natureza, que tem auto semelhança estatística.

Elementos	Embrião	Imagem	Imagem	Interpretação
	Fractal Estágio 1	Fractal Estágio 2	Fractal Estágio N	
Exemplo 1				 Galhos de Árvore
Exemplo 2				 Perfil do Relevo
Exemplo 3				 colméia

Tabela 2.1: *Interpretação da natureza por fractais*

Fonte: *Janos, 2008*

2.2.2 Dimensão fractal ou dimensão Hausdorff-Besicovitch

A dimensão fractal de um objeto, ao contrário do que sucede na *geometria euclidiana*, não é necessariamente um número inteiro. Com efeito, ela pode ser um número fracionário, sendo que representa o grau de ocupação de um fractal no espaço, estando relacionada com o seu grau de irregularidade.

Define-se então dimensão de uma curva fractal como sendo um número que caracteriza a maneira na qual a medida do comprimento entre dois pontos aumenta à medida que a escala diminui.

O nosso senso comum nos leva a considerar que os vários objetos observados podem ter uma, duas, ou três dimensões, e ainda habitua-se a considerar o tempo como uma quarta dimensão. Assim, confrontados com a noção de uma dimensão não inteira, digamos 1,2 ou 2,3; o mais natural é que não só não dá-se conta do que se trata como se pode sentir até alguma desconfiança.

É essa a nova noção de dimensão que a geometria fractal introduz. Exemplificando: tomando um exemplo citado por Mandelbrot: um novelo com 10 cm de diâmetro feito com um fio de 1mm de diâmetro (aproximadamente seriam 100 camadas desse fio para formar o novelo), ao ser representado em resolução de 10 m, será representado como um ponto, logo um objeto de dimensão 0.

Numa resolução de 10 cm seria representado por uma bola, logo um objeto de dimensão 3. Numa resolução de 10 mm, seria representado por um conjunto de fios, logo objetos de dimensão 1.

Numa resolução de 0,1mm, seria representado por colunas (fios), logo voltando a ter dimensão 3, ampliando-se a resolução tem-se os conjuntos de fibras a formar cada fio, objetos de dimensão 1, ampliando-se mais e mais chega-se a dimensões atômicas, logo dimensão 0, depois dimensão 3, e assim sucessivamente.

Nessa geometria, temos a dependência numérica relacionando o objeto e o observador em dimensões sempre inteiras delineando zonas de transição.

Na geometria fractal serão definidas zonas fractais, que serão as dimensões inteiras ou não, geralmente fracionárias, que associarão aspereza, espessura, densidade, textura dos objetos fractais estudados.

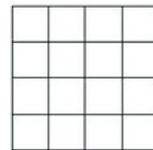
Da geometria euclidiana sabe-se que:

- Um *ponto* é o que não tem parte, isto é, tem dimensão zero;
- Uma *linha* é um comprimento sem largura, ou seja, tem dimensão 1 (um);
- Uma *superfície* é o que só tem comprimento e largura, possui dimensão 2 (dois);
- Um *sólido* é o que tem comprimento, largura e profundidade, tem dimensão 3 (três).

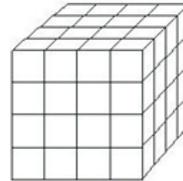
Dimensão 1: considere-se um segmento de reta; após a redução fica-se com $4(= 4^1)$ partes iguais.



Dimensão 2: efetuando o mesmo processo para o quadrado, dividir cada um dos lados em 4 partes iguais, fica-se com $16(= 4^2)$ partes iguais.



Dimensão 3: procedendo-se de igual modo para o cubo, obtém-se $64(= 4^3)$ partes iguais.



Considerando

- $N =$ número de partes em que se divide o objeto;
- $r =$ coeficiente de redução.

Temos

Dimensão 1: $N = 4$ e $r = \frac{1}{4} \implies N = \frac{1}{r^1}$.

Dimensão 2: $N = 16$ e $r = \frac{1}{4} \implies N = \frac{1}{r^2}$.

Dimensão 3: $N = 64$ e $r = \frac{1}{4} \implies N = \frac{1}{r^3}$.

Generalizando, obtemos

Dimensão d : $N = \frac{1}{r^d}$. Assim,

$$N = \frac{1}{r^d} \iff N = \left(\frac{1}{r}\right)^d \iff \boxed{d = \frac{\log N}{\log r^{-1}}}$$

Essa relação, conhecida como *dimensão de Hausdorff-Besicovitch*, é válida para calcular a dimensão de qualquer objeto, tanto figuras euclidianas de dimensão inteira como figuras fractais com dimensão fracionária. A tabela a seguir apresenta a dimensão de alguns fractais que serão abordados ao longo deste trabalho.

Fractal	Peças geradas N	Fator de redução r	Dimensão Fractal $d = \frac{\log N}{\log r}$
<i>Curva de Koch</i>	4	3	$d = \frac{\log 4}{\log 3} = 1,262$
<i>Conjunto de Cantor</i>	2	3	$d = \frac{\log 2}{\log 3} = 0,631$
<i>Curva de Peano</i>	9	3	$d = \frac{\log 9}{\log 3} = 2$
<i>Triângulo de Sierpinski</i>	3	2	$d = \frac{\log 3}{\log 2} = 1,585$
<i>Tapete de Sierpinski</i>	8	3	$d = \frac{\log 8}{\log 3} = 1,893$
<i>Esponja de Menger</i>	20	3	$d = \frac{\log 20}{\log 3} = 2,727$
<i>Tetraedro de Sierpinski</i>	4	2	$d = \frac{\log 4}{\log 2} = 2$

Tabela 2.2: *Dimensão de objetos Fractais*

Fonte: *o autor*

Utilizando-se esses métodos para o cálculo da dimensão é possível expressar algo diferente da dimensão topológica. Os métodos que envolvem o conceito de dimensão fractal referem-se ao espaço ocupado, ou preenchido, por uma figura. Tais métodos permitem que, ao se calcular efetivamente a dimensão de alguns objetos, o resultado seja um número fracionário. Nem sempre a dimensão espacial dos fractais é fracionária, porém, dimensão fracionária é uma característica que as figuras euclidianas não possuem.

2.2.3 Complexidade infinita

Uma vez que os fractais são gerados por algoritmos matemáticos, são por definição infinitos, podendo ser tão detalhados quanto quisermos, bastando para isso aumentar o número de iterações a efetuar. Assim, qualquer que seja o número de ampliações de um determinado objeto fractal, não é possível obter a "imagem final", uma vez que ela poderá continuar a ser infinitamente ampliada.

O fractal será a figura limite do seu processo gerador. É importante ressaltar que esta

característica teve maior ênfase com o advento da informática, que propiciou os recursos necessários para construir inúmeras (quase infinitas) iterações recursivas.

2.3 Caos e fractais

2.3.1 Ciência do caos: descobrindo ordem na aparente desordem

O termo caos, assim traduzido para o português, é originado da palavra cháos. Sua acepção inicial, no étimo grego, é "origem" ou "abertura originária de onde vem tudo" e por lógica, indeterminada. Entretanto, através dos romanos, passou a ter a conotação de "desordem", contrariamente ao kósmos ou "ordem". Historicamente, nosso vernáculo incorporou esta ideia de desordem ao caos.

A teoria do caos é conceituada como um campo avançado e moderno da matemática que está cada vez mais se difundindo. Ela se dedica às análises de sistemas dinâmicos não lineares cujo comportamento é fundamentalmente aleatório e imprevisível. A matemática do caos utiliza-se dos estudos qualitativos para investigar, através de modelos matemáticos, os fenômenos naturais que surgem no universo. A ciência do caos trouxe consigo o *ver ordem e padrões*, onde anteriormente só se observava o irregular, o aleatório, o imprevisível, digamos mesmo o *caótico*.

2.3.2 Fractais: o elo entre várias ciências

Hoje em dia - com o desenvolvimento da matemática e ciência - a *Teoria do Caos* surgiu para compreender as flutuações erráticas e irregulares da natureza. Sistemas de comportamento caótico são encontrados em muitos campos da ciência e engenharia e são estudados, pois, muitas vezes são achados padrões que mostram uma estrutura ordenada no sistema.

Uma característica de um sistema caótico é que ele sempre mostra "*sensibilidade às condições iniciais*", isto é, qualquer perturbação no estado inicial do sistema, não importando quão pequena seja, levará rapidamente a uma grande diferença no estado final, fazendo com que a previsão do futuro torne-se muito difícil. Porém, compreendendo o comportamento caótico, muitas vezes é possível entender como o sistema se comportará como um todo ao longo do tempo.

Apesar das inúmeras aplicações e utilidades, os fractais ainda têm um longo caminho pela frente. Faltam muitas ferramentas e vários problemas continuam sem solução. Uma teoria completa e unificada é necessária e a pesquisa prossegue neste sentido.

“O caos não tem estátua nem figura e não pode ser imaginado; é um espaço que só pode ser conhecido pelas coisas que nele existem, e ele contém o universo infinito” (Frances A. Yates).²

Ao longo das últimas quatro décadas, os estudos sobre o caos e fractais foram direcionados para observar, analisar, modelar e compreender a geometria dos objetos e fenômenos da natureza mediante equações simples. A geometria dos fractais difundida por Mandelbrot, a partir de 1983, tem atraído interesse científico e educacional devido às potencialidades, versatilidades e fascínios oferecidos pelo grande poder de análises dos objetos da natureza.

A incapacidade humana em compreender com profundidade as várias situações do mundo real como: desordem na atmosfera, turbulência nos fluidos, variação populacional de espécies, oscilações do coração e cérebro, interligações microscópicas de vasos sanguíneos, ramificações alveolares, cotações da bolsa, forma das nuvens, relâmpagos, aglomerações estelares etc., levou seus cientistas, de áreas diversas, a dificuldades e desânimo até mesmo para publicar, para colocar suas idéias e resultados de forma publicável.

As ferramentas da geometria fractal com suas formas foram elementos insubstituíveis de muitos cientistas, pois, permitiram reformular antigos problemas e surpreendentes ordens foram observadas onde antes só se via o imprevisível, o aleatório, ou mesmo o caótico. Em particular, os fractais revolucionaram a geração e a reprodução de imagens. Outra relação existente entre a geometria fractal e a *teoria do caos* prende-se no fato de ambas terem se desenvolvido e crescido graças ao desenvolvimento da informática.

2.3.3 O jogo do caos

A seguir é mostrado como com uma ilustração conhecida como *jogo do caos*, uma marcação desordenada de pontos no plano pode conduzir a uma ordem.

²<http://www.insite.com.br/fractarte/artigos/caos-e-ordem>.

Para jogar este jogo necessita-se de:

- Um triângulo arbitrário de vértices A , B e C ;
- Um dado não viciado.

A cada um dos vértices do triângulo atribuímos duas das seis possibilidades resultantes do lançamento do dado, conforme a seguir.

- A é "vencedor" se sair 1 ou 2;
- B é "vencedor" se sair 3 ou 4;
- C é "vencedor" se sair 5 ou 6.

Vamos então jogar este jogo:

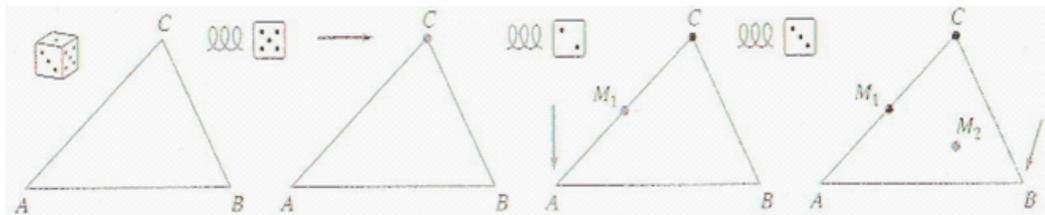


Figura 2.4: *Jogo do caos*

Fonte: www.mat.uc.pt. acesso em 05/01/2013

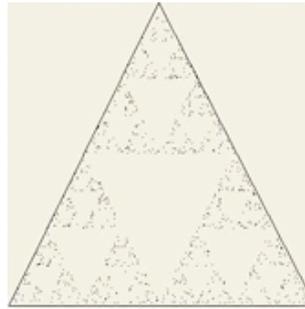
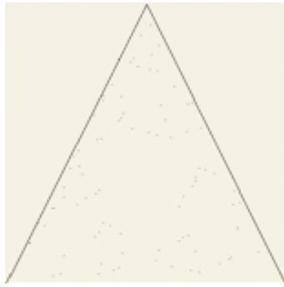
Passo 0: atira-se o dado. Começa-se pelo vértice "vencedor". Suponhamos que caiu cinco. Então começamos pelo vértice C ;

Passo 1: atira-se novamente o dado. Suponhamos que caia dois. Então o "vencedor" é o vértice A . Agora mudamos diretamente da posição anterior para o vértice "vencedor", mas paramos no meio. Marca-se a nova posição M_1 ;

Passo 2: atira-se novamente o dado e move-se diretamente da última posição para o vértice "vencedor", e paramos no meio. (Por exemplo, se sair três paramos em M_2 que é o ponto médio do segmento que une M_1 a B). Marca-se nova posição;

Passo 3, 4, ... n: continua-se a atirar o dado, movendo-se para o ponto médio do segmento que une a última posição e o vértice vencedor.

(a) Atirando o dado 100 vezes (b) Atirando o dado 1000 vezes



(c) Atirando o dado 5000 vezes (d) Atirando o dado 10000 vezes

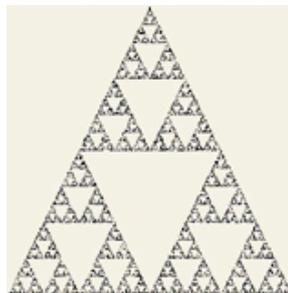
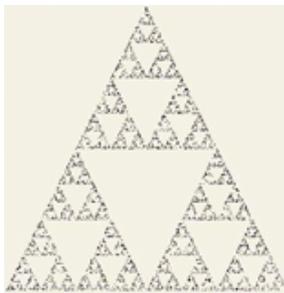


Tabela 2.3: *Jogo do caos*: (a) passo 1, (b) passo 2, (c) passo 3 e (d) passo 4

Fonte <http://www.mat.uc.pt>, acesso em 05/02/2013

Conclusão: os pontos estão dispostos em três regiões triangulares independentemente da posição do vértice sorteado. Não existem pontos no triângulo central, só nos três dos cantos. Muito mais que isso: em cada triângulo de canto, se os dividirmos novamente em quatro triângulos, pelos pontos médios, não teremos pontos nos triângulos centrais, e, assim sucessivamente, por mais pontos que sejam marcados, e por mais subdivisões que sejam realizadas.

2.4 Aplicações da geometria fractal

De acordo com Barbosa (2006) a *geometria fractal* pode ser utilizada para descrever diversos fenômenos na natureza, onde as geometrias tradicionais não são adequadas e está intimamente ligada à *teoria do caos*. Mandelbrot constatou que os exemplos citados anteriormente podem ser estudados e descritos utilizando as propriedades dos fractais que

apresentam características comuns e estas estruturas podem ser identificadas com objetos naturais que estão ao nosso redor.

O desenvolvimento desta geometria e a *geometria fractal* se deu a partir dos anos 60 com o avanço da tecnologia, pois o auxílio do computador foi muito importante. Gouvea apud Camargo (2012) vai ao encontro de Barbosa (2006), afirmando que Mandelbrot passou a estudar e desenvolver os *fractais*, pois estava insatisfeito com a *geometria clássica*, incapaz de explicar todas as formas, principalmente as da natureza.

De acordo com Murr apud Camargo (2012), a geometria fractal teve como impulso sua beleza e seu apelo estético. Seu estudo evoluiu ainda mais quando se percebeu a relação com outras áreas como a física, biologia, geologia, computação gráfica e também na música. Barbosa (2006, p. 10) exemplifica:

Na constituição de nosso mundo, da natureza em geral, por mares e oceanos, separando os continentes e ilhas, com suas costas, suas montanhas e rios, rochas, plantas e animais, e acima as nuvens etc., temos componentes com suas formas nas quais dominam a irregularidade e o caos; tentar simplificá-las, empregando formas usuais da clássica geometria euclidiana, como triângulos, círculos, esferas, cones etc., seria absurdamente inadequado. A geometria dos fractais pode fornecer aproximações para estas formas.

Muitos profissionais de várias áreas se depararam com questões originárias da própria natureza e buscaram tratar destas questões de modo mais adequado pela sua complexidade. Os fractais revolucionaram a construção e a reprodução de imagens, permitindo também reformular antigos problemas.

Desta forma, Camargo (2012) cita as principais aplicações dos fractais nas diferentes áreas das ciências. Cabe citar apenas alguns exemplos:

- Na **biologia**, a partir da análise da rugosidade de fungos e corais e no estudo da influência da superfície irregular das proteínas nas iterações moleculares;
- Na **medicina**, com o estudo de patologias do coração, como a *taquicardia* e a *fibrilação*, cuja característica é a falta de regularidade no coração. A identificação de tumores de *câncer*, como o diagnóstico do *cancro*, que tem dimensão fractal superior à dos demais tecidos e o estudo do crescimento de tumores cerebrais;
- Na **física**, sobre a criação de antenas fractais que tem melhor frequência que outras e no crescimento de estruturas de cristais, que possuem ramificações auto similares;

- Na **economia**, com a descrição realística de bolhas e crashes e na bolsa de valores;
- Na **indústria**, com a detecção automática de falhas têxteis;
- Na **computação gráfica**, a partir de técnicas de compreensão de imagens e sua criação virtualmente, representação de elementos da natureza como crateras, planetas, costas, plantas, nuvens. Também usados na criação de efeitos especiais de filmes, na decodificação de áudio e vídeo e na criptografia;
- Na **arquitetura e urbanismo**, com a comprovação de que as cidades apresentam características que são compreendidas por meio da geometria fractal. No estudo de padrões urbanos e na análise de fenômenos particulares como a formação de favelas e condomínios fechados;
- Na **astrofísica e Astronomia**, fazendo previsões de trajetórias dos planetas e a distribuição das galáxias no universo;
- Na **mineralogia**, medindo a densidade dos minerais, na evolução dos terrenos e descontinuidade de rochas;
- Na **Geografia**, medindo comprimentos das costas dos continentes, na topografia, na descrição de falhas sísmicas, no estudo de terremotos, na dinâmica dos vulcões, na criação de modelos de crescimento demográficos e a rocha na qual reside o petróleo tem estrutura rugosa com propriedades fractais.

Os fractais apareceram recentemente como uma das mais fascinantes descobertas da Matemática. A sofisticação e o exotismo de suas formas, bem como a ampla divulgação que lhes foi concedida pela mídia, despertaram a atenção do grande público e o interesse de grupos de pesquisadores, reduzidos no início, mas que se avolumaram à medida que os fractais começaram a invadir as áreas de outras ciências, como a física, a geologia, a computação gráfica, e encontrando inúmeras aplicações práticas, como a compreensão de arquivos de imagens, intensamente utilizada em multimídia, ingressando ainda no domínio das artes plásticas e adquirindo, dessa maneira, um caráter interdisciplinar (SERRA E KARAS, 1997).

3 A CONSTRUÇÃO DO CONHECIMENTO GEOMÉTRICO

Os trabalhos de Van-Hiele (1986) podem ser interpretados como uma interessante ilustração da consideração de diferentes patamares de concretude. Ao analisar a construção do conhecimento em matemática, Van-Hiele identificou cinco níveis sucessivos no processo, em cada um dos quais os objetos concretos teriam características distintas. No caso específico da Geometria, a caracterização dos diversos níveis é levada a efeito por Van-Hiele da forma seguinte:

- No **primeiro nível**, os alunos reconhecem as figuras ou os objetos por sua aparência global, sem serem capazes ainda de descrevê-los através de propriedades características;
- No **segundo nível**, os alunos analisam as propriedades características das figuras ou objetos identificados, sem se interessarem decididamente, ainda, por relações entre propriedades;
- No **terceiro nível**, os alunos estabelecem relações entre propriedades ou, mais precisamente, relacionam figuras ou objetos através de suas propriedades, no entanto, neste nível não existe o interesse explícito em justificar afirmações a partir de outras, em construir cadeias dedutivas;
- No **quarto nível**, os alunos são levados a deduzir uma propriedade a partir de outras, questões como a da relatividade do conjunto de postulados ou das propriedades globais do sistema dedutivo que se erige ainda não são plenamente percebidas;
- No **quinto nível**, os alunos são capazes de visualizar propriedades mais gerais dos sistemas dedutivos, comparando os vários sistemas possíveis, as várias geometrias imagináveis, euclidianas ou não euclidianas, bem como os diversos pontos de vista segundo os quais os mesmos objetos podem ser estudados, decorrentes das abordagens da topologia, da geometria afim, da projetiva, da métrica etc.

Em seus trabalhos, Van-Hiele especifica uma sequência de fases do aprendizado, através das quais os alunos deveriam ser conduzidos para elevarem seus níveis de conhecimento. O

que interessa, neste momento, é perceber, na escalada dos níveis, a crescente complexidade do objeto concreto: dos elementos básicos passou-se às suas propriedades, às relações entre propriedades, às cadeias de propriedades e às propriedades das cadeias.

