

UNIVERSIDADE FEDERAL DO MARANHÃO - UFMA  
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA  
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM  
REDE NACIONAL - PROFMAT

FUNÇÕES POLINOMIAIS DO 1º E 2º GRAUS:  
UMA ABORDAGEM NA FÍSICA

JERFSON MACIEL ARAUJO MARTINS

# FUNÇÕES POLINOMIAIS DO 1º E 2º GRAUS: UMA ABORDAGEM NA FÍSICA

JERFSON MACIEL ARAUJO MARTINS

Orientador: Prof. Dr. José Antonio Pires F. Maranhão

Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade Federal do Maranhão - UFMA, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática.

UFMA - São Luis  
Maio /2014

# Agradecimentos

À Deus, por tudo;

À minha filha Isadora dos Santos Martins que ilumina a minha vida, da minha esposa e de todos os nossos familiares;

À minha esposa Liviane Cantanhede dos Santos pela compreensão e paciência durante o período de elaboração deste trabalho;

À minha sobrinha Maria Eduarda que nasceu recentemente, seja bem vinda;

Aos meus familiares