[...] melhor do que o estudo do espaço, a geometria é a investigação do "espaço intelectual" já que, embora comece com a visão, ela caminha em direção ao pensamento, vai do que pode ser percebido para o que pode ser concebido. (WHEELER, 1981 apud MACHADO, 2001, p. 52)

É interessante notar que, nas quatro séries iniciais, os alunos têm contato com objetos tridimensionais, como cubos, prismas, esferas, cilindros, cones; já nas séries seguintes, a realidade cede quase que completamente o lugar às representações planas, em geral de figuras planas, como um estágio preparatório no caminho para a unidimensionalidade de uma formalização que quase nunca se completa na escola. É como se o estágio perceptivo inicial estivesse destinado exclusivamente a atividades infantis, conduzindo, depois, a uma ruptura tal que possibilitaria a caracterização da geometria tendo em vista apenas seu conteúdo lógico. Ao ilustrar seus pontos de vista, utilizando-se da geometria, Snyders afirma:

"Aprender geometria é criarmos-nos uma atitude de matemático que permite verificar, por ela mesma, a exatidão dos teoremas, compreendê-los e, portanto, aprendê-los e finalmente desenvolvê-los; refazer por si mesmo o caminho que conduz a determinada demonstração e continuar esse caminho ou, pelo menos, pressentir-lhe o prolongamento." (SNYDERS, 1978 apud LIBÂNEO, 2000, p. 35)

A limitação às atividades concretas é, sem dúvida, insuficiente, mesmo nas séries iniciais do ensino. Qualquer que seja o nível considerado, é fundamental o estabelecimento de articulações consistentes entre as atividades perceptivas e os momentos de concepção, das inter-relações entre o conhecimento empírico e a sua sistematização.

Nessa perspectiva, é possível caracterizar o conhecimento geométrico através de quatro faces: *percepção*, *construção*, *representação* e a *concepção*. Não são fases, como as da Lua, que se sucedem linear e periodicamente, mas faces, como as de um tetraedro, que se articulam mutuamente, configurando uma estrutura a partir da qual, de modo metafórico, pode-se apreender o significado e as funções do ensino da geometria.

4 A SITUAÇÃO DO ENSINO DE MATEMÁTICA, EM ESPECIAL DA GEOMETRIA, NA REDE PÚBLICA ESTADUAL

4.1 Natureza do trabalho

A motivação inicial para a realização deste trabalho foram algumas indagações feitas por alunos do ensino médio, na Escola da Rede Pública Estadual do Maranhão, Centro de Ensino (CE) Francisco Ximenes. Os alunos indagavam com frequência o porquê de serem explorados alguns conteúdos matemáticos como progressões, análise combinatória, números binomiais, etc, questionando a necessidade de estudar tais conteúdos e qual a utilização que estes conteúdos poderiam ter na sua vida real ou profissional. Tais indagações causaram inquietações não somente a mim, mas também aos outros professores de matemática e até de professores de outras disciplinas. Isto porque estas inquietações eram comuns a todos desde as suas formações acadêmicas. Qual o professor que ainda não se perguntou, por exemplo: Para que estou estudando isto? Que diferença poderá fazer aprender este conhecimento na minha vida? Ou então: Como farei meu aluno perceber a necessidade ou ter interesse em estudar este conteúdo? Como relaciono o conteúdo a ser trabalhado com o contexto social do aluno?

A *matemática formal* é produção do campo das ideias e, muitas vezes, está desassociada da realidade.

Buscar uma relação entre esta matemática formal com o mundo real muitas vezes não é tarefa fácil para o professor, e pior ainda, percebe-se que os cursos de graduação em matemática dão muito enfoque à matemática formal em detrimento à formação moral, psicológica e humana do futuro professor. Este, quando se depara com a realidade da sala de aula, muitas vezes não sabe como enfrentar as dificuldades que esta realidade irá lhe impor.

O conteúdo aprendido na academia em geral não se preocupa em relacionar estes conteúdos com a realidade social na qual o futuro formando irá estar inserido. Pensando nesta necessidade e, folheando um livro didático do Ensino Médio, deparei com um texto

sobre fractais, o qual me despertou o interesse em buscar informações sobre o assunto. O fascínio foi imediato. Percebi na geometria fractal um campo fértil para buscar formas criativas de trabalhar os conteúdos matemáticos de uma forma diferenciada.

Comecei então a inovar minha prática idealizando e acrescentando atividades que valorizassem o lúdico e o trabalho em equipe como atrativo para despertar nos alunos o interesse pela matemática. A partir daí pesquisei, desenvolvi, criei algumas atividades envolvendo fractais que foram então incluídas nas aulas e o resultado foi surpreendente. Foi notória a melhoria no aprendizado dos alunos.

Trabalhar com material concreto facilita muito o processo mental de buscar relações matemáticas entre os elementos de figuras planas e espaciais e, a apreensão desta competência por parte dos alunos é muito significativa, pois, percebe-se que o desenvolvimento desta competência ajuda a desenvolver outras competências necessárias ao bom aprendizado da matemática (raciocínio lógico, capacidade de abstração, noções de quantidade, perceber relações, etc).

A proposta do presente trabalho consiste em analisar a situação atual do ensino de matemática, em especial da geometria, nas escolas da rede pública estadual, através de uma abordagem teórico-prática, com o objetivo de verificar criticamente a forma como esta prática está sendo realizada pelos professores, bem como da sua aceitação pelo corpo discente.

Inicialmente será feita uma breve explanação sobre a importância do trabalho proposto aos alunos e, como diagnóstico, aplicar-se-ão questionários de pesquisa para o levantamento de dados (Apêndice A).

Após um diagnóstico das dificuldades dos alunos, observadas nos dados obtidos nos questionários, será elaborado um minicurso, tendo como base os conhecimentos da geometria fractal, com o intuito de despertar o interesse do aluno pelo saber matemático, bem como facilitar o aprendizado da geometria e outros temas matemáticos.

4.2 População e amostra

O público escolhido para fins de estudo serão alunos matriculados na rede pública estadual na cidade de São Luis. O público alvo abrange os alunos do ensino médio, matriculados nas três séries sequenciais.

Pretende-se selecionar uma amostra com alunos das três séries do ensino médio que participarão do minicurso elaborado após a tabulação e análise dos questionários que identificarão as dificuldades encontradas por estes alunos no aprendizado da matemática.

4.3 Instrumento e coleta de dados

Para a coleta de dados serão utilizados questionários com perguntas abertas e fechadas, que terão como meta a sondagem dos conhecimentos e dificuldades prévias relacionadas ao estudo da disciplina de matemática.

Serão tabulados todos os dados das três séries do ensino médio, os quais serão aferidos com o objetivo de realizar um aprofundamento de estudo das dificuldades detectadas pelos alunos diante do processo ensino-aprendizagem, adequando possíveis dificuldades ao conteúdo a ser apresentado no minicurso.

Após a elaboração e aplicação do minicurso, será aplicado um novo questionário avaliativo (Apêndice B) aos alunos que participarão do mesmo, visando mensurar o aprendizado, bem como coletar as opiniões e sugestões destes alunos sobre a validade da proposta objeto deste trabalho.

5 PROPOSTA DE INTERVENÇÃO

Desde o seu nascimento a criança está em contato com o mundo. Através da visão, da audição, do tato, dos seus movimentos ela vai explorar e interpretar o ambiente que a rodeia e, antes mesmo de dominar as palavras, conhecer o espaço e as formas nele presentes.

No entanto, a maioria dos currículos escolares não dá a essas experiências a importância devida, sempre se preocupam muito com atividades ligadas à linguagem e a qualificação, deixando de explorar a capacidade do aluno ou percepção espacial em trabalhos com geometria.

Que tarefas então são estas propostas nas escolas que exigem invariavelmente, algum tipo de coação (positivo ou negativo) para que os educandos admitam delas participar ? Dir-se-á que a escola é verbalista, intelectualista, artificial... Mas adolescentes gostam de jogos verbais, quebra-cabeças e de fazer coisas sem serventia. Ao que parece, não são somente os conteúdos que geram resistência nos alunos, mas, e talvez principalmente, são os métodos. (VINCENZO, 1998 apud BORDENAVE, 2000, p.71)

Acredita-se que esse panorama pode ser modificado. A presente proposta metodológica parte do princípio de que a geometria fractal é um campo muito rico de oportunidades para o desenvolvimento de diversas habilidades, além do quantitativo, na resolução de problemas que exigem visualização e manipulação de modelos de figuras geométricas e, principalmente, no desenvolvimento do senso estético e da criatividade, com a utilização das formas geométricas em atividades de composição e decomposição.

Através da geometria fractal busca-se despertar, inicialmente, no aluno de matemática do ensino médio, o interesse por si próprio como agente do conhecimento, para depois fomentar-lhe uma atitude de observador e de transformador da realidade na qual está inserido, convertendo o ato de aprender em algo prazeroso e útil.

5.1 Por que explorando a geometria fractal na sala de aula?

Fazendo uma abordagem sobre o estudo dos fractais como um saber científico, estudando as características, classificações e suas principais propriedades, torna-se possível entender como eles podem ser trabalhados como um saber escolar.

Desse modo, ao introduzir o estudo da geometria fractal na sala de aula, os alunos têm, por meio dela, a oportunidade e a capacidade de investigar tópicos da matemática tradicional através de uma metodologia diferente que permita a estes alunos fazerem conexões tanto dentro da própria matemática e o mundo da natureza e do homem, e de explorarem a matemática por caminhos não analíticos (FUZZO apud RABAY, 2009).

O tema fractais além de possibilitar ao professor lecionar e trabalhar diversos temas matemáticos como: razão e proporção, semelhança de triângulos, progressão aritmética, contagem, números binomiais, noções de limites, área, perímetro e volume de figuras planas e espaciais, bem como outros temas, justifica-se também pelos motivos seguintes (Barbosa, 2006):

- **conexões** com várias ciências;
- **deficiências** da geometria euclidiana para o estudo de formas da natureza, desde que é, em geral, apenas apropriada para formas do mundo oriundas do humano, como construções de casas, prédios, pontes, estradas, máquinas etc.; os objetos naturais são com frequência mais complicados e exigem uma geometria mais rica, que os modela com fractais, possibilitando desenvolver projetos educacionais sobre temas transversais voltados para a compreensão de fenômenos que ocorram nos diversos ambientes;
- **difusão** e acesso aos computadores e às tecnologias da informática nos vários níveis de escolarização;
- **existência** do belo nos fractais e possibilidade do despertar e desenvolver o senso estético com o estudo da arte aplicada à construção de fractais, entendendo-se arte como toda ação que envolve simultaneamente emoção, habilidade e criatividade;
- **sensação** de surpresa diante da ordem na desordem.

Como já exposto, antes de Benoit Mandelbrot ter denominado os fractais, estes eram conhecidos como “monstros matemáticos” ou “entes patológicos”; devido terem características e resultados inusitados para a Matemática até então conhecida. Alguns deles permanecem como “belas” exemplificações do conceito, não só pela posição precursora, mas, sobretudo, pelas extensões ou generalizações possíveis.

Contudo, o professor do ensino fundamental, médio, ou mesmo do ensino superior, poderá encontrar muitas outras razões e justificativas, promovendo a inserção adequada do tema fractais em suas aulas. Serão apresentados agora alguns desses fractais, atendo-nos a um breve histórico dos seus criadores e sugestões de como estes podem ser utilizados como recurso didático em sala de aula.

5.2 Tipos de fractais

Segundo Barbosa (2006) há vários procedimentos para construir “novos” fractais, em geral, a partir de fractais já existentes. Tais procedimentos podem ser classificados em quatro grupos:

5.2.1 Fractais pela fronteira ou fractais geométricos

Os fractais geométricos podem ser gerados facilmente a partir de figuras geométricas euclidianas. A seguir serão apresentados alguns dos mais famosos fractais geométricos.

1. Curva de Koch

Para a construção da *curva de Koch*, inicia-se tomando um segmento de reta. Divide-se o segmento em três partes iguais, em seguida retira-se a parte central e, no seu lugar, coloca-se um triângulo equilátero sem a base. Uma variação da *curva de Koch* é o fractal conhecido como *floco de neve de Koch* construído a partir de um triângulo equilátero, no qual é aplicada a mesma regra recursiva da curva de Koch em cada lado do triângulo. Assim, é possível observar nas Figuras 5.1 e 5.2, a construção da curva e do floco de neve de Koch.

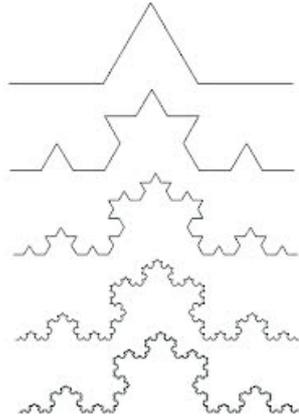


Figura 5.1: *Curva de Koch*

Fonte: *Janos,2008*

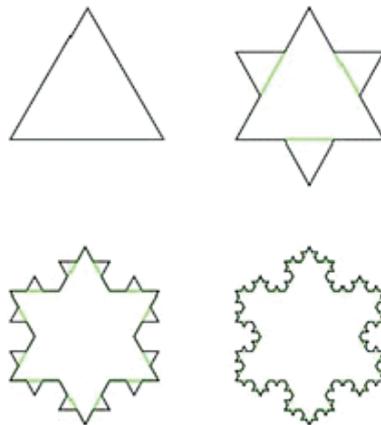


Figura 5.2: *Floco de Neve de Koch*

Fonte: *Janos,2008*

Uma variação da Ilha de Koch pode ser obtida dividindo o segmento em 4 partes iguais e construindo com 8 partes com dois dentes, uma para cima e outro para baixo que será o nível 1 do fractal, que funcionará como modelo gerador para todas as novas partes. As figuras 5.3 e 5.4 mostram as variações da curva de Koch e da ilha quadrangular de Koch.

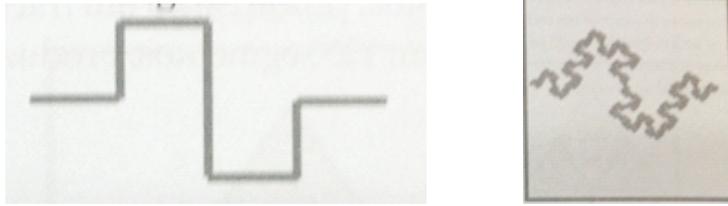


Figura 5.3: *Curva quadrangular de Koch*

Fonte: *Barbosa, 2006*

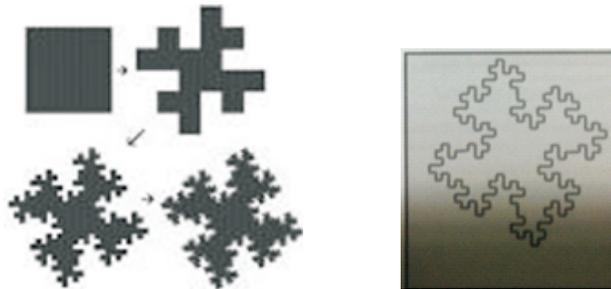


Figura 5.4: *Ilha quadrangular de Koch*

Fonte: *Barbosa, 2006*

2. Curva de Peano

Giuseppe Peano (1858-1932) - Matemático italiano, nascido em Turim. Apresentou, em 1890, uma curva fractal que preenche todo o plano. A curva de Peano é construída por um processo iterativo mostrado a seguir.

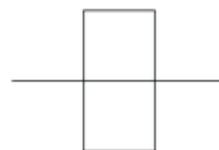
Passo 0: constrói-se um segmento de reta. (Figura de partida).



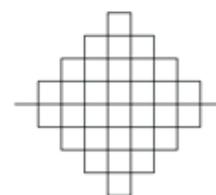
Passo 1: divide-se esse segmento em três partes iguais.



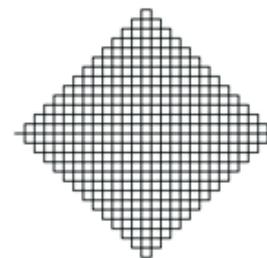
Passo 2: sobre o segmento médio, constrói-se um retângulo bissectado pelo segmento, formando dois quadrados com lado igual ao segmento que lhes deu origem.



Passo 3: Em cada segmento dos nove restantes, repetem-se os passos 1 e 2, e assim sucessivamente, até ao infinito.



A figura final é a Curva de Peano.



Observe-se que as curvas obtidas nas diferentes iterações da recursão, a partir da primeira, intersectam-se a si próprias, nos vértices dos pequenos quadrados que se vão formando em cada iteração. Pode-se demonstrar que no limite (levando a construção anterior até uma infinidade de iterações), a curva de Peano, não é mais do que uma superfície completamente preenchida.

3. Dimensão da Curva de Peano

Supondo que o segmento inicial tem comprimento 1 ($l = 1$), em cada iteração um segmento dá origem a 9 segmentos ($N = 9$), e o coeficiente de redução é $\frac{1}{3}$ ($r = \frac{1}{3}$). Portanto, a dimensão da curva de Peano é:

$$d = \frac{\log 9}{\log 3} \implies d = \frac{2\log 3}{\log 3} \implies \boxed{d = 2}$$

A curva de Peano é o exemplo de uma curva, dimensão 1 segundo a geometria euclidiana, que preenche uma superfície de dimensão 2. Pode-se então dizer que a Curva de Peano é bidimensional.

4. Variações da curva de Peano

Sagan mostra que o matemático Walter Wunderlich (1910 - 1998), entre diversas outras contribuições, enumerou outras três curvas que satisfazem as condições para a geração de curvas de preenchimento espacial, mostradas a seguir.

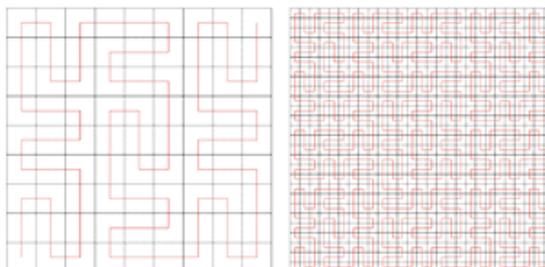


Figura 5.5: *Curva de Peano Switch-back Type (Peano-S)*

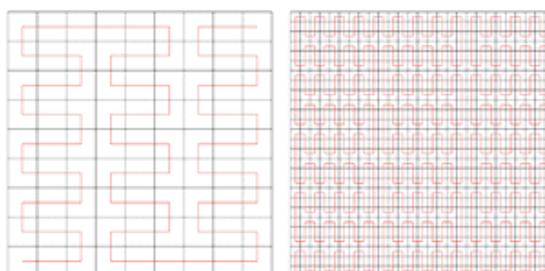


Figura 5.6: *Curva de Peano Switch-back Type (Peano-R)*

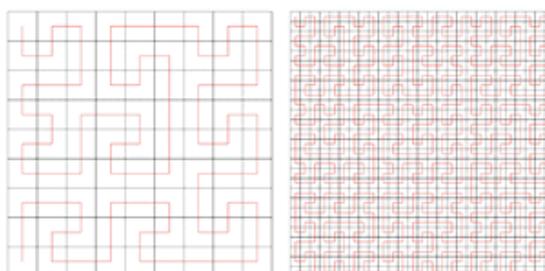


Figura 5.7: *Curva de Peano Meander Type (Peano-M)*

5. Curva de Hilbert

David Hilbert (1862 - 1943) - Nasceu na antiga Prússia. Em 1891 coloca a público a sua curva de cobertura de superfície de um quadrado.

Construção da curva de Hilbert

1. Considerar um quadrado e dividi-lo em quatro quadrados, dando início à curva com 3 segmentos consecutivos com extremos nos seus pontos centrais;
2. Substituir cada quadrado por novos 4 quadrados com a mesma construção da curva iniciadora, conectando cada curva parcial com um segmento na mesma ordem dos anteriores, e proceder assim sucessivamente.
3. Note que deve-se fazer as conexões da curva de maneira que as 4 curvas parciais anteriores fiquem conectadas na mesma disposição inicial: quadrado 1 – 1 (esquerdo-inferior), quadrado 1 – 2 (esquerdo-superior), quadrado 2 – 2 (direito-superior) e 2 – 1 (direito-inferior), o que obriga que no quadrado do canto esquerdo inferior se tenha sempre uma rotação da curva de nível anterior de 90° para a esquerda o de baixo.

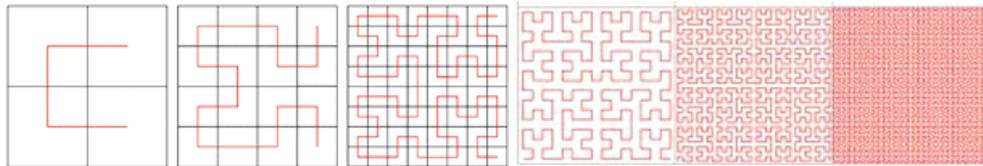


Figura 5.8: *Curva de Hilbert dos níveis 1 a 6*

Fonte: *o autor*

6. Curva de Sierpinski

O matemático russo Waclaw Sierpinski (1882 - 1969) introduziu um outro tipo de curva de preenchimento espacial, como mostra a figura a seguir.

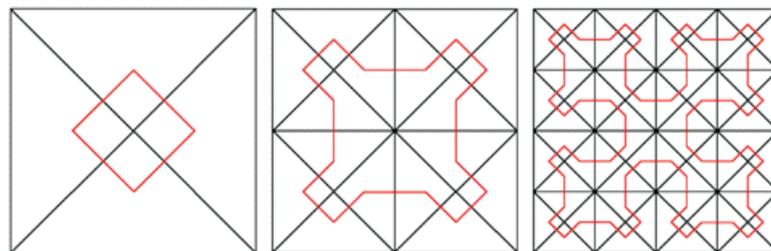


Figura 5.9: *Construção da curva de Sierpinski*

Fonte: *SAGAN, 1991*

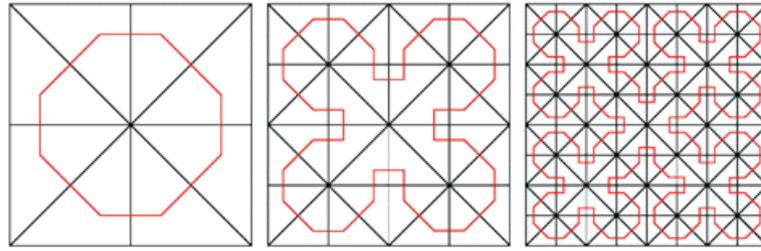


Figura 5.10: *Construção da curva modificada de Sierpinski*

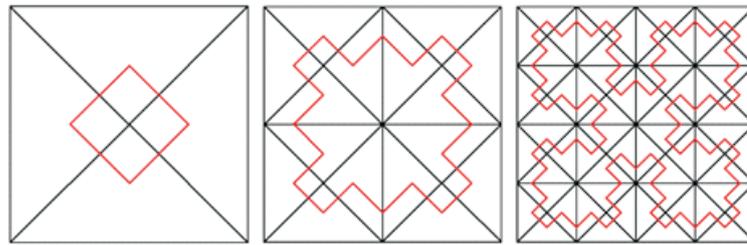


Figura 5.11: *Construção da curva modificada de Sierpinski*

5.2.2 Fractais por remoção

1. Triângulo de Sierpinski

Nome dado em homenagem a Waclaw Sierpinski (1882 - 1969) um professor polonês bem sucedido, que contribuiu com a teoria dos números, com a topologia e a teoria dos conjuntos, tendo, não somente este, mas vários objetos matemáticos com seu nome.

Construção do triângulo de Sierpinski

1. Parte-se de um triângulo equilátero e inscreve-se outro triângulo com vértices no ponto médio de cada um de seus lados. Retirando-se este triângulo, são formados 3 novos triângulos de mesmo tamanho.
2. Em cada novo triângulo inscreve-se outro triângulo com vértice no ponto médio de cada um de seus lados. Retirando-se o triângulo inscrito, são gerados 9 novos triângulos de mesmo tamanho.
3. Repetindo-se esse processo indefinidamente nos novos triângulos formados obter-se-á o fractal denominado *triângulo de Sierpinski*, cuja área cada vez se torna menor.

Trata-se da remoção de regiões internas semelhantes à figura inicial. A figura a seguir mostra algumas etapas do processo de construção.

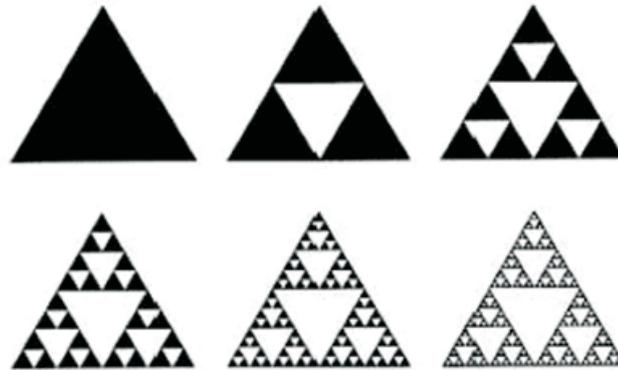


Figura 5.12: *Triângulo de Sierpinski dos níveis 0 a 5*

Fonte: *o autor*

2. Carpete de Sierpinski

Construção do carpete de Sierpinski

1. Partindo de um quadrado preenchido que é dividido em 9 quadrados iguais e retirado o quadrado do meio é obtida a figura geradora.
2. A 1ª iteração é obtida através de uma aplicação da regra recursiva na figura geradora a cada um dos quadrados preenchidos que a constituem. A figura final deste passo de construção é o elemento de construção da figura seguinte (2ª iteração), por aplicação da figura geradora.
3. O processo iterativo consiste em aplicar a mesma regra a cada um dos quadrados preenchidos que resultam da iterada anterior.
4. O processo é repetido indefinidamente obtendo-se a figura limite a que chamamos de *tapete de Sierpinski*.

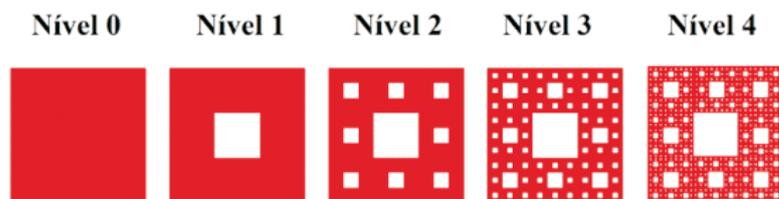


Figura 5.13: *Tapete de Sierpinski com 4 iterações*

Fonte: *Rabay, 2013*

Pode-se observar que a linha central do tapete de Sierpinski representa o *conjunto de Cantor*.

3. Conjunto de Cantor

Algoritmo da função iterada

Passo 1: considere um segmento de reta.

Passo 2: divida o segmento em três partes iguais e elimine a central.

Passo 3: considere os segmentos de reta restantes e retorne para o passo 2.

Na figura 5.14, os segmentos foram representados por barras para facilitar a visualização.

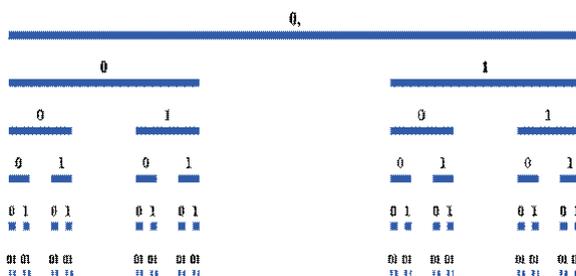


Figura 5.14: *Conjunto de Cantor dos níveis 0 a 5*

Fonte: *BACCARIN*

5.2.3 Fractais tipo Dürer

Albrecht Dürer (1471-1528) - Matemático e pintor alemão que apresentou ao mundo outra forma para compor um fractal partindo de polígonos regulares, os quais foram nomeados fractais do tipo Dürer. Será tomado como exemplo e definida a regra recursiva do fractal pentagonal.

Ao construir um pentágono regular, este será a base para a construção de outros cinco pentágonos regulares, como pode ser observado na figura 5.15. São construídos pentágonos menores em cada um de seus lados, de tal maneira dispostos que um de seus ângulos coincida como o ângulo do pentágono regular inicial, e ainda com a condição de que os outros cinco novos pentágonos tenham um vértice em comum. Repetindo esta ação, em cada lado, ficará formado ao centro um novo pentágono regular congruente aos lados. Removidos os cinco triângulos intermediários e o pentágono central, é obtido o nível 1 do fractal de Dürer.

Outras variações são obtidas mudando o polígono regular gerador do fractal. As figuras a seguir exibem as iterações até o nível 3 dos fractais pentagonal, hexagonal e octogonal do tipo Dürer.

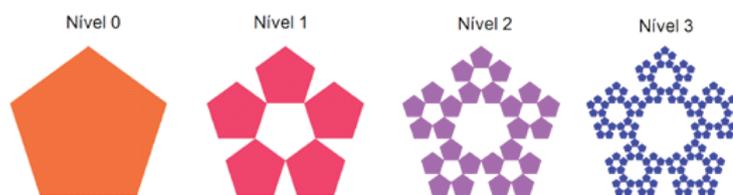


Figura 5.15: *Pentagonal tipo Dürer até o nível 3*

Fonte: *RABAY, 2013*

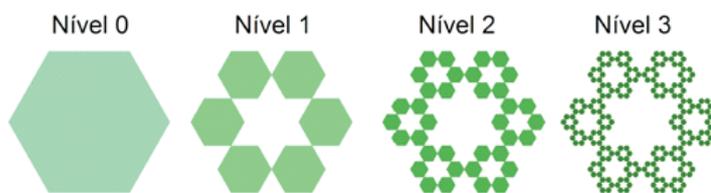


Figura 5.16: *Hexagonal tipo Dürer até o nível 3*

Fonte: *RABAY, 2013*

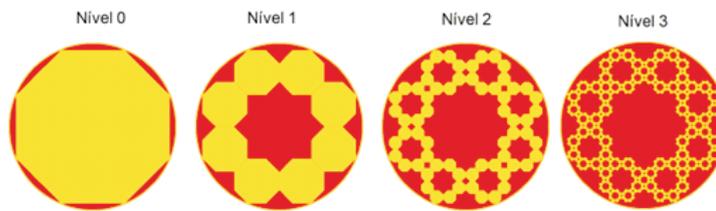


Figura 5.17: *Octogonal tipo Dürer até o nível 3*

Fonte: *RABAY, 2013*

5.2.4 Fractais do tipo árvore

Fractais do tipo árvore podem ser desenvolvidos com o uso de triângulos. Em um primeiro momento utiliza-se o triângulo retângulo fundamental, com lados na proporção 3, 4 e 5.

Sobre seus catetos e sobre sua hipotenusa são construídos quadrados. Com a base formada, é possível desenvolver o desenho. A sequência é apresentada na figura 5.18.

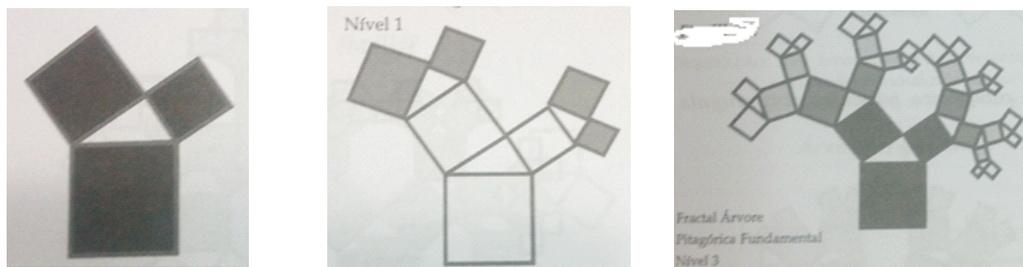


Figura 5.18: *Árvore pitagórica fundamental, níveis 0,1 e 3*

Fonte: *Barbosa,2006*

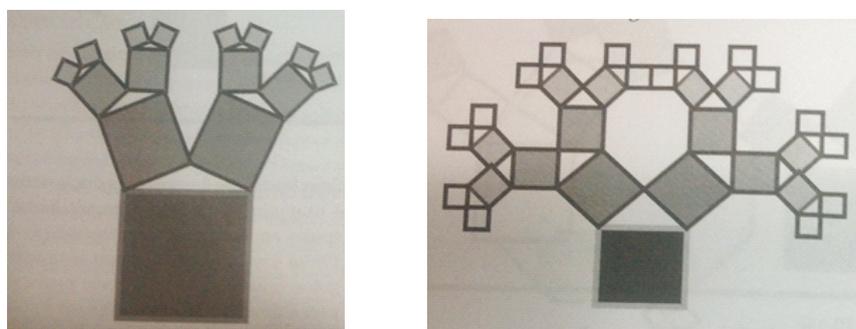


Figura 5.19: *Árvores pitagóricas isósceles retangular e obtusângula*

Fonte: *Barbosa,2006*

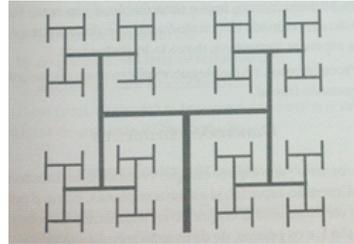
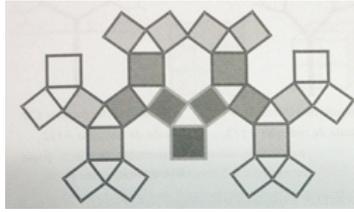


Figura 5.20: *Árvores pitagóricas equilátera e bifurcada 180°*

Fonte: *Barbosa, 2006*

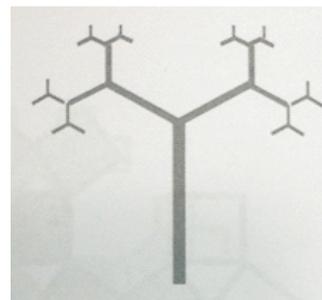
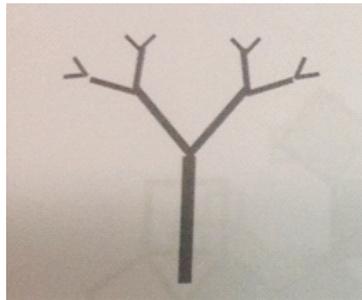


Figura 5.21: *Árvores pitagóricas bifurcadas 60° e 120°*

Fonte: *Barbosa, 2006*

5.3 Explorando fractais na sala de aula

Até aqui foram apresentados alguns fractais precursores com suas respectivas regras de construção. Será mostrada a seguir uma abordagem matemática que exhibe os respectivos conteúdos curriculares que podem ser trabalhados utilizando a construção destes fractais. É interessante ressaltar que a forma como estes fractais podem ser construídos na sala de aula ficará por conta da criatividade de cada professor. Pode ser utilizado o laboratório de informática com um programa específico para construção de fractais ou outro programa alternativo (o Geogebra, por exemplo). Sugere-se também o desenho utilizando régua e compasso, recorte em cartolina, construção com materiais concretos (*mdf, eva, etc*). As atividades poderão ter como objetivos, entre outros, os seguintes:

- Reconhecer e estimar medidas angulares em contextos e formas de linguagem diversificadas;
- Utilizar a lógica de pensamento estruturado para resolver problemas de natureza geométrica;
- Comparar e interpretar imagens;

- Calcular potências e perceber relações exponenciais em figuras geométricas;
- Reconhecer padrões geométricos em diferentes imagens;
- Estabelecer sequências numéricas a partir da observação e construção de figuras;
- Calcular perímetro e área;
- Generalizar sequências;
- Analisar o crescimento e decréscimo de sequências;
- Abstrair o conceito de limite.

5.3.1 O conjunto de Cantor (ou pente de Cantor)

Georg Cantor (1845-1918), matemático descendente de portugueses, nascido na Rússia, mudou-se em 1856 para Alemanha, país que adotou a nacionalidade e onde se doutorou pela Universidade de Berlim em 1867. Foi professor da Universidade de Halle, dedicou muito de seus estudos em pesquisas relativas à fundamentação da matemática, principalmente na parte conhecida como teoria dos conjuntos, sendo o primeiro matemático a estudar esta teoria, ao final do século XIX.

Ficou conhecido por ter elaborado a moderna teoria dos conjuntos. Segundo Cantor dois conjuntos são equivalentes, ou têm a mesma cardinalidade, quando é possível estabelecer uma correspondência biunívoca entre os elementos destes dois conjuntos, isto é, uma relação que leve elementos distintos de um conjunto em elementos distintos do outro conjunto, sendo todos os elementos objetos desta correspondência. Cantor denominou de enumerável os conjuntos que tem a mesma cardinalidade com o conjunto dos números naturais (\mathbb{N}). Imaginava-se então que dois conjuntos infinitos possuíam a mesma cardinalidade, até que em 1894, Cantor demonstra que o conjunto dos números reais (\mathbb{R}) tem cardinalidade diferente da dos números naturais.

Segundo LIMA (2004, p.163-164), dado um conjunto $X \subset \mathbb{R}$, um ponto $x \in X$ chama-se *ponto interior* de X quando existe um intervalo aberto (a, b) tal que, $x \in (a, b) \subset X$, quando todos os seus pontos são interiores o conjunto será chamado de *conjunto aberto*. Chama-se *vizinhança* de um ponto a , qualquer conjunto que contenha a interiormente. Diz-se que um número a é *ponto de acumulação* de um conjunto X se toda vizinhança de a contém infinitos elementos de X . Desta forma, um conjunto é *fechado* quando ele contém todos os seus pontos de acumulação. Um conjunto é fechado se, e somente se, seu complementar é aberto e que a interseção de conjuntos fechados é

um conjunto fechado. Um conjunto é dito totalmente *desconexo*, na reta, quando não contém intervalos.

Mas o que é o *conjunto de Cantor*? Em 1883, Cantor publicou um trabalho no qual é construído um conjunto chamado hoje de *conjunto de Cantor* (às vezes "*polvo de Cantor*" ou "*poeira de Cantor*"), como exemplo de conjunto excepcional e à época considerado um dos monstros matemáticos.

O conjunto de Cantor é construído da forma a seguir:

1. Tomando um segmento que representa o intervalo fechado $[0, 1]$. Divide-se este segmento em três partes, das quais é descartado o segmento central, ficando com os outros dois terços extremos.
2. Repete-se o mesmo procedimento com cada um dos segmentos restantes, sempre descartando o terço médio de cada divisão.
3. Os quatro segmentos restantes sofrerão o mesmo processo de divisão e retirada do terço médio, dando origem a oito segmentos cada vez menores.
4. Este processo deve ser repetido infinitamente, sempre dividindo cada segmento restante por três e dispensando o terço médio de cada divisão. O que sobra no limite é o *conjunto de Cantor*.

Se for analisado quais os pontos que restam após o processo infinito de construção do conjunto, observa-se que os pontos extremos dos diversos segmentos, obtidos em qualquer etapa da construção do *conjunto de Cantor*, estarão sempre presentes até o fim. Os pontos

$$0, 1, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{9}, \frac{2}{9}, \dots, \frac{8}{9}, \frac{25}{27}, \dots$$

pertencem, todos eles, ao conjunto final.

Se numerarmos cada etapa da construção do conjunto por $j = 1, 2, 3, 4, 5 \dots$, observa-se que são criados (para sempre) no conjunto 2^j pontos na j -ésima etapa. Isso, ao contrário do que seria imaginado no início faz com que o *conjunto de Cantor* tenha muitos infinitos de pontos, conforme mostrado na figura abaixo que descreve várias etapas da construção.

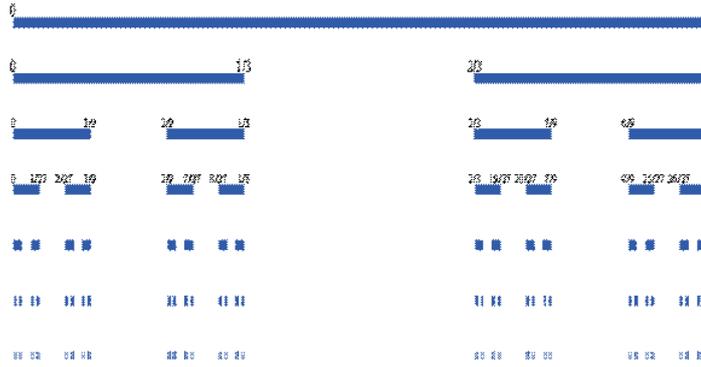


Figura 5.22: O conjunto de Cantor até a 6ª iteração

Fonte: *BACCARIN*

Explorar matematicamente o conjunto de Cantor com alunos do ensino médio (ou talvez com alunos do ensino fundamental) é uma das propostas do presente trabalho. O passo inicial é a definição.

Já foi visto que o conjunto de Cantor, nomeado pela letra K , é um subconjunto fechado do intervalo $[0, 1]$, obtido como complementar de uma reunião de intervalos abertos, do seguinte modo:

1. Retira-se do intervalo $[0, 1]$ seu terço médio aberto $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$, depois retira-se o terço médio aberto de cada um dos intervalos restantes $\left[0, \frac{1}{3}\right]$ e $\left[\frac{2}{3}, 1\right]$. Sobra então a união de quatro intervalos fechados. Em seguida, retira-se o terço médio aberto de cada um desses quatro intervalos.
2. Repete-se o processo indefinidamente. O conjunto K dos pontos não retirados é o conjunto de Cantor.

Após a definição propor aos alunos a construção de três ou quatro iterações com o auxílio da régua, lápis e uma folha pautada ou, ainda melhor, se for possível utilizar o software livre de geometria dinâmica *geogebra*. Este momento é rico para recordar algumas operações com frações que também estarão presentes em cada etapa, frisa-se o conceito de intervalo aberto, a diferença entre conjuntos, a união de intervalos e o conceito de intervalos disjuntos.

A relação de pertinência pode ser explorada questionando, por exemplo, se $\frac{1}{4}$ é ou não elemento de K_1 , primeira etapa da construção de K .

Pode ser proposta, paralelamente, a montagem de uma tabela para cada etapa, com informações quanto à quantidade de intervalos em cada iteração, os intervalos não removidos, o tamanho de cada intervalo fechado e a soma do comprimento dos intervalos removidos. Durante a construção, naturalmente, algumas indagações surgem ou podem ser instigadas pelo professor, tais como:

- Sobram elementos neste conjunto após infinitas iterações? Se existem, quem são eles? Exiba alguns. $\frac{1}{4}$ é elemento de K ? São infinitos os elementos deste conjunto? K é enumerável?
- Este conjunto é aberto ou fechado? K contém intervalos?
- É autossimilar? Possui complexidade infinita? Qual sua dimensão? Independe da escala? Podemos afirmar que K é um fractal?

Não pode ser desperdiçada a oportunidade de explorar o conjunto formado pelos extremos e é intuitivo que estes elementos pertençam a K . Com efeito, em cada etapa da construção de K são retirados apenas pontos interiores nos intervalos restantes das etapas anteriores. Também é fascinante notar que os elementos deste conjunto admitem, na base 3, uma representação só com os dígitos 0 e 2. Por exemplo,

- a) $\frac{8}{9} = 0 + 2\frac{1}{3} + 2\frac{1}{2^3} = (0, 22)_3$;
- b) $\frac{2}{27} = 0 + 0\frac{1}{3} + 0\frac{1}{2^3} + 2\frac{1}{3^3} = (0, 002)_3$;
- c) $1 = (0, 22\dots)_3$;
- d) $\frac{1}{3} = 0 + 1\frac{1}{3} = (0, 1)_3 = (0, 222\dots)_3$.

Da definição de que K é o conjunto de todos os pontos não removidos após a retirada de infinitos intervalos abertos, A_n , espera-se o surgimento da representação simbólica, tal como

$$K = [0, 1] - \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \text{ ou como } K = [0, 1] \cap (\mathbb{R} - A_n).$$

A figura 5.23 apresenta os três primeiros passos na construção do conjunto de Cantor e a tabela os resultados esperados de cada iteração.



Figura 5.23: As três primeiras etapas na construção do conjunto de Cantor

Fonte: BACCARIN, 2005

Iteração	Quantidade de intervalos	Intervalos não removidos	Comprimento de cada intervalo	A soma do comprimento dos intervalos removidos
K_0	1	$[0, 1]$	1	0
K_1	2	$\left[0, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, 1\right] = [0, 1] - \left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right]$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
K_2	4	$\left[0, \frac{1}{9}\right] \cup \left[\frac{2}{9}, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, \frac{7}{9}\right] \cup \left[\frac{8}{9}, 1\right]$ $= [0, 1] - \left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right] \cup \left[\frac{1}{9}, \frac{2}{9}\right] \cup \left[\frac{7}{9}, \frac{8}{9}\right]$	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$
K_n	2^n	$K = [0, 1] - \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$	$\left(\frac{1}{3}\right)^n$	$\frac{1}{3} + \frac{2}{9} + \dots = 1$

Tabela 5.1: Contagem no Conjunto de Cantor

Fonte: BACCARIN, 2005

A resposta às perguntas que ao longo da construção do conjunto forem aparecendo devem ser fonte para a inserção dos conceitos matemáticos necessários e, desta forma, sendo respondidas. Primeiramente, o conjunto K não é vazio, pois em cada passo da sua construção são removidos apenas os pontos interiores dos intervalos restantes da etapa anterior, isto é, pelo menos os extremos destes intervalos, como $0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{9}$, etc. são elementos do conjunto. LIMA (2004, p.173) completa mostrando que estes pontos são infinitos e formam um subconjunto enumerável de K . A indagação continua: o conjunto de Cantor é enumerável? A resposta é negativa completa LIMA (2004, p.179), pois K é um conjunto fechado não vazio sem pontos isolados, logo não enumerável.

Na construção de K após a n -ésima etapa restam apenas intervalos de comprimento $\left(\frac{1}{3}\right)^n$, ou seja, com comprimento tendendo a zero. Daí segue que K não contém intervalos, pois, por menor que seja um intervalo deverá ter comprimento maior que zero. Explorando a soma dos intervalos removidos tem-se uma série que converge para um. Surpreendente quando se analisa a diferença entre o comprimento do intervalo $[0, 1]$ e a somatória dos intervalos removidos, concluindo que o conjunto K tem medida zero,

mesmo como uma infinidade de elementos.

Este conjunto é autossimilar, pois cada parte do conjunto é semelhante ao todo, e sendo uma figura limite não existe a representação completa caracterizando-o com complexidade infinita. Independentemente da escala a que se observa este conjunto obtém-se sempre a mesma figura. A dimensão fractal, já vista anteriormente é dada por

$$d = \frac{\log 2}{\log 3} \implies \boxed{d \cong 0,63}$$

É esperado ainda que os alunos observem a quantidade de pontos restantes em cada iteração. Na 1ª iteração temos 4 pontos, na segunda 8 pontos e na iteração $k + 1$ teremos 2^{k+1} pontos. Uma última observação após uma rápida análise é que se constata que até a quarta iteração todos os pontos restantes são racionais com denominadores com potências de base 3. Se isto fosse um padrão de todo o conjunto este seria enumerável, entretanto, existem pontos que não têm este padrão, por exemplo: $\frac{1}{4}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{9}{13}$ e $\frac{11}{12}$.

5.3.2 Floco de neve de Koch

Pouco é conhecido da vida de Helge Von Koch, matemático polonês, que em 1904 introduziu uma curva que hoje recebe o seu nome. Contudo, além de ser sua curva um belo exemplo de curva sem tangente, ela pode ser modificada com outras construções como a figura conhecida como *floco de neve de Koch*.

1. Construção do floco de neve de Koch



Figura 5.24: *Construção do floco de neve de Koch*

Fonte: *Cascão, Cardoso, Damas, 2005*

Regra de substituição recursiva

- Comece com um triângulo equilátero sólido 
- Quando vir um segmento fronteiro _____ substitua-o por 

2. Como varia o número de lados M_n com as transformações?

Passos	Número de lados				
Figura de partida			3	=	3×4^0
1	3x4	=	12	=	3×4^1
2	12x4	=	48	=	3×4^2
3	48x4	=	192	=	3×4^3
4	192x4	=	768	=	3×4^4
5	768x4	=	3072	=	3×4^5

Tabela 5.2: *Variação do número de lados do floco de neve de Koch*

Fonte: *www.mat.uc.pt, 2005*

O número de lados do Floco de Neve de Koch tende para o infinito.

$$M_n = 3 \times 4^n$$

3. Como varia o comprimento de cada lado com as transformações?

Passos	Medida de cada lado				
Figura de partida	1				
1	$\frac{1}{3}$	=	$\frac{1}{3^1}$	=	3^{-1}
2	$\frac{1}{9}$	=	$\frac{1}{3^2}$	=	3^{-2}
3	$\frac{1}{27}$	=	$\frac{1}{3^3}$	=	3^{-3}
4	$\frac{1}{81}$	=	$\frac{1}{3^4}$	=	3^{-4}
5	$\frac{1}{243}$	=	$\frac{1}{3^5}$	=	3^{-5}

Tabela 5.3: *Variação do comprimento N_n de cada lado do floco de neve de Koch*

Fonte: *Cascão, Cardoso, Damas, 2005*

Generalizando,

$$N_n = 3^{-n} \quad \text{ou} \quad N_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

o comprimento de cada lado do floco de neve de Koch tende para zero.

4. Como varia o perímetro P_n da curva com as transformações?

Pode-se definir a sucessão dos perímetros P_n à custa das duas sucessões anteriores.

Assim,

$$P_n = M_n \times N_n = (3 \times 4^n) \times (3^{-n}) = 3 \times \left(\frac{4}{3}\right)^n$$

Quando n tende para infinito, a sucessão P_n tende para infinito. Logo, conclui-se que o perímetro da curva de Koch tende para infinito ¹

5. Como varia a área da curva com as transformações?

A área do polígono, em cada passo, obtém-se adicionando à área do polígono do passo anterior a área de um triângulo equilátero, cujo lado é $\frac{1}{3}$ do anterior, multiplicada tantas vezes quanto for o número de lados do polígono anterior.

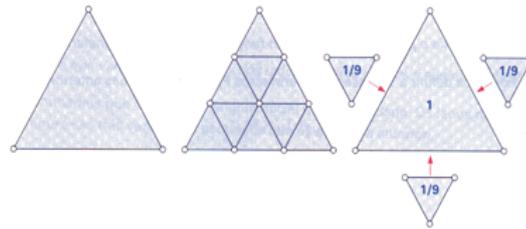


Figura 5.25: Área do floco de neve de Koch

Fonte: Cascão, Cardoso, Damas, 2005

Pela semelhança de figuras planas, sabe-se que, se o lado de um polígono sofre uma redução de razão $\frac{1}{3}$, a área sofre uma redução de $\frac{1}{9}$.

$$A_0 = 1$$

$$A_1 = 1 + \left(\frac{1}{9}\right) \times 3 = 1 + \frac{1}{3}$$

$$A_2 = 1 + \frac{1}{3} + \left(\frac{1}{9}\right)^2 \times (3 \times 4) = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{4}{9}$$

\vdots

$$A_{n+1} = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{4}{9} + \frac{1}{3} \times \left(\frac{4}{9}\right)^2 + \dots + \frac{1}{3} \times \left(\frac{4}{9}\right)^n = 1 + \frac{1}{3} \times \left(\frac{4}{9}\right)^n.$$

¹ $0 < q < 1 \implies \lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0.$

Então $A_{n+1} = 1 + S_n$, com

$$S_n = \frac{1}{3} \times \frac{1 - \left(\frac{4}{9}\right)^n}{1 - \frac{4}{9}}$$

Calculando o limite de S_n quando n tende para infinito, tem-se

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{3}{5}$$

Segue que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + S_n) = 1 + \frac{3}{5} \implies \boxed{A_{n+1} = 1,6}$$

ou seja, a área do floco de neve tende para 1,6, qualquer que seja o número de iterações efetuadas.

6. Dimensão do floco de neve de Koch

Como já exposto, a dimensão de um objeto, euclidiano ou não, pode ser encontrado através da fórmula: $d = \frac{\log N}{\log r}$, onde N (número de partes em que se divide o objeto) e r (coeficiente de redução). Nos exemplos seguintes será aplicada a fórmula diretamente. No caso do floco de neve de Koch, temos,

$$\begin{cases} N = 4 \\ r = 3 \end{cases} \implies d = \frac{\log 4}{\log 3} \cong 1,26.$$

5.3.3 Triângulo de Sierpinski

Waclaw Sierpinski (1882-1969), matemático polonês, foi professor em Lvov e Wariaw. Teve grande reputação, principalmente na década de 1920-1930, a ponto de uma das crateras lunares ter o seu nome.

Em 1916, Sierpinski apresentou um dos famosos "monstros" em seu trabalho, denominado *triângulo de Sierpinski*, além de suas variações como o carpete e a curva de Sierpinski.

O triângulo de Sierpinski é obtido através de um processo iterativo de divisão de um triângulo equilátero em quatro triângulos semelhantes. Visto um destes quatro triângulos estar invertido (em relação ao original), é retirado do triângulo original, sobrando apenas os outros três.

1. Construção do triângulo de Sierpinski



Figura 5.26: *Triângulo de Sierpinski até o nível 3*

Fonte: *www.mat.uc.pt, 2005*

Regra de substituição recursiva

- Comece com um triângulo equilátero sólido 
- Quando vir um triângulo sólido  substitua-o por 

2. Como varia o número de triângulos M_n com as transformações?

Passos	Número de triângulos		
Figura de partida	1	=	3^0
1	3	=	3^1
2	9	=	3^2
3	27	=	3^3

Tabela 5.4: *Contagem no triângulo de Sierpinski*

Fonte: *www.mat.uc.pt, 2005*

Generalizando,

$$M_n = 3^n$$

o número de lados do Triângulo de Sierpinski tende para o infinito.

3. Como varia o comprimento N_n de cada lado com as transformações?

Passos	Medida de cada lado			
Figura de partida	1			
1	$\frac{1}{2}$	=	$\frac{1}{2^1}$	= 2^{-1}
2	$\frac{1}{4}$	=	$\frac{1}{2^2}$	= 2^{-2}
3	$\frac{1}{8}$	=	$\frac{1}{2^3}$	= 2^{-3}

Tabela 5.5: Medida do lado do triângulo de Sierpinski

Fonte: *www.mat.uc.pt*, 2005

Generalizando,

$$\boxed{N_n = 2^{-n}} \quad \text{ou} \quad \boxed{N_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n}$$

o comprimento de cada lado do Triângulo de Sierpinski tende para zero.

4. Como varia o perímetro P_n da curva com as transformações?

Pode-se definir a sucessão dos perímetros P_n à custa das duas sucessões anteriores.

Assim,

$$\boxed{P_n = M_n \times N_n = (3^n) \times \left(\frac{1}{2}\right)^n = \left(\frac{3}{2}\right)^n}$$

Quando n tende para infinito, a sucessão P_n tende para infinito. Logo, pode-se concluir que o perímetro do Triângulo de Sierpinski tende para infinito.

5. Como varia a área A_n da figura com as transformações?

Passo 0: $A_0 = A$

Passo 1: $A_1 = \frac{3}{4} \times A$

Passo 2: $A_2 = \frac{3}{4} \times \left(\frac{3}{4} \times A\right) = \left(\frac{3}{4}\right)^2 \times A$

Passo 3: $A_3 = \frac{3}{4} \times \left(\left(\frac{3}{4}\right)^2 \times A\right) = \left(\frac{3}{4}\right)^3 \times A$

⋮

Passo n : $A_n = \left(\frac{3}{4}\right)^n \times A$.

A área do Triângulo de Sierpinski tende para zero.

6. Dimensão do Triângulo de Sierpinski

$$\begin{cases} N = 3 \\ r = 2 \end{cases} \implies d = \frac{\log 3}{\log 2} \cong 1,59.$$

5.3.4 Esponja de Menger

O fractal "esponja de Menger", foi apresentado pela primeira vez pelo matemático austríaco Karl Menger (1902-1985), no ano de 1926, enquanto ele explorava o conceito de dimensão topológica. Esse objeto matemático é um exemplo clássico de um fractal construído a partir de uma figura em três dimensões e, na verdade, nada mais é do que uma extensão tridimensional do conjunto de Cantor e do tapete de Sierpinski.

1. Construção da Esponja de Menger

Inicia-se com um cubo sólido, do qual cada aresta é dividida em três partes iguais formando nove quadrados em cada face, em seguida, é retirado o cubo central de cada face mais o cubo do centro da esponja, obtendo assim a iteração 1 do fractal. Procede-se da mesma forma com cada cubo restante, obtendo as sucessivas iterações.

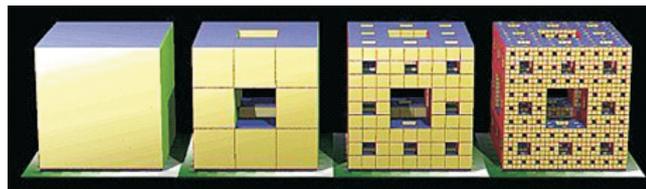


Figura 5.27: : Níveis 0 a 3 da construção da Esponja de Menger

Fonte: RABAY, 2013

2. Contagem na esponja de Menger

Além de fixar a idéia da construção da Esponja de Menger, será feito agora o estudo da contagem dos cubos. Seja um cubo com aresta medindo uma unidade (u) que será dividido em 27 cubos usando planos secantes ortogonais às faces. Esses cubos devem possuir aresta $\frac{1}{3}u$. Retira-se o cubo do centro e os cubos centrais de cada face.

Conclusão para o nível 1.

Cubos removidos = 7, cubos restantes = 20.

Para o nível 2 (figura 5.28), iterando, em cada um dos 20 cubos restantes, é feita uma nova remoção de 7 pequenos cubos aresta $\left(\frac{1}{3}\right)^2 u$, portanto são retirados, no nível 2, o número de 7×20 pequenos cubos; isto é, ao todo já foram removidos $7 + 7 \times 20$. Desde que, em cada um dos 20 pequenos cubos, sobraram 20 cubos menores, conclui-se que ao nível 2 existem 20^2 cubos menores.

Em continuação, ao nível 3, iterativamente, serão removidos 7×20^2 cubos de aresta $\left(\frac{1}{3}\right)^3 u$ como ficam 20 em cada um, restam no total restante 20^3 cubos de aresta $\left(\frac{1}{3}\right)^3 u$.

Assim, em resumo, temos o quadro de contagem

Nível	0	1	2	3	...	n
Cubos removidos	0	7	7×20	7×20^2	...	$7 \times 20^{n-1}$
Cubos restantes	1	20	20^2	20^3	...	20^n

Tabela 5.6: *Contagem dos cubos da esponja de Menger*

Fonte: *Barbosa, 2006*

3. Volumes na esponja

Seja V o volume do cubo inicial. Como foi dividido em 27 cubos de aresta $\frac{1}{3}u$. Segue que o volume de cada um, ao nível 1, é $\left(\frac{1}{27}\right)V$; mas como retira-se 7 deles ao todo removeu-se corpos com volume $7\left(\frac{1}{27}\right)V$ e sobram $\left(\frac{20}{27}\right)V$.

Analogamente, ao nível 2, cada cubinho tem volume $\left(\frac{1}{27}\right)^2 V$, portanto, retirou-se nessa iteração $7 \times 20 \left(\frac{1}{27}\right)^2 V$; fica-se, então, ao nível 2, com o volume restante,

$$\begin{aligned}
V - 7 \left(\frac{1}{27} \right) V - 7 \times 20 \left(\frac{1}{27^2} \right) V &= \left[\frac{27^2 - 7 \times 27 - 7 \times 20}{27^2} \right] V \\
&= \left[\frac{27(27 - 7) - 7 \times 20}{27^2} \right] V \\
&= \left[\frac{27 \times 20 - 7 \times 20}{27^2} \right] V \\
&= \left[\frac{(27 - 7)20}{27^2} \right] V \\
&= \left(\frac{20}{27} \right)^2 V
\end{aligned}$$

resultado que poderia ser encontrado mais rápido diretamente, pois se ficaram 20^2 cubinhos, e cada um tem volume $\left(\frac{1}{27} \right)^2$.

Da mesma maneira, ao nível 3, teremos o volume $\left(\frac{20}{27} \right)^3 V$.

Observando os volumes respectivamente para o nível 0, 1, 2 e 3, dados por V , $\left(\frac{20}{27} \right) V$, $\left(\frac{20}{27} \right)^2 V$ e $\left(\frac{20}{27} \right)^3 V$ é claramente reconhecida a possibilidade da inferência plausível para o nível n , $\left(\frac{20}{27} \right)^n V$.

Como $\left(\frac{20}{27} \right) < 1$, a cada nova iteração, o volume diminui em $\left(\frac{7}{27} \right)$, aproximadamente 26%; portanto, o volume do fractal tende a zero, cuja interpretação pode ser a seguinte: *as perfurações na esponja vão aumentando tanto que a esponja tende a desaparecer em volume.*

4. Áreas na esponja

Seja F a área de cada face do cubo inicial, ou que a área da superfície total do cubo é $6F$.

Desde que foi dividido em 27 pequenos cubos e retirado o central e os 6 cubos dos centros das faces fazendo as 3 perfurações, pode-se concluir que:

- Em cada face perde-se $\left(\frac{1}{9} \right) F$, fornecendo a perda total de $6 \left(\frac{1}{9} \right) F$, entretanto, ganha-se 24 (figura 5.29) novos quadrados para a superfície, ainda que nas perfurações, portanto, aumenta-se a área em $24 \left(\frac{1}{9} \right) F$.



Figura 5.28: *Parte retirada na interação da esponja de Menger*

Fonte: *Barbosa, 2006*

Em resumo, temos a área da esponja no nível 1 é dada por

$$6F - 6 \left(\frac{1}{9}\right) F + 24 \left(\frac{1}{9}\right) F = \left[\frac{(54 - 6 + 24)}{9}\right] F = 8F.$$

Continuando a remoção dos cubos sempre da mesma forma, em todas iterações, passa-se de uma área de 6 unidades para uma área de 8 unidades. Pode-se afirmar que em cada nível a área é $\frac{4}{3}$ (equivalente a $\frac{8}{6}$) da área do nível anterior.

Em consequência, no limite, a área total da superfície da esponja de Menger tende ao infinito $\left(\frac{4}{3} > 1\right)$.

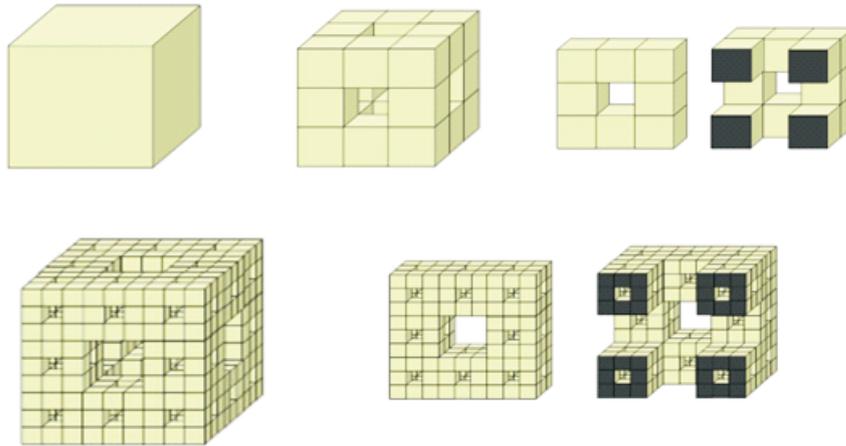


Figura 5.29: *Estágios 0,1 e 2 e cortes do nível 1 e 2 da esponja de Menger*

Fonte: *SAGAN, 1991*

No caso da esponja de Menger nota-se que, no primeiro nível, a figura inicial foi dividida em 20 partes, sendo que cada uma delas deve ser multiplicada por 3 para se tornar igual ao cubo inicial. Então, a dimensão da esponja é

$$D = \frac{\log 20}{\log 3} = \frac{1,3103}{0,47712} \cong 2,73.$$

Logo, este objeto matemático pode ser entendido e estudado como um elemento que está entre o plano, cuja dimensão é 2 e um objeto do espaço cuja dimensão é 3.

Observa-se ainda que se o cálculo da dimensão da esponja for efetuado usando os dados de qualquer outro nível de sua construção, o valor obtido será o mesmo.

6 CONSTRUINDO FRACTAIS EM SALA DE AULA COM MANIPULAÇÃO DE MATERIAIS CONCRETOS

Agora, será exibido aos professores do ensino fundamental ou médio, a título de sugestão, algumas atividades que podem ser desenvolvidas em sala de aula, fazendo uso de materiais concretos na construção de fractais.

O material necessário mais adequado para as atividades é um conjunto de peças quadradas, de madeira ou EVA. Outro material razoavelmente equivalente é um conjunto de peças triangulares equiláteras.

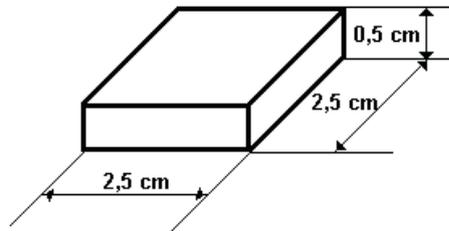


Figura 6.1: Peças de madeira ou EVA

Fonte: *Barbosa, 2006*

A diferença essencial entre os fractais manipulativos, que serão apresentados agora, e os fractais mostrados anteriormente, reside no fato de que os fractais manipulativos não são construídos com redução adequada em escala para passagem de um nível ao nível consecutivo, mas por dilatação; seguindo que os fractais construídos a partir de material concreto serão dados para níveis consecutivos por ampliação das escalas.

6.1 Fractal tríminó

Seja o *tríminó não reto*, construído pela conexão de 3 quadrados, figura 6.2(a), que será o fractal em nível 1.

Convide os alunos para substituírem cada peça quadrada por um trîminó L, figura 6.2(b), que corresponde à construção empregando 3 figuras iguais à figura 6.2(a), então teremos o fractal em nível 2.

Novamente convide-os para trocarem cada quadrado por um trîminó, figura 6.2(c), que corresponde à construção empregando 3 figuras iguais à 6.2(b), obtendo então o fractal ao nível 3.

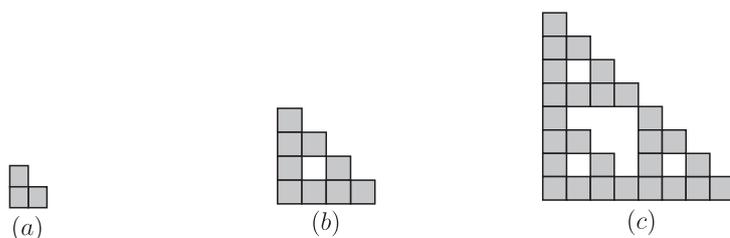


Figura 6.2: *Níveis 0 a 2 do fractal trîminó*

Fonte: *Barbosa, 2006*

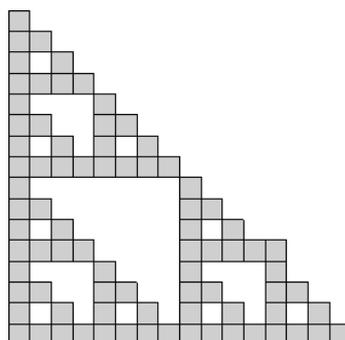


Figura 6.3: *Trîminó*

Fonte: *Barbosa, 2006*

É claro que, em continuação, as obtenções dos níveis 5 e 6 seriam análogas, porém, o número de peças necessárias será bastante grande. Vejamos,

Nível 1: 3 peças;

Nível 2: $3 \times 3^3 = 3^3 = 9$ peças;

Nível 3: $3 \times 3^2 = 3^3 = 27$ peças;

Nível 4: $3 \times 3^4 = 81$ peças.

Em geral, para o **nível** n , usaremos 3^n peças.

6.2 Carpete de Sierpinski

Considere uma peça quadrada. Substitua-se o quadrado por um quadrado 3×3 removido o quadrado central, obtendo o fractal ao nível 1, figura 6.4(a).

Em seguida substitua-se cada quadrado pelo fractal nível 1, para obter o fractal nível 2, figura 6.4(b); e novamente, para obter o fractal nível 3, figura 6.4(c), substitua-se cada quadrado do nível 2 pelo fractal do nível 1.

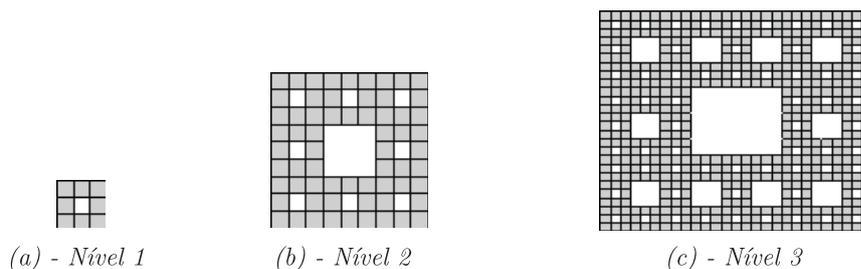


Figura 6.4: *Carpete de Sierpinski*

Novamente aqui é interessante explorar a contagem do número de peças necessárias para a obtenção dos vários níveis.

Nível 1: 8 peças;

Nível 2: $8^2 = 64$ peças;

Nível 3: $8^3 = 512$ peças;

Nível n : 8^n peças quadradas.

Salienta-se que as construções por manipulação são mais adequadas para trabalhos em grupo, principalmente pelo número de peças necessárias, que seria reduzido a $\frac{1}{4}$ ou $\frac{1}{5}$.

6.3 Construção de um fractal cartão de degraus numa folha de papel

Material necessário: 01 tesoura, 01 folha de papel cartão ou cartolina.

Os cartões resultam de uma seqüência de cortes (linhas cheias) e dobraduras (linhas pontilhadas). Tomando-se como ponto de partida a planificação do *cartão degraus centrais*, figura 6.5, as etapas a seguir mostram sua construção.

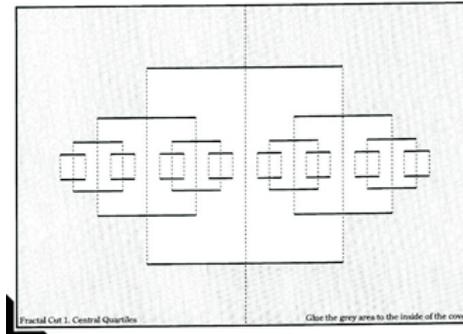


Figura 6.5: *Planificação do cartão degraus centrais*

Fonte: URIBE, 2004, p.19

1. Pegue uma folha de tamanho A4.
2. Dobre a folha ao meio, ao longo de sua altura, como mostra a figura.

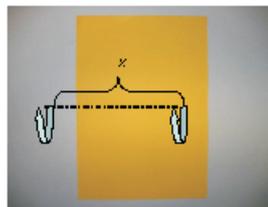


Figura 6.6: *Dobradura inicial (Passo 2)*

3. Com a folha dobrada ao meio, faça dois cortes verticais simétricos a uma distância $\frac{x}{4}$ das extremidades da folha, de altura $\frac{a}{2}$, como mostra a figura 6.7 Note que $a = 2 \times \frac{x}{4} = \frac{x}{2}$.

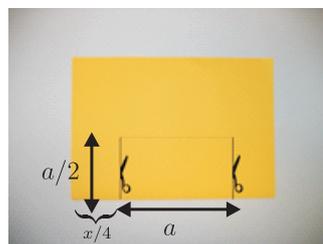


Figura 6.7: *Passo 3*

4. Dobre o retângulo formado para cima, fazendo um vinco na dobra.

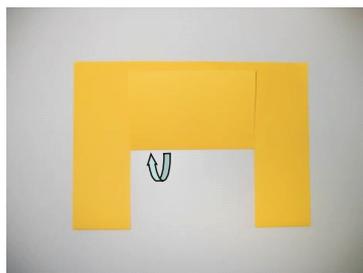


Figura 6.8: *Passo 4*

5. Volte o retângulo dobrado para a posição inicial e puxe o centro da figura em relevo. Podemos dizer que esta é a primeira geração do cartão fractal.

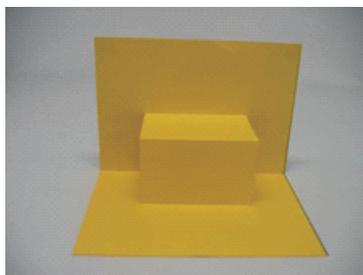


Figura 6.9: *Primeira geração do cartão fractal*

6. Dobre a folha novamente, conforme a figura 6.10, pois as gerações seguintes serão obtidas seguindo os mesmos passos de 3 a 5, porém, em uma escala menor, apenas na região dobrada. A segunda geração do cartão fractal é obtida com o corte mostrado na figura 6.12.

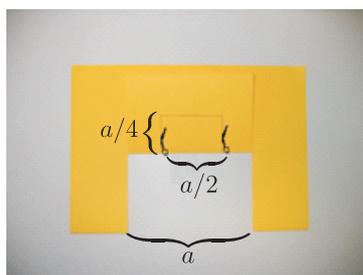


Figura 6.10: *Passo 6*

7. Dobre o retângulo para cima, fazendo um vinco na dobra.

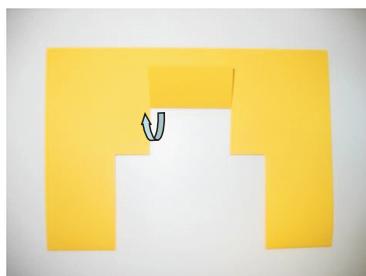


Figura 6.11: *Passo 7*

8. Volte o retângulo dobrado para a posição inicial e puxe a figura em relevo. Neste momento, tem-se a primeira e a segunda geração do cartão fractal

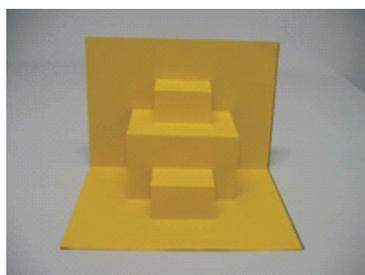


Figura 6.12: *Primeira e segunda geração do cartão fractal*

9. Para obter mais gerações, repita esse processo enquanto for possível realizar os cortes e as dobraduras no papel, sempre usando a regra de corte estabelecida no passo 3. A figura mostra um cartão de quatro gerações obtido pelo processo descrito.

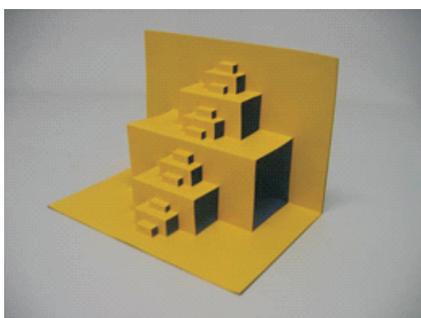


Figura 6.13: *Cartão fractal degraus centrais*

Percebe-se durante a construção que, a cada novo corte e dobradura, obtém-se novos paralelepípedos. Se chamarmos de iteração zero, a primeira geração do cartão, quantos

paralelepípedos novos surgem a cada iteração? Pode-se explorar a construção do cartão construindo o quadro 11.

<i>Iteração</i>	<i>Número de paralelepípedos novos</i>
<i>0</i>	<i>1</i>
<i>1</i>	<i>2</i>
<i>2</i>	<i>4</i>
<i>3</i>	<i>8</i>
<i>4</i>	<i>16</i>
<i>...</i>	<i>...</i>
<i>n</i>	<i>2ⁿ</i>

Tabela 6.1: *Iteração X número de paralelepípedos novos*

Fonte: *URIBE, 2004*

Note-se que a cada iteração, o número de novos paralelepípedos dobra, porém, em escala menor (paralelepípedos menores). Com isso, é possível concluir que o processo de construção dos paralelepípedos em cada iteração é descrito pela lei de potência 2^n onde $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ é o número da iterações. Deve ser observado que a cada nova iteração é obtido um paralelepípedo cercado por 2 novos paralelepípedos. Este valor será denominado fator multiplicador.

Pode-se incrementar nossa tabela explorando o volume de cada paralelepípedo gerado em diferentes iterações. Na primeira geração, o volume do paralelepípedo construído será $a \times \frac{a}{2} \times \frac{a}{2} = \frac{a^3}{4}$.

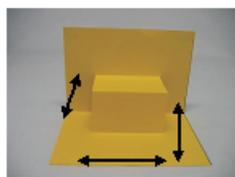


Figura 6.14: *Paralelepípedo obtido na primeira iteração*

O quadro 6.2 mostra o cálculo dos volumes dos paralelepípedos obtidos nas diferentes iterações, assim como o volume total. Nesse caso, a lei de potência dos volumes produz equações de maior complexidade. Esta atividade de generalização da lei dos volumes pode ser encarada como um grande desafio para os estudantes.

<i>Iteração</i>	<i>Volume do novo paralelepípedo</i>	<i>Volume total</i> <i>(Soma dos volumes de todos os</i> <i>paralelepípedos)</i>
0	$\left(\frac{a}{2}\right)^2 \times a = \frac{a^3}{4} = \frac{a^3}{2^0 \times 2^2}$	$\frac{a^3}{4}$
1	$\left(\frac{a}{4}\right)^2 \times \frac{a}{2} = \frac{a^3}{32} = \frac{a^3}{2^5} = \frac{a^3}{2^3 \times 2^2}$	$\frac{a^3}{4} + 2 \times \frac{a^3}{32} = \frac{4a^3 + a^3}{16} = \frac{5a^3}{16}$
2	$\left(\frac{a}{8}\right)^2 \times \frac{a}{4} = \frac{a^3}{256} = \frac{a^3}{2^8} = \frac{a^3}{2^6 \times 2^2}$	$\frac{5a^3}{16} + 4 \times \frac{a^3}{256} = \frac{20a^3 + a^3}{64} = \frac{21a^3}{64}$
...
<i>n</i>	$\frac{a^3}{2^{3n+2}}$	$\frac{a^3}{3} \left[1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1} \right]$

Tabela 6.2: *Volumes no cartão Degraus Centrais*

Fonte: *URIBE, 2004*

Com base nos dados da tabela é possível chegar à fórmula geral que informa o volume total dos paralelepípedos do cartão em uma iteração qualquer. Na tabela acima observa-se que o volume total do sólido em uma iteração qualquer é a soma dos termos de uma progressão geométrica.

À medida que o número de iterações vai aumentando, surgem novos paralelepípedos, logo o volume total aumenta. Entretanto, a variação de volume de uma iteração para outra é cada vez menor, pois o volume de cada novo paralelepípedo diminui. Essa ideia poderia ser utilizada para introduzir a noção de limite.

Note também que o cartão possui auto similaridade, ou seja, ele mantém a mesma forma e estrutura sob uma transformação de escala e complexidade infinita. Se fosse possível continuar infinitamente o processo de corte e dobradura no papel, nunca seria obtido o "cartão final", uma vez que a lei que define o processo de construção poderia continuar a ser aplicada infinitamente.

6.4 Fractais e o triângulo de Pascal

Reportemo-nos ao *triângulo aritmético de Pascal* (Blaise Pascal: 1623-1662) obtido com os coeficientes das expansões binominais sucessivas. Assim, de $(a + b)^0 = 1$, obtem-se o único número da primeira linha; $(a + b)^1 = a + b = 1a + 1b$, obtem-se os coeficientes 1 e 1 da segunda linha; de $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 = 1a^2 + 2ab + 1b^2$ tem-se os coeficientes 1, 2 e 1 da terceira linha; e assim sucessivamente.

Os números que aparecem nas linhas do triângulo são os *coeficientes binomiais*, calculados pela fórmula

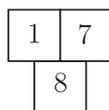
$$\binom{m}{n} = C_{m,n} = \frac{m!}{n!(m-n)!}$$

onde m estará associado à linha e n varia de 0 a m em cada linha.

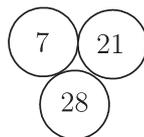
Entretanto, existe uma lei de formação simples baseada numa recorrente conhecida como *relação de Stiefel* (Michel Stiefel: 1486-1567) publicada na sua *aritmética integral*, em Nuremberg (1544), cujo esquema do padrão consiste em *adicionar dois valores consecutivos de uma linha para obter o valor, de mesma ordem que o segundo, da linha seguinte*. Em termos simbólicos a relação se traduz em $C_{m,n} = C_{m,n+1} = C_{m+1,n+1}$.

Esse padrão é facilmente memorizável com um dos esquemas geométricos dados a seguir, utilizados para exemplificar a obtenção de números da oitava linha.

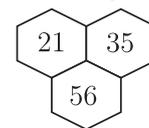
com quadrados



com círculos



com hexágonos



Seja o triângulo aritmético.

- Indiquemos os números do triângulo, que são pares, dando um destaque às suas respectivas casas triangulares, por exemplo, colorindo-as de branco;
- Retiremos todos os triângulos cuja base esteja invertida;

- Percebe-se claramente que esse procedimento coincide com a construção do triângulo de Sierpinski, o que nos leva a crer que existe uma relação entre esse procedimento iterativo e os números binomiais.

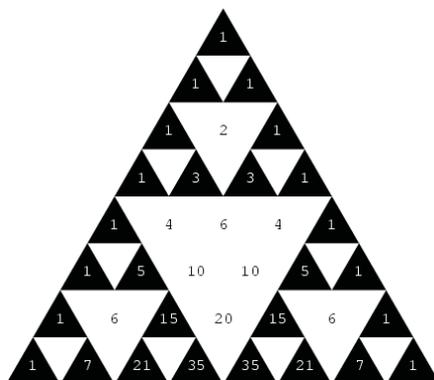


Figura 6.15: *Triângulo de Pascal*

Fonte: *www.mat.uc.pt*

7 A PRESENÇA DO TEMA FRACTAIS NOS LIVROS DIDÁTICOS DA EDUCAÇÃO BÁSICA

Neste capítulo serão apresentadas algumas atividades presentes em livros didáticos do *ensino fundamental e médio*, explanando como o tema vem sendo abordado, bem como sugerindo algumas novas atividades e estratégias que entende-se ser de grande utilidade para o professor, uma vez que propiciam um instrumental para inovar sua prática pedagógica com atividades lúdicas que podem levar os alunos a desenvolver habilidades, como estimular sua criatividade. Neste momento é oportuno refletir um pouco sobre como o ensino da matemática, em particular, o ensino da geometria vem sendo tratado e quais são os caminhos a serem trilhados para que os alunos tenham um ensino significativo nesta área tão deficitária nas escolas.

É observado que a maioria dos professores não aborda as geometrias não euclidianas nas aulas de matemática, tanto no ensino fundamental como no ensino médio, não por desinteresse, mas sim pelo fato destes professores não terem tido contato com essas geometrias em sua formação, considerando que a maioria dos cursos de *licenciatura em matemática*, não contempla este conteúdo em suas estruturas curriculares. A ausência destas geometrias na grade curricular da maioria dos cursos de licenciatura em matemática tem levado os alunos (bem como grande parte dos professores) a crer que a *geometria euclidiana* é a única geometria possível e presente em nosso mundo, daí a necessidade de se trabalhar com as *geometrias não euclidianas*, mais especificamente, a Geometria dos Fractais por meio de atividades exploratórias e com a utilização de materiais manipuláveis relacionando-a com o mundo real.

É fácil mostrar aos alunos que o conceito de fractais, suas propriedades e aplicações estão presentes em problemas reais. Isto permite a exploração do tema tanto em atividades com materiais manipuláveis, em um laboratório de Matemática, como também na própria sala de aula.

Outro fator decisivo que despertou interesse em desenvolver este trabalho foi o fato de que a proposta da inserção da geometria fractal no currículo escolar é no mínimo desafiadora, isto porque o contato com o novo oferecerá resistência (ou inquietações) em professores de matemática, uma vez que os forçará a refletir e rever suas práticas

pedagógicas. Outro desafio reside na escassez da abordagem do tema em livros didáticos e a disponibilidade de materiais de apoio, desafiando o professor a criar os seus próprios recursos.

Paradoxalmente a esta realidade, os *PCN's do ensino fundamental* fazem referência às geometrias não euclidianas, porém, não há nas diretrizes nenhuma menção da inclusão das geometrias não euclidianas no currículo do ensino fundamental ou médio e, neste contexto, urge a necessidade de professores e Estado ampliarem os horizontes da educação inserindo ferramentas como a inclusão no currículo da *geometria fractal* com o intuito de proporcionar aos alunos uma visão mais ampla do mundo que os cerca.

“Fruto da criação e invenção humanas, a matemática não evoluiu de forma linear e logicamente organizada. Desenvolveu-se com movimentos de idas e vindas, com rupturas de paradigmas. Frequentemente um conhecimento foi amplamente utilizado na ciência ou na tecnologia antes de ser incorporado a um dos sistemas lógicos formais do corpo da matemática. Exemplos desse fato podem ser encontrados no surgimento dos números negativos, irracionais e imaginários. Uma instância importante de mudança de paradigma ocorreu quando se superou a visão de uma única geometria do real, a geometria euclidiana, para aceitação de uma pluralidade de modelos geométricos, logicamente consistentes, que podem modelar a realidade do espaço físico”. Fonte: PCN's 3º e 4º ciclos.

A geometria, sendo a parte gráfica da matemática, encontra-se, na maioria das propostas curriculares das escolas, dentro da área de matemática, como um dos últimos tópicos a serem ensinados. Ainda assim, poucos são os professores que dão ao seu ensino uma abordagem gráfica, trazendo o desenho à tona. Poucos são os que evidenciam seu aspecto lúdico que poderia proporcionar aos alunos uma experiência única. A geometria, no ensino fundamental, na prática, é ministrada com uma abordagem teórica, bastante algebrizada, e assim prossegue pelo ensino médio que da mesma forma reproduz o modelo teórico, até ser revisada sem muita metodologia pelos programas de cursos pré-vestibulares.

Apesar de em 1997 o Ministério da Educação (MEC) lançar os PCN's para as quatro primeiras séries do ensino fundamental e no ano seguinte, 1998, para as quatro últimas, observa-se que alguma menção é dada à geometria e ao desenho, não só nos PCN's de matemática, como também no de arte, geografia e ciências. Nos PCN's de primeira a quarta séries para a área de matemática no ensino fundamental, por exemplo, dentre os vários princípios que o norteia pode-se ressaltar a presença da geometria e do desenho,

pincelados em alguns pontos.

(...) No entanto, a geometria tem tido pouco destaque nas aulas de matemática e, muitas vezes, confunde-se seu ensino com o das medidas. Em que pese seu abandono, ela desempenha um papel fundamental no currículo, na medida em que possibilita ao aluno desenvolver um tipo de pensamento particular para compreender, descrever e representar, de forma organizada, o mundo em que vive. (PCN's ENSINO FUNDAMENTAL MATEMÁTICA, 1997).

(...) no ensino da matemática, destacam-se dois aspectos básicos: um consiste em relacionar observações do mundo real com representações (esquemas, tabelas, figuras); outro consiste em relacionar essas representações com princípios e conceito matemáticos. Nesse processo, a comunicação tem grande importância e deve ser estimulada, levando-se o aluno a "falar" e a "escrever" sobre matemática, a trabalhar com representações gráficas, desenhos, construções, a aprender como organizar e tratar dados (PCN MATEMÁTICA, 1997).

(...) o significado da matemática para o aluno resulta das conexões que ele estabelece entre ela e as demais disciplinas, entre ela e seu cotidiano e das conexões que ele estabelece entre os diferentes temas matemáticos (PCN's MATEMÁTICA, 1997).

O que pode ser percebido diante da exposição destes fragmentos dos PCN's é que o ensino da geometria, bem como de outros temas da matemática, tem sido, na prática, abordados de uma forma muito algebrizada, não permitindo ao aluno estabelecer aquelas conexões mencionadas com outras ciências nem perceber a presença da matemática no cotidiano. A única inovação concreta que se tem conhecimento da quebra deste paradigma no nosso país é o caso do Estado do Paraná. Nas diretrizes curriculares da educação básica deste estado já está incluso no currículo do ensino médio o ensino das geometrias hiperbólicas, elíptica, bem como da geometria fractal

Também, no ensino médio, aprofundam-se os estudos das noções de geometrias não euclidianas ao abordar a geometria dos fractais, geometria projetiva, geometria hiperbólica e elíptica. Na geometria dos fractais, pode-se explorar: o floco de neve e a curva de Koch; triângulo e tapete de Sierpinski, conduzindo o aluno a refletir e observar o senso estético presente nessas entidades geométricas, estendendo para as suas propriedades, através da "regularidade harmoniosa nas suas próprias irregularidades" (disponível em www.matematica.seed.pr.gov.br/)

Aprende-se matemática não somente por sua beleza ou pela consistência de suas teorias, mas principalmente para que, a partir dela, o homem amplie seu conhecimento e, por conseguinte, compreenda melhor o mundo no qual ele vive. Vale ressaltar que

dentre os conteúdos da matemática considerados essenciais para a formação do aluno está a geometria, rica em elementos que favorecem a percepção espacial e a visualização, contribuindo assim, para que cada indivíduo tenha conhecimento do espaço em que vive.

A geometria tem função essencial na formação dos indivíduos, pois ela possibilita uma interpretação mais completa do mundo, uma comunicação mais abrangente de ideias e uma visão mais equilibrada da matemática. É um ramo da matemática de grande eficiência na conexão didático-pedagógica dos conteúdos, pois, os conceitos, propriedades e questões aritméticas ou algébricas são clarificados pela geometria, que realiza uma verdadeira tradução para o aprendiz.

Feita esta reflexão acerca do ensino da geometria no ensino fundamental e médio, será mostrado a seguir como a geometria fractal tem sido abordada nos livros didáticos da educação básica. Ressalte-se que todos os livros didáticos foram aprovados pelo PNLD.

7.1 Do ensino fundamental

7.1.1 RIBEIRO - Projeto Radix Matemática - 6º ano

O livro de RIBEIRO no Módulo 7 - Triângulos e quadriláteros na pg. 245, trás na atividade 15, mostrada na figura abaixo, o triângulo de Sierpinski, solicitando ao aluno a contagem do número de triângulos, porém, não faz nenhuma menção da figura ser um fractal nem expõe nenhuma definição do que é um fractal. De fato não é justificável expor aos alunos nesta etapa do desenvolvimento algoritmos por demais complexos, no entanto, o conceito de fractal pode ser utilizado para trabalhar alguns conteúdos do ensino fundamental, como frações e potências, por exemplo. A atividade proposta poderia ser explorada associando a contagem dos triângulos com o conceito de fractais. No caso do triângulo de Sierpinski, tem-se

Iteração 0: 1 triângulo;

Iteração 1: mais 4 triângulos (1 branco e 3 azuis);

Iteração 2: mais 12 triângulos (3 brancos e 9 azuis);

Iteração 3: mais 36 triângulos menores (9 brancos e 27 azuis).

Total: 53 triângulos.

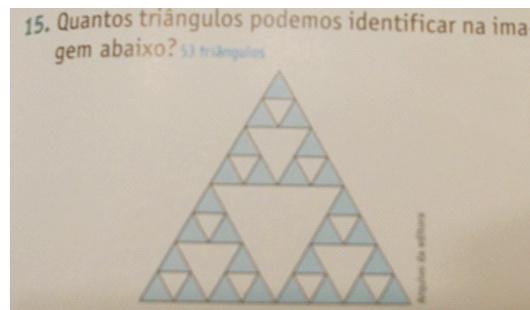


Figura 7.1: *Contagem de triângulos*

Fonte: *RIBEIRO, 2010*

7.1.2 RIBEIRO - Projeto Radix Matemática - 8º ano

No capítulo 6 - módulo 3 - Polígonos: é apresentado nas pags. 104 e 105 um texto da revista superinteressante, edição de abril de 2002, intitulado: "o que são fractais?" referindo-se a estes como "pinturas psicodélicas". O texto apresenta algumas definições do que é um fractal exibindo a imagem do conjunto de Mandelbrot e do floco de neve de Koch. O texto é apresentado na seção "algo a +" e não apresenta nenhuma atividade abordando os fractais. Nesta seção poderiam ser explorados alguns fractais mais simples que abordassem o tema polígonos, assunto tratado na seção. Seria adequado neste capítulo uma abordagem sobre contagens de polígonos com o carpete e/ou o triângulo de Sierpinski, uma vez que, tais fractais são construídos a partir de polígonos regulares, respectivamente, o quadrado e o triângulo equilátero. Caberia também a exploração dos fractais tipo Durer, uma vez que estes são gerados a partir de polígonos regulares, tema do qual trata o capítulo.

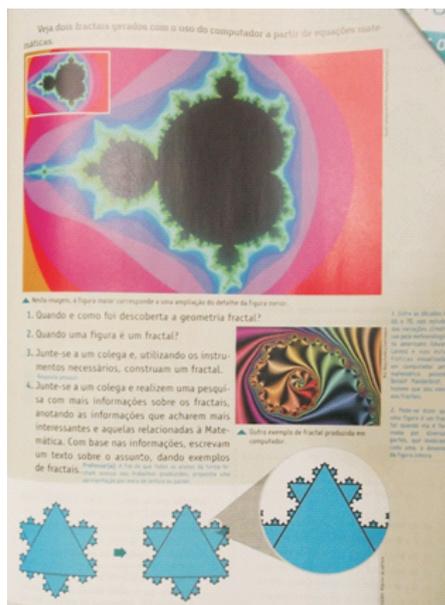


Figura 7.2: *Conjunto de mandelbrot e floco de neve de Koch*

Fonte: *RIBEIRO, 2010*

7.2 Do ensino médio

7.2.1 SOUZA, Joamir - Novo olhar matemática - Ensino médio vol.1

No capítulo 1 que trata de noções de conjuntos, na seção "explorando o tema", o autor apresenta dois fragmentos de texto: Um apresentando George Cantor, intitulado "O homem que colocou o infinito no bolso"; outro intitulado "O notável avanço dos fractais", este abordando o conceito de dimensão não inteira. É interessante este segundo texto porque apresenta um conceito totalmente novo ao aluno acostumado com a ideia de dimensão inteira aprendida no estudo da geometria euclidiana. O conceito de dimensão não inteira pode propiciar férteis discussões e permite a exploração da geometria fractal em diversos temas com os quais estes se relacionam no primeiro ano do ensino médio, por exemplo: conjuntos, geometria plana, funções, etc. Este livro aborda em vários capítulos atividades explorando a geometria fractal. A seguir são transcritas algumas destas atividades abordadas pelo autor.



Figura 7.3: *George Cantor*

Fonte: *SOUZA, 2010*

No capítulo 5 que trata das funções exponenciais é proposta na pag. 168, a atividade abaixo:

A seqüência de figuras apresenta vários níveis na composição de um fractal.

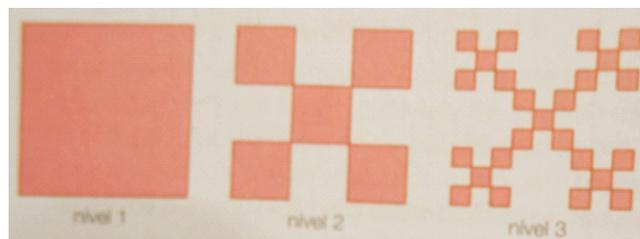


Figura 7.4: *Atividade sobre seqüências*

Fonte: *SOUZA, 2010*

- a) Utilizando uma malha quadriculada, construa a figura correspondente ao próximo nível dessa seqüência.
- b) Escreva uma função que expresse o número y de quadradinhos existentes na figura de nível x dessa seqüência.

c) Em qual nível da sequência a figura será formada por:

- 3 125 quadradinhos?
- 78 125 quadradinhos?

Solução:

a) No nível 1 tem-se um quadrado, cujo lado é dividido em três partes iguais, dos quais são retirados quatro quadrados gerando a primeira iteração com 5 quadrados. A partir daí o processo se repete e cada quadrado gera 5 novos quadrados. Segue que pela regra recursiva surgirá, em cada nível, o número de quadrados conforme o quadro a seguir.

Nível (x)	Número de quadrados (y)
1	$1 = 5^0 = 5^{1-1}$
2	$5 = 5^1 = 5^{2-1}$
3	$25 = 5^2 = 5^{3-1}$
⋮	⋮

Tabela 7.1: *Contagem dos quadrados*

Fonte: *o autor*

Pela regra recursiva, no nível 4, surgiria a figura seguinte com

$$125 = 5^{4-1} = 5^3 = 125$$

quadrados.

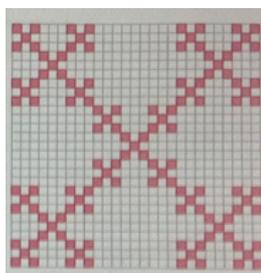


Figura 7.5: *Contagem de quadrados*

Fonte: *SOUZA, 2010*

b) Pela observação do padrão da figura pode-se ver claramente que a cada nível um quadrado gera mais cinco novos quadrados, no nível x surgiriam então y quadrados conforme a função $y = 5^{x-1}$.

c) Para serem obtidos 3.125 quadrados bastaria encontrar a solução da equação exponencial

$$5^{x-1} = 3125 \implies 5^{x-1} = 5^5 \implies x - 1 = 5 \implies \boxed{x = 6} \text{ (nível 6).}$$

De modo análogo para se obter 78.125, a equação a seguir deveria ter solução.

De fato:

$$5^{x-1} = 78125 \implies 5^{x-1} = 5^7 \implies x - 1 = 7 \implies \boxed{x = 8} \text{ (nível 8).}$$

Esta atividade além de explorar a competência em identificar padrões de formação da figura pode estimular a criatividade, podendo o professor sugerir a construção com outra figura geradora diferente do quadrado.

No capítulo 6 que trata de logaritmos e função logarítmica, é proposta na pag. 185 a atividade com o enunciado seguinte:

O estudo dos fractais tem se revelado de grande importância em vários campos científicos, como na biologia e meteorologia. Os fractais são estruturas geométricas complexas que em geral seguem uma ordem. Um exemplo de fractal é o chamado floco de neve de Koch, que recebe esse nome devido a sua semelhança com um floco de neve natural. Esse fractal é construído a partir de algumas iterações em um triângulo equilátero. Na 1ª, basta dividir cada lado do triângulo equilátero em três partes iguais e, sobre a parte central de cada lado, construir outro triângulo equilátero. A 2ª iteração consiste em dividir cada lado da nova figura em três partes iguais e, sobre cada parte central, construir um novo triângulo equilátero, e assim sucessivamente.



Figura 7.6: *Atividade com o floco de neve*

Fonte: *SOUZA, 2010*

O perímetro da figura obtida pode ser calculado pela fórmula $P = 3l \left(\frac{4}{3}\right)^n$ em que l é a medida do lado do triângulo equilátero inicial e n é o número de iterações realizadas.

a) Considerando o triângulo inicial com iteração 0 e lado medindo 1 unidade, determine o perímetro da figura obtida na:

- 1ª iteração;
- 3ª iteração;
- 7ª iteração.

b) A partir de qual iteração o perímetro da figura obtida será maior que o triplo da inicial? Se necessário, utilize $\log_3 2 = 0,631$;

c) Em sua opinião, o que ocorrerá com o perímetro da figura se realizarmos cada vez mais iterações?;

d) Junte-se a um colega e pesquisem acerca dos fractais na natureza. Em seguida, apresentem os resultados à turma.

O floco de neve de Koch, assim como a curva de Koch, podem ser utilizados no ensino da matemática propiciando a exploração de diversos temas, incluindo a noção de limites, introduzido no Ensino Médio no terceiro ano. O enunciado do problema traz a relação $P = 3l \left(\frac{4}{3}\right)^n$ que permite calcular o perímetro na iteração n . O professor pode explorar este fractal utilizando materiais concretos ou a construção do desenho do fractal de modo a induzir o aluno a chegar à relação mostrada para o cálculo do perímetro, bem como da mesma forma tentar induzir os alunos a descobrirem padrões para o cálculo da área, comprimento do lado, etc.

A criatividade do professor também permite lançar desafios aos alunos para criar outros fractais e a partir das próprias criações instigá-los a descobrir padrões para os fractais criados.

Sugere-se aos professores propor variações do floco de neve substituindo a figura geradora, no caso um triângulo equilátero, por outros polígonos regulares como quadrados, pentágonos, hexágonos, etc. As figuras a seguir, construídas com uso do Geogebra, apresentam uma variação do floco de neve a partir de um quadrado e de um pentágono regular, respectivamente, até o nível 2. Os alunos podem ser desafiados não somente a construir as sucessivas iterações, mas também, descobrir padrões para determinar, entre outros elementos, a contagem dos polígonos, a área, o comprimento do lado e o perímetro dos fractais construídos.

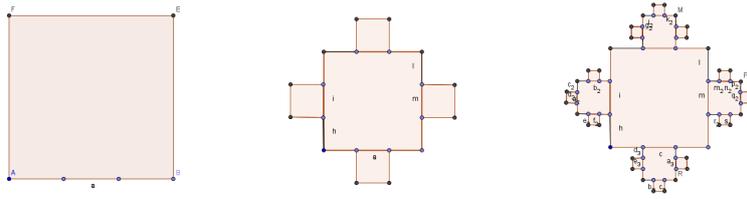


Figura 7.7: *Variação do floco de neve com quadrados*

Fonte: *o autor*

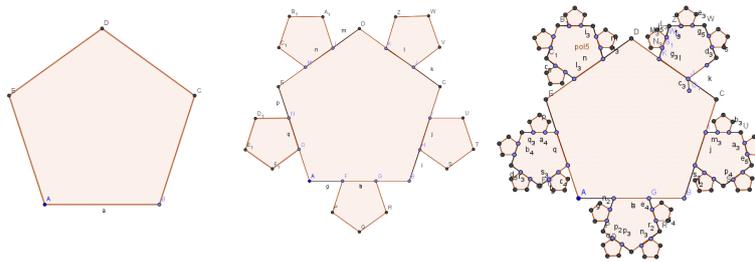


Figura 7.8: *Variação do floco de neve com pentágonos*

Fonte: *o autor*

No capítulo 8, pg. 248 exemplo 113, que trata do estudo das progressões, é encontrada a atividade mostrada na figura abaixo solicitando a contagem da quantidade de pontos na 5ª figura. Esta atividade é similar à atividade já mostrada com o fractal do tipo Dürer com quadrados, diferenciando apenas que no lugar do quadrado temos círculos. Pode-se induzir os alunos a verificarem se a figura trata-se de um fractal e instigá-los a determinar o padrão que gera a figura.

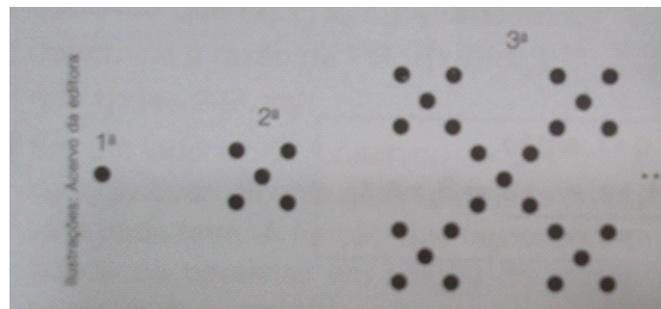


Figura 7.9: *Contagem de círculos*

Fonte: *SOUZA, 2010*

Ainda na pg. 248 é apresentada a atividade 118 mostrada a seguir.

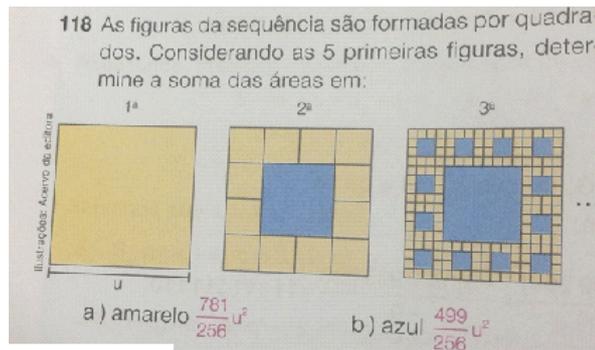


Figura 7.10: *Varição do tapete de Sierpinski*

Fonte: *SOUZA, 2010*

Esta atividade é bastante interessante porque mostra uma figura que representa um fractal que se assemelha ao carpete de Sierpinski, porém, com uma regra recursiva diferente. Enquanto no carpete de Sierpinski o lado do quadrado inicial é dividido em três partes gerando 9 quadrados, dos quais é retirado o quadrado central a cada iteração, na atividade proposta, conforme mostra a figura 7.10, o lado do quadrado é dividido em quatro partes gerando 16 quadrados dos quais são retirados os 4 quadrados centrais. Assim, enquanto na primeira iteração do carpete de Sierpinski a área do quadrado é $\frac{1}{9}$ da anterior, na atividade proposta a área da primeira iteração é $\frac{4}{16}$ ou $\frac{1}{4}$ da área anterior. Este fato abre um leque de oportunidades para os professores lançarem desafios aos seus alunos para criarem seus próprios fractais e instigá-los, a partir de suas próprias criações, a explorar matematicamente os elementos dos fractais por eles criados. Basta para isto criar uma regra recursiva dividindo o lado do quadrado em $5, 6, \dots, n$ partes iguais e retirar $1, 4, 6 \dots k$ quadrados centrais. Pode ser proposto aos alunos como atividades a serem exploradas, por exemplo, determinar o padrão que determina a área, volume, perímetro, comprimento do lado e, associado a isto, explorar os temas da matemática que se relacionam com estas investigações (progressões, geometria plana e espacial, limites, números complexos e números binomiais, dentre outros).

Segue a resolução da atividade proposta.

Área inicial: $A = u^2$.

- **Primeiro passo:** o quadrado inicial gera 16 quadrados menores dos quais 12 são amarelos e 4 azuis. Os amarelos representam $\frac{12}{16}$ ou $\frac{3}{4}$ da área inicial, logo, a nova área será $\frac{3}{4}u^2$.

- **Segundo passo:** restam 12 quadrados de lado $u/4$ dos quais são retirados $\frac{1}{4}$ da área. A nova área dos quadrados amarelos será

$$13 \times \frac{3}{4} \times \left(\frac{u}{4}\right)^2 = \frac{36}{64}u^2 = \frac{9}{16}u^2 = \left(\frac{3}{4}\right)^2 u^2.$$

Note-se que a área dos quadrados amarelos é sempre, a cada iteração, igual a $\frac{3}{4}$ da área anterior, portanto, forma uma PG de termo inicial igual a u^2 e razão $\frac{3}{4}$. Na 5ª figura tem-se a soma dos 5 termos desta PG. Lembrando que a soma dos n termos de uma PG finita com primeiro termo a_1 e razão q é dada pela fórmula

$$S_n = \frac{a_1(1 - q^n)}{1 - q}$$

segue que a soma dos 5 primeiros termos da Pg é

$$S_5 = \frac{u^2 \left(1 - \left(\frac{3}{4}\right)^5\right)}{1 - \frac{3}{4}} = \frac{781}{256}u^2.$$

b) A área em azul será conseqüentemente a área em amarelo subtraída de 5 quadrados iniciais, ou seja

$$5u^2 - \frac{781}{256}u^2 = \frac{499}{256}u^2.$$

Atividade 129, pg. 250.

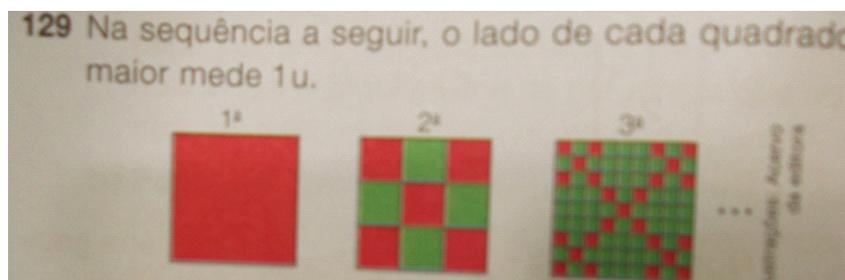


Figura 7.11: *Contagem de quadrados*

Fonte: *SOUZA, 2010*

a) Qual a área em vermelho na 2ª figura dessa sequência? E na 4ª figura?

b) Sabendo que essa sequência é infinita, calcule a soma da área em vermelho?

A atividade acima explora o "encontrar padrões" de uma sequência numérica. Tal atividade pode ser explorada tanto no ensino de sequências e progressões como no estudo introdutório de limites, uma vez que, o recurso visual da figura ajuda o aluno a perceber a idéia de convergência de séries, conhecimento este importante para a compreensão do estudo de limites.

Segue a resolução do problema proposto.

a) O quadrado inicial é dividido em 9 quadrados menores, cada um com lado medindo $\frac{1}{3}$ do lado inicial. Chamando de u a medida do quadrado inicial, tem-se

- **Passo 1:** área u^2 ;
- **Passo 2:** $\frac{5}{9}$ da área inicial, logo, a área em vermelho é $\frac{5}{9}u^2$;
- **Passo 3:** Cada uma dos cinco quadrados vermelhos gerados no passo 1 perdem $\frac{4}{9}$ de área. Sobram então $\frac{5}{9}$ da área anterior. A nova área será $\left(\frac{5}{9}\right)^2 u^2$. Segue que as áreas a cada passo formam uma PG de razão $\frac{5}{9}$. Assim, pode-se generalizar o raciocínio concluindo que no passo n a área será dada por $A_n = \left(\frac{5}{9}\right)^{n-1} u^2$. Assim, na quarta figura a área será $\left(\frac{5}{9}\right)^{4-3} u^2 = \frac{125}{729}u^2$.

b) A soma infinita é dada por $S_n = \frac{a_1}{1-q}$ onde $a_1 = u^2$ e $q = \frac{5}{9}$. Segue que

$$S_n = \frac{u^2}{1 - \frac{5}{9}} \Rightarrow S_n = \frac{9}{4}u^2.$$

7.2.2 SOUZA, Joamir - Novo olhar matemática vol.3

No volume destinado aos alunos do terceiro ano do ensino médio, SOUZA apresenta um texto introdutório do capítulo que trata do estudo dos polinômios, que se refere à geometria Fractal. O texto apresenta as figuras do floco de neve de Koch e uma variação tridimensional do conjunto de Mandelbrot. Este volume não apresenta mais nenhuma atividade relacionada ao estudo dos fractais. Seria aconselhável a utilização do texto que se refere ao conjunto de Mandelbrot como introdução ao capítulo que trata do estudo dos números complexos, uma vez que tal conjunto trata-se de um fractal gerado a partir de uma equação definida no campo dos números complexos.



Figura 7.12: *Fractal tridimensional*

Fonte: *SOUZA, 2010*

7.2.3 PAIVA - ensino médio VOL.1

Este livro apresenta diversas atividades que exploram de forma bem coerente diversos exercícios relacionados aos conceitos de alguns fractais. Serão exibidas a seguir algumas destas atividades com as respectivas soluções, acompanhadas, quando couber, de outras sugestões de como os temas podem ser abordados.

72 (Enem) Uma empresa produz tampas circulares de alumínio para tanques cilíndricos a partir de chapas quadradas de 2 metros de lado, conforme a figura.

Para uma tampa grande, a empresa produz quatro tampas médias e dezesseis tampas pequenas. As sobras de material da produção diária das tampas grandes, médias e pequenas dessa empresa são doadas, respectivamente, a três entidades: I, II e III, para efetuarem reciclagem do material. A partir dessas informações, pode-se concluir que:

- a entidade I recebe mais material do que a entidade II.
- a entidade I recebe metade de material do que a entidade III.
- a entidade II recebe o dobro de material do que a entidade III.
- as entidades I e II recebem, juntas, menos material do que a entidade III.
- as três entidades recebem iguais quantidades de material.

Figura 7.13: *Atividade cap.10 - Áreas, pag. 364*

Fonte: *SOUZA, 2010*

A variação do número de círculos pode ser observada no quadro a seguir.

Iteração	Número de círculos	Raio do círculo gerado (em m)	Área de cada círculo gerado (em m^2)	Área total dos círculos gerados (em m^2)
0	$1 = 4^0$	1	$\pi \times 1^2 = \pi$	$\pi \times 1 = \pi$
1	$4 = 4^1$	$\frac{1}{2}$	$\pi \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}\pi$	$4 \times \left(\frac{1}{4}\right) \times \pi = \pi$
2	$16 = 4^2$	$\frac{1}{4}$	$\pi \times \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{16}\pi$	$16 \times \left(\frac{1}{16}\right) \times \pi = \pi$
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
n	4^n	$\left(\frac{1}{2^n}\right)$	$\pi \times \left(\frac{1}{2^n}\right)^2 = \frac{1}{4^n}\pi$	π

Tabela 7.2: *Contagem de círculos*

Fonte: *o autor*

Pode-se concluir que a cada iteração a área total dos círculos permanece constante e igual a π , logo, a alternativa *c* é a resposta correta. É importante destacar que a construção na figura acima não representa um fractal, porém, decidiu-se abordá-la juntamente com a atividade a seguir porque as mesmas tratam do conceito de “encontrar padrões em sequências”, habilidade necessária para a boa compreensão do conceito de fractal.

Capítulo 11 - sequências, pag. 391,ex. 5.

A atividade a seguir também não representa um fractal. Neste ponto é interessante definir um fractal aos alunos e, em seguida, indagá-los sobre o porque da figura abaixo não representar um fractal, apesar de obedecer a um padrão. Neste ponto, é pertinente revisar o conceito de autosimilaridade, característica essencial para definir uma figura como sendo um fractal.

Segue, então, a resolução da atividade.

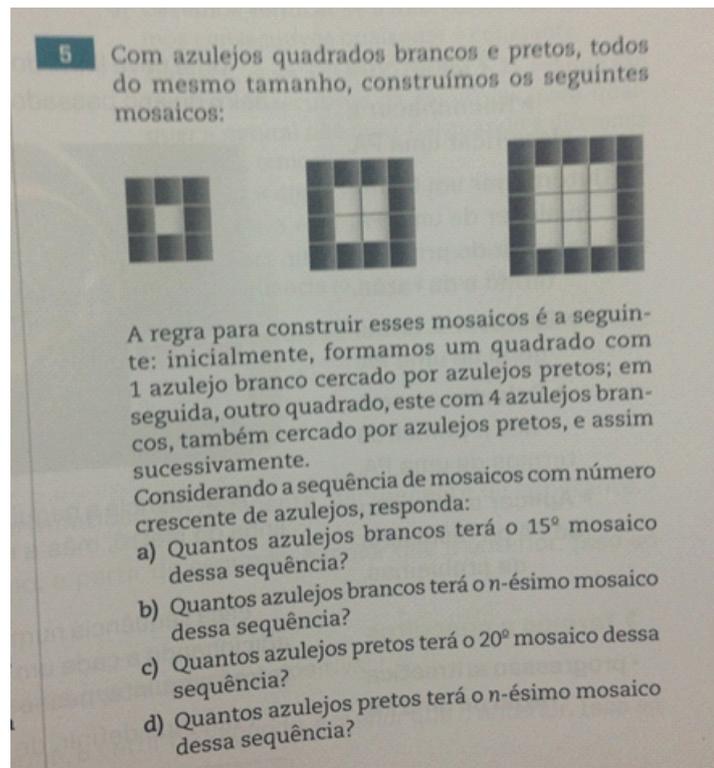


Figura 7.14: Atividade: contagem de mosaicos

Fonte: PAIVA, 2010

O quadro seguinte mostra como fica a contagem dos azulejos a cada mosaico construído.

Mosaico	nº de azulejos brancos	nº de azulejos pretos
1	1^2	8
2	$4 = 2^2$	12
3	$9 = 3^2$	16

Tabela 7.3: Contagem de mosaicos

Fonte: o autor

É fácil observar que o número de azulejos brancos a cada mosaico é um quadrado perfeito, portanto, no mosaico n serão obtidos n^2 azulejos brancos.

No caso dos azulejos pretos, é percebido que a quantidade de azulejos acrescidos a cada mosaico é igual a 4 mosaicos, logo, o número de azulejos pretos forma uma P.A de razão 4 e primeiro termo igual a 8. No mosaico n , conclui-se o seguinte:

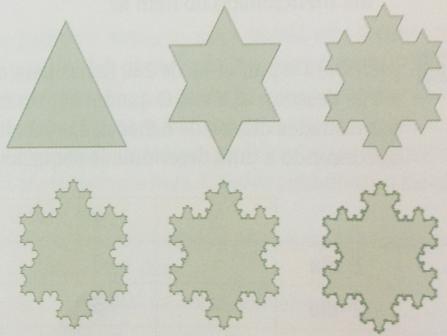
$$a_n = a_1 + (n - 1)r \implies a_n = 8 + (n - 1)4 \implies \boxed{a_n = 4n + 4}$$

- a) No 15º mosaico serão obtidos $15^2 = 225$ azulejos brancos;
- b) O n-ésimo mosaico terá n^2 azulejos brancos;
- c) No 20º mosaico surgirão $a_{20} = 4 \times 20 + 4 = 84$ azulejos pretos;
- d) O n-ésimo mosaico terá, assim, $4n + 4$ azulejos pretos.

É oportuno neste momento destacar que as duas atividades apresentadas não representam um fractal, porém, são importantes de serem exibidas porque podem induzir o aluno a buscar padrões em sequencias numéricas.

Seção 11.3 - progressão geométrica, pg. 425, ex. 111.

III O termo "fractal" foi criado em 1975 por Benoit Mandelbrot, pesquisador da IBM e autor de trabalhos pioneiros sobre fractais. A característica principal de um fractal é a repetição de padrões. Por exemplo, partindo de um triângulo equilátero, dividimos cada lado em três partes iguais e desenhamos, externamente ao triângulo original, um novo triângulo equilátero em que um dos lados é o segmento central obtido dessa divisão; a seguir, apagamos o segmento central. Repetimos esse procedimento para cada lado do polígono obtido com o primeiro procedimento, e assim por diante. Consideremos todos os infinitos polígonos obtidos dessa maneira, tal que a sequência formada pelos números de lados seja crescente.



O número de lados do 6º polígono dessa sequência é:

- a) 192
- b) 768
- c) 1.264
- d) 2.288
- e) 3.072

Figura 7.15: Atividade de contagem de lados no floco de neve

Fonte: PAIVA, 2010

Esta atividade permite que seja explorado o conceito de sequências induzindo o aluno a descobrir o padrão do floco de neve de maneira dinâmica, entendendo passo a passo a construção do fractal. A título de sugestão, será apresentada a seguir uma abordagem

possível da resolução da atividade proposta explorando o conceito e construção do fractal floco de neve de Koch.

Primeiro será contado o número de lados a cada iteração.

- **Iteração 0:** três lados;
- **Iteração 1:** cada lado gera mais 4 novos lados, portanto $3 \times 4 = 12$ lados;
- **Iteração 2:** cada lado gera mais 4 novos lados, portanto $3 \times 4 \times 4 = 3 \times 4^2 = 48$ lados;
- **Iteração 3:** cada lado gera mais 4 novos lados, portanto $3 \times 4 \times 4 \times 4 = 3 \times 4^3 = 192$ lados;
- \vdots

Percebe-se que na iteração n são gerados 3×4^n lados. O 6º polígono da figura equivale à 5ª iteração que teria, segundo a regra recursiva obtida $3 \times 4^5 = 3.072$ lados (alternativa e).

Seção 11.3 - progressão geométrica, pg. 426, ex. 112.

A atividade a seguir apresenta a construção do fractal conhecido como esponja de Menger até a 3ª iteração. Apresenta a regra recursiva para sua construção, destacando que cada face tem aresta dividida em 3 partes iguais obtendo cubos menores com aresta igual a $\frac{1}{3}$ do cubo inicial, sendo removidos o cubo central e os cubos do centro de cada face, totalizando 9 cubos removidos na 1ª iteração. O procedimento se repete infinitamente gerando a esponja de Menger. A atividade admite um cubo inicial com aresta $1m$ e propõe calcular a área em m^2 .

Esta atividade tem um nível de dificuldade elevado, uma vez que requer do aluno uma habilidade que talvez seja um dos grandes desafios do professor de matemática no que se refere ao ensino da geometria: A construção do espaço tridimensional de forma que o aluno consiga elaborar mentalmente as transformações deste espaço no plano. Como já abordado anteriormente, o ensino da geometria é por demais vulgarizado nas nossas escolas e, quando abordado, é feito de uma maneira muito algebrizada, privando o aluno de construir no seu subconsciente o espaço geométrico. Faz-se necessário o uso de metodologias alternativas que permitam ao aluno manipular com o espaço tridimensional de modo a fazer que ele perceba as relações métricas e propriedades que as figuras geométricas possuem. Neste ponto pode ser utilizado como recurso desde a

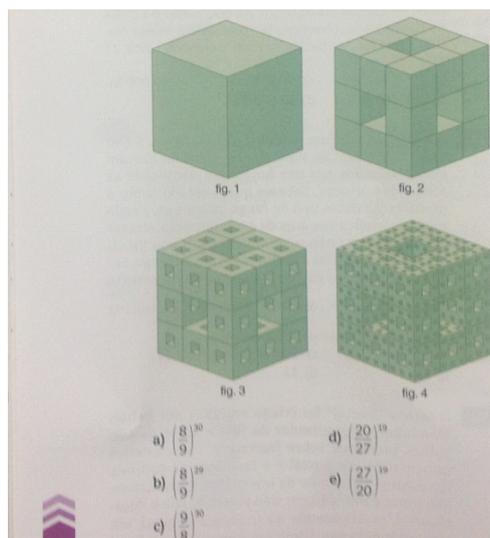


Figura 7.16: *Atividade na esponja de Menger*

Fonte: *PAIVA, 2010*

construção de desenhos, bem como recortes ou uso de materiais que reproduzam as figuras espaciais como caixas, latas cilíndricas, bolas, chapéus em forma de cone, etc.

Segue a resolução da atividade.

Deve ser observado que a área da esponja já foi tratada no capítulo 6 de forma diferenciada, no entanto, se for considerado apenas a área das faces (não considerando, neste caso, as áreas internas formadas nas iterações como sugere o exercício) basta verificar que cada face é dividida na primeira iteração em 9 quadrados de mesma área dos quais um é retirado, sobrando $\frac{8}{9}$ da área inicial de cada face. Na segunda iteração, cada um 8 novos quadrados gerados também perdem área restando $\frac{8}{9}$ da área anterior. Assim, a cada iteração tem-se, exatamente, $\frac{8}{9}$ da área da iteração anterior. Conclui-se, assim, que na figura 7.16 restará $\left(\frac{8}{9}\right)^{29}$ da área inicial.

7.2.4 PAIVA - ensino médio - vol. 3

Este volume apresenta dois textos abrindo os capítulos 6 e 9 que tratam, respectivamente, do "conjunto dos números complexos" e "introdução ao cálculo diferencial", este abordando as noções de limites de uma função. Os textos chamam a atenção pela beleza das figuras apresentadas, recurso este que a geometria fractal

propicia, ou seja, a surpresa pela apresentação do belo.

Apesar de apresentar os textos sobre fractais, este volume não apresenta nenhuma atividade explorando o conceito dos fractais apresentados nos textos. A exploração do conjunto de Mandelbrot associada ao estudo dos números complexos é uma atividade desafiadora e deve ser bem planejada. Preferencialmente, seria viável uma abordagem teórica acerca do conjunto dos números complexos e, num outro momento, levar os alunos a um laboratório de informática e apresentar a construção do conjunto de Mandelbrot em um software específico, por exemplo, o N-fract ou o próprio geogebra.

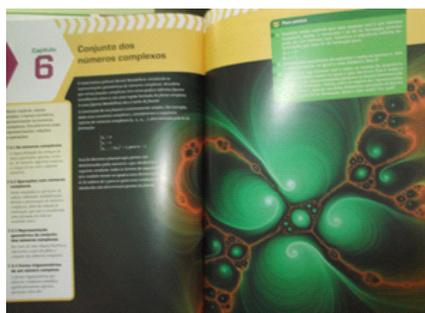


Figura 7.17: *Texto sobre números complexos*



Figura 7.18: *Texto sobre o triângulo de Sierpinski*

No capítulo que trata das noções de limites, é bastante conveniente explorar alguns fractais que possuem convergência para determinado valor. Pode ser explorado, por exemplo, o floco de neve Koch, fazendo os alunos perceberem que seu perímetro tende para o infinito enquanto sua área tende para zero. Esta comparação entre o comportamento da área e do perímetro pode gerar férteis discussões, uma vez que, os alunos estão acostumados com a geometria euclidiana, na qual quanto maior o perímetro de uma figura maior será a sua área. Este novo comportamento nos fractais pode despertar nos alunos o interesse em pesquisar o tema.

7.2.5 RPM nº82, pg 63

A revista do professor de matemática (RPM), edição nº 82, trás na seção “o leitor pergunta” uma figura curiosa: Trata-se de um fractal que pode-se dizer ser uma variação

tridimensional da esponja de Menger, porém, em vez de serem retirados o cubo central e os cubos centrais das faces, neste caso, a regra recursiva consiste em adicionar cubos menores no centro de cada uma das faces do cubo inicial. A seguir apresenta-se a atividade seguida da respectiva resolução.

Uma figura espacial é construída da seguinte maneira:

Pega-se um determinado cubo de aresta 3cm . Depois são colocados 6 cubos menores de aresta 1cm (um terço da aresta do cubo maior), um em cada face do primeiro cubo, conforme mostra a figura a seguir.

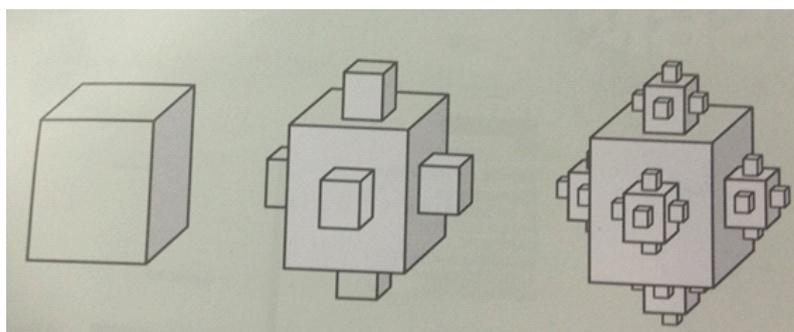


Figura 7.19: *Variação tridimensional do tapete de Sierpinski*

Fonte: *Revista RPM nº 82*

E a partir daí, em cada passo, são sempre acrescentados cubos menores ainda (de aresta igual a um terço da aresta dos cubos que foram inseridos anteriormente) em cada face exposta dos cubos que foram colocados no passo anterior. Desse modo, o volume total do sólido obtido executando esse processo infinitamente é.

Volume do cubo inicial: $3^3 = 27$.

Primeiro passo: são colocados 6 cubos de aresta 1. O volume passa a ser $27 + 6 \times 1^3$;

Segundo passo: em cada um dos 6 cubos são colocados 5 cubos de aresta $\frac{1}{3}$. (São 5 cubos porque uma das faces de cada um dos cubos está grudada na face do cubo anterior). Serão $6 \times 5 = 30$ cubos novos. Com isso, há um acréscimo de $6 \times 5 \times \left(\frac{1}{3}\right)^3$ no volume do sólido. O novo volume passa a ser: $27 + 6 \times 1^3 + 6 \times 5 \times \left(\frac{1}{3}\right)^3$.

Terceiro passo: em cada um dos 5 cubos de aresta $\frac{1}{3}$ são colocados 5 cubos de aresta $\left(\frac{1}{3}\right)^2$. Haverá $6 \times 5 \times 5$ cubos novos de aresta $\left(\frac{1}{3}\right)^2$. Com isso haverá um acréscimo de

$6 \times 5 \times 5 \times \left(\frac{1}{3}\right)^6$ do sólido, que passa a ser

$$27 + 6 \times 1^3 + 6 \times 5 \times \left(\frac{1}{3}\right)^3 + 6 \times 5 \times 5 \times \left(\frac{1}{3}\right)^6 = 27 + 6 + \frac{6 \times 5}{3^3} + \frac{6 \times 5^2}{3^6} + \dots$$

A partir de 27, os acréscimos formam uma progressão geométrica de razão $\frac{5}{3}$ e primeiro termo igual a 6. A soma dos infinitos termos desta progressão é

$$\frac{6}{1 - \frac{5}{3}} = 6 \times \frac{27}{22} = \frac{81}{11}.$$

Volume total do sólido: $27 + \frac{81}{11} = \frac{378}{11}$, concluindo a resolução.

Finalmente, convém exibir uma citação de Benoit Mandelbrot, disponível em MANDELBROT, B. P. *Objectos fractais*. Lisboa: Gradiva, 1989, onde aquele que viria a ser considerado o pai dos fractais faz uma previsão um tanto coerente do que viria a representar os fractais na educação ou nas ciências:

“Estas figuras geométricas nunca tiveram quaisquer hipóteses de entrar no campo do ensino, mal passando de espantalho “moderno” que, mesmo a título de exemplo, era demasiado específico para merecer qualquer tipo de atenção. (...) Demonstro que a carapaça formalista que as isolou impediu a revelação de seu verdadeiro significado: o fato de estas figuras terem algo de extremamente simples, concreto e intuitivo. Mostro não só que elas são realmente úteis, mas também que podem ser rapidamente utilizadas, com um formalismo muito reduzido. Não exigem quase que nenhum daqueles preliminares formais onde, conforme a experiência mostra, alguns encontram um deserto intransponível e outros um paraíso de onde não querem sair.” Benoit Mandelbrot.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Apesar de mais de três décadas de sua criação, a *geometria fractal* mesmo já sendo considerada um ramo da matemática, como uma nova maneira de ver o mundo, ainda é desconhecida e pouco explorada por muitos professores de matemática.

Os fatos mostrados no trabalho enfatizam que a *geometria fractal* tem sido explorada por pesquisadores de várias áreas da ciência, devido à variedade de aplicações, observando que a maior parte destas está concentrada na biologia, medicina e arte, onde os fractais são de suma importância para desenvolvimento e entendimento. (SERRA E KARAS,1997, pg. 44).

Portanto, tem-se também que os fractais podem ser utilizados como ferramenta no estudo de alguns tópicos de geometria, atraindo assim a curiosidade e interesse dos alunos, quando apresentados em sala de aula de uma forma dinâmica, promovendo também a interdisciplinaridade entre matemática e outros componentes curriculares, além da transdisciplinaridade, uma vez que, a *geometria fractal* é usada para estudo de temas da própria matemática, bem como propicia um tema motivador por estarem ligados à natureza e, conseqüentemente, ao cotidiano do aluno.

(...) determinando a importância dos conhecimentos geométricos como uma das necessidades no mundo em que vivemos, despertando no educando a observação e interesse pela aprendizagem, motivando-os também a desenvolver, em torno do assunto abordado, o raciocínio, a criatividade, bem como o gosto pela arte, entendendo-se como arte como toda ação que envolve simultaneamente emoção, habilidade e criatividade. (Barbosa, 2006).

Finalmente, tem-se claramente que a formação dos professores de matemática no Brasil é deficitária, uma vez que os sistemas de educação não se preocupam em promover programas eficazes visando a formação continuada do professor, nem as universidades se preocupam em associar o conteúdo acadêmico com as relações sociais da comunidade na qual também está inserida. No caso específico da matemática, a matemática acadêmica é privilegiada na maioria das grades curriculares, deixando de lado a matemática do dia a dia.

O professor de matemática precisa usar de criatividade e buscar estratégias para que as suas aulas sejam significativas para os seus alunos. Estratégias que não representem necessariamente um alto custo financeiro em recursos didáticos. Com materiais bem simples é possível adotar uma postura mais criativa para ministrar as aulas e atrair o interesse dos alunos pela matemática.

Logo, a proposta central do presente trabalho que consiste na adoção dos fractais como ferramenta didática para o ensino de diversos temas da matemática é viável. Percebe-se claramente que os conceitos e aplicações da Geometria Fractal propiciam ao professor um recurso poderoso para fugir do tradicionalismo das aulas expositivas, permitindo que as aulas de matemática possam ser ministradas através de um processo dinâmico, transdisciplinar, uma vez que os temas da *geometria fractal* bem explorados permitem relacionar o saber escolar com o mundo real, relacionando os conceitos dos fractais com várias disciplinas do currículo escolar numa abordagem multidisciplinar.

BIBLIOGRAFIA

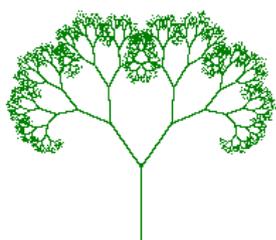
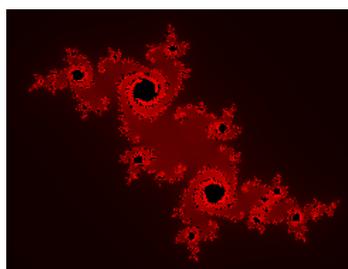
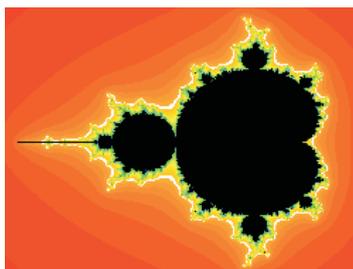
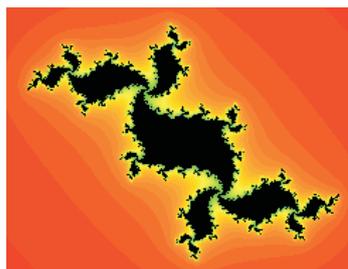
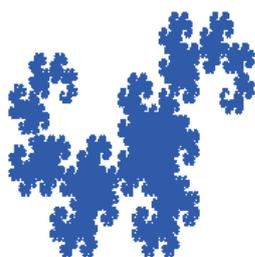
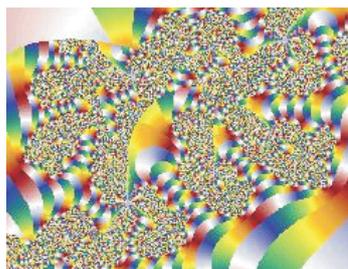
- [1] **ARAÚJO**, Luis Cláudio Lopes de. **NOBRIGA**, Jorge Cássio costa. Aprendendo Matemática com o Geogebra. São Paulo: Editora Exato, 2010.
- [2] **BACCARIN**, Fabio Luis - EXPLORANDO O CONJUNTO DE CANTOR DOS TERÇOS MÉDIOS: UMA PROPOSTA PARA A SALA DE AULA, artigo científico.
- [3] **BARBOSA**, Ruy Madsen. Descobrimo a geometria fractal - para sala de aula. 3ª Edição. Belo Horizonte: Autêntica, 2006.
- [4] **BARSA**, Nova Enciclopedia. Encycropedia Britannia. v.7. Gráfica Melhoramentos. São Paulo, 1998.
- [5] **BORBA**, Marcelo de Carvalho. Tendências Internacionais em Formação de Professores de Matemática - 2ª edição. Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2010.
- [6] **BORDENAVE**, Juan Díaz; **PEREIRA**, Adair Martins. Estratégias de ensino-aprendizagem. 6. ed. Rio de Janeiro: Vozes, 2006.
- [7] **BOYER**, Carl B. História da Matemática - 2ª edição. São Paulo: Edgard Blucher, 1996.
- [8] **CAMARGO**, Keilla Cristina Arsie. A expressão gráfica eo ensino das geometrias não euclidianas. 2012.
- [9] **CAOS E GEOMETRIA FRACTAL** www.educ.fc.ul.pt Acesso em 22/01/2014.
- [10] **CARNEIRO**, Moaci Alves. LDB fácil: Leitura crítica - compreensiva: Artigo a artigo - Petrópolis, RJ: Vozes, 2005.
- [11] **CARRETERO**, Mário. Construtivismo e Educação. Trad. Jussara Haubert Rodrigues. Porto Alegre: Artes Médicas, 2002.
- [12] **CASCÃO**, Ana Catarina; **CARDOSO**, Ricardo; **DAMAS**, Sonia. Geometria fractal. www.mat.uc.pt Acesso em 20/02/2005.
- [13] **DUBOIS**, Daniel. O labirinto da inteligência: da inteligência natural à inteligência fractal. Porto Alegre: Instituto Piaget, 2012.

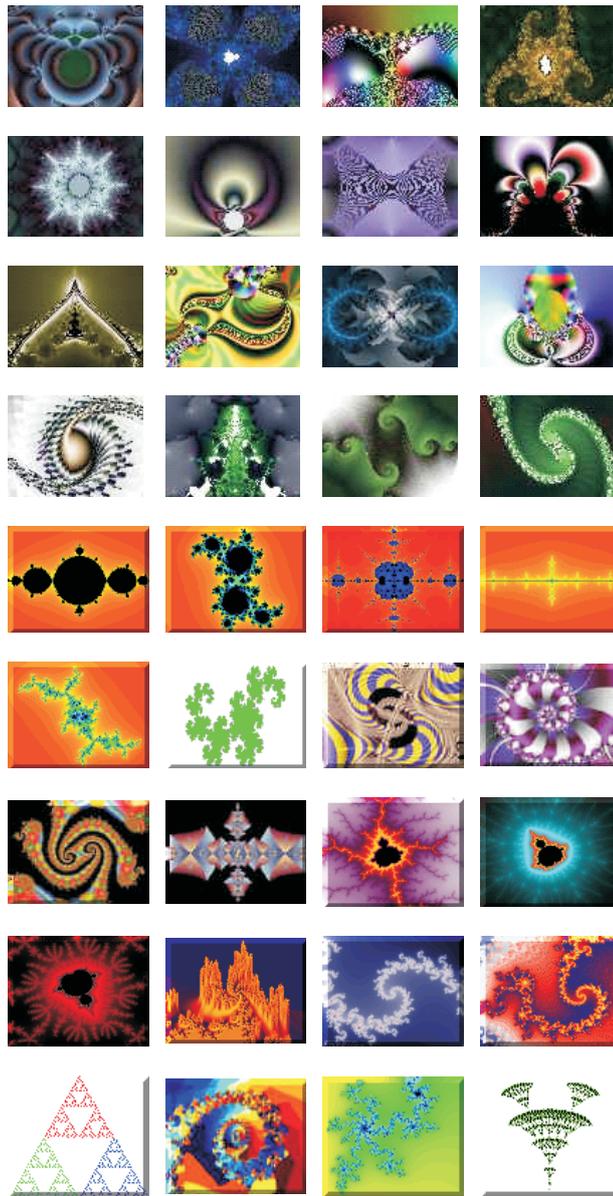
- [14] **FALCÃO**, Jorge Tarcísio. Psicologia da Educação Matemática: uma introdução: Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2008.
- [15] **GADOTTI**, Moacir. História das Idéias Pedagógicas. 8ª. ed. São Paulo: Ática, 1999.
- [16] **HAZZAN**, Samuel. Fundamentos de Matemática Elementar- vol.5 - combinatória, probabilidade. 7ª edição. São Paulo: Atual, 2004.
- [17] **JANOS**, Michel. Geometria Fractal. Rio de Janeiro: Editora ciência moderna, 2008.
- [18] **LIBÂNEO**, José Carlos. Didática. Ed. Cortez. São Paulo, 2010.
- [19] **LIMA**, Elon Lages. **Curso de Análise, vol. 1**. 14ª edição - Rio de Janeiro: Associação Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 2012 .
- [20] **MACHADO**, Nilson José. Matemática e língua materna: análise de uma impregnação mútua. Ed. Cortez. 4. ed. São Paulo, 2009.
- [21] **MAIA**, M. C. Os fractais na vida real. <http://arquitetandosonhos.blogspot.com>. Acesso em 13/11/2013.
- [22] **MANDELBROT**, Benoit: Fractals: Form, Chance and Dimension W. H. Freeman and Company, San Francisco, USA , 2002.
- [23] **MOURA**, Edilson de: O Conceito Fractal e Sua Presença Pedagógica Na Educação Básica: Campo grande, 2011. <http://www.edumat.ufms.br/> Acesso em 02/03/2014.
- [24] **PAIVA**, Manoel Rodrigues. Matemática vol. 1 e 3, ensino médio. 2ª edição. São Paulo: Moderna, 2010.
- [25] **RABAY**, YARA SILVIA FREIRE. “Estudo e aplicações da Geometria Fractal.” (2013).
- [26] **RIBEIRO**, Jackson da Silva. Projeto Radix - Matemática - 6º e 8º anos - 3ª edição. São Paulo: Scipione, 2013.
- [27] **RPM** - Revista do Professor de Matemática, vol. 82. Rio de Janeiro: SBM, 2013.
- [28] **SAGAN**, H. (1991). Space-filling curves. Universitext, Springer-Verlag, New York.
- [29] **SERRA**, Celso Penteado; **KARAS**, Elizabeth Wegner. Fractais gerados por sistemas dinâmicos complexos. Universitaria Champagnat, 1997.

- [30] **SIQUEIRA**, Rodrigo de e **BAPTISTA**, Humberto Rossetti. Grupo Fractarte. **Janelas para o infinito**. www.lsi.usp.br. Acesso 10/01/2014.
- [31] **SKOVSMOSE**, Ole. Diálogo e Aprendizagem em Educação Matemática. 2^a edição - Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2010.
- [32] **SOUZA**, Joamir Roberto de. Novo Olhar Matemática - Ensino Médio - vols. 1 e 3 - 1^a edição. São Paulo: FTD, 2010.
- [33] **URIBE**, Diego. Fractal Cuts: Exploring the magic of fractals with pop-up designs. England: Tarquin Publications, 2004.

ANEXO

GALERIA DE FRACTAIS

*Tree**Spirals**Mandelbrot set**Julia set**Dragon curve**Circus maximus*



Apêndice A - Questionário para os alunos

UNIVERSIDADE FEDERAL DO MARANHÃO
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA
EM REDE NACIONAL - PROFMAT

INSTRUMENTO DE PESQUISA AO ALUNO

1. Dados de Escolaridade

Série do Ensino Médio:

Já foi reprovado no Ensino Fundamental? () Sim () Não

Já foi reprovado no Ensino Médio? () Sim () Não

Já Interrompeu alguma vez seus estudos? () Sim () Não

2. Você gosta das aulas de geometria? () Sim () Não

3. Informações Pedagógicas

O que mais o deixa desmotivado nas aulas de geometria?

() Falta de base das séries anteriores para a absorção do assunto a ser estudado;

() Dificuldade na leitura e interpretação dos problemas matemáticos a serem resolvidos;

() Quantidade de fórmulas matemáticas a serem decoradas;

() Indisposição física e mental devidas a sobrecarga do dia-a-dia;

() dificuldade em visualizar os elementos geométricos.

4. Você lembra de alguma atividade prática realizada em sala de aula?

Qual?

5. Que profissão você almeja para o futuro? Por que?

Apêndice B - Questionário avaliativo do minicurso

UNIVERSIDADE FEDERAL DO MARANHÃO
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA
EM REDE NACIONAL - PROFMAT

QUESTIONÁRIO AVALIATIVO DO MINI-CURSO

1. Qual a sua avaliação do minicurso?
 ótimo bom regular ruim
2. Você acha que o ensino da geometria fractal ajudaria na melhor compreensão dos elementos da geometria euclidiana?
 Sim Não
3. Você acha que a atividade prática contribuiu para a melhor compreensão e fixação do conteúdo estudado?
 Sim Não
4. Marque os itens relacionados com a geometria fractal.
 dimensão no conjunto $\{0, 1, 2, 3\}$
 apropriada para descrever objetos feitos pelo homem
 tradicional
 auto-semelhança
 apropriada para descrever objetos naturais
 moderna
 complexidade infinita
 não possui escala definida
 dimensão no conjunto $[0, 3]$
 possui escala definida
 dimensão fracionária

5. O conhecimento adquirido contribuiu para a melhoria da sua visão/interesse pela matemática?

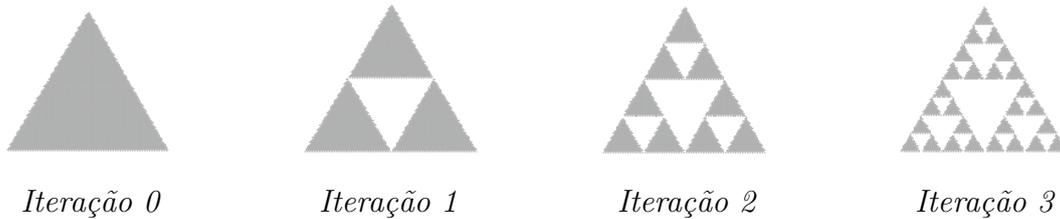
Sim Não

6. Faça algum comentário que você julgar necessário.

Apêndice C - Atividade a ser realizada com os alunos

UNIVERSIDADE FEDERAL DO MARANHÃO
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA
EM REDE NACIONAL - PROFMAT

Atividade: triângulo de Sierpinski



Objetivos

1. Construir o fractal acima percebendo no efetuar de cada iteração a quantidade de triângulos restante. Exprima em função da iteração (n) o número de triângulos obtidos.
2. Supondo que a área do triângulo inicial é 1 unidade, exprima, em função da iteração (n) a área A_n do menor triângulo colorido da iteração n e a área total obtida da construção do triângulo de Sierpinski.
3. Supondo que o perímetro do triângulo inicial é 1 unidade, exprima, em função da iteração (n) o perímetro P_n do menor triângulo colorido da iteração n e o perímetro total obtido da construção do triângulo de Sierpinski.
4. Mostre que, apesar da área do triângulo de Sierpinski tender para 0, o perímetro total tende para $+\infty$

Atividade 1 (construção do triângulo de Sierpinski)

1. Preencha o triângulo maior do material fornecido com os triângulos menores;
2. A partir do ponto médio de cada lado do triângulo maior, comece a retirar os triângulos menores até obter a figura da iteração 1, dada acima;

3. Observe quantos novos triângulos foram formados. Perceba que cada triângulo é igual ao vazio observado no centro do fractal;
4. Repita a operação do passo 2, desta vez com cada novo triângulo obtido na iteração 1, obtendo a iteração 2 conforme a figura acima;
5. Novamente perceba que o tamanho desse triângulo é igual ao vazio obtido ao retirar os triângulos menores;
6. Repita o passo anterior e construa a iteração 3, conforme a figura acima.

Atividade 2 (contagem de triângulos)

1. Agora que você já sabe como é feita a construção do *Triângulo de Sierpinski*, vamos trabalhá-lo matematicamente. Inicie com o triângulo equilátero preenchido totalmente com os menores. Exprima o valor da coluna 2 em forma de potência de base 3 e transcreva esse valor para a coluna 3 da tabela abaixo;
2. Faça a 1ª iteração do fractal e observe quantos triângulos iguais foram formados (lembre que o triângulo invertido é um vazio e portanto não é contado) e transcreva essa quantidade para a tabela na coluna 2. Preencha o valor correspondente na coluna 3;
3. Repita o processo do passo 2 e preencha a tabela até a terceira iteração;
4. Observe a relação existente entre o n° da iteração e o expoente da potência da coluna 3;
5. Deduza o n° de triângulos obtidos na iteração (n).
- 6.

Iteração	N° de triângulos	Potência (base 3)
0	1	
1		
2		
3		
⋮	⋮	⋮
n		

Atividade 3 (Área do triângulo de Sierpinski)

1. Preencha o triângulo maior do material fornecido com os triângulos menores;
2. Conte quantos foram necessários para preenchê-lo. Passe este valor para a coluna 2 da tabela abaixo. Como queremos comparar a área de cada iteração com a área inicial, vamos considerar a área inicial igual a 1 unidade. Assim sendo, preencha a coluna 3 com o número 1;
3. Expresse o valor da coluna 3 em forma de potência de base $\frac{3}{4}$, preenchendo esse valor na coluna 4;
4. Construa a 1ª iteração, conte quantos triângulos menores restaram e preencha o valor na coluna 2. Expresse esse valor em forma de fração com denominador igual ao nº de triângulos iniciais e simplifique esta fração preenchendo o valor obtido na coluna 3. Expresse esse valor em forma de potência na coluna 4;
5. Repita o passo anterior até a 3ª iteração;
6. Relacione o nº da iteração com o expoente da potência da coluna 4;
7. Determine a área do fractal na iteração (n).

Iteração	Nº de triângulos menores	Fração equivalente	Potência equivalente (base $\frac{3}{4}$)
0			
1			
2			
3			
⋮	⋮	⋮	⋮
n			

Atividade 4 (perímetro do triângulo de Sierpinski)

1. Considere como unidade de medida do triângulo inicial o lado do triângulo menor. Conte o perímetro do triângulo inicial e preencha o valor na coluna 2 da tabela;

2. Para facilitar a comparação, assim como na atividade anterior, considere o perímetro inicial igual a 1. Expresse o 1 da coluna 5 em forma de potência de base $\frac{3}{2}$ e preencha a coluna 6;
3. Construa a 1ª iteração e conte o perímetro de cada novo triângulo obtido, transcrevendo o valor obtido na coluna 2;
4. Multiplique esse valor pelo n° de triângulos iguais da coluna 3 e transcreva o produto obtido para a coluna 4;
5. Expresse esse valor em forma de fração com denominador igual ao perímetro inicial da coluna 1 simplificando-a e transcrevendo a fração obtida na coluna 5;
6. Represente o valor obtido no passo anterior com o valor correspondente na coluna 6;
7. Repita os passos anteriores até a 3ª iteração;
8. Observe a relação entre o n° da iteração na coluna 1 e o expoente da potência da coluna 6;
9. Expresse o perímetro do fractal na iteração (n).

Iteração	Perímetro de cada triângulo	N° de triângulos	Perímetro total	Fração equivalente	Potência equivalente
0					
1					
2					
3					
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
n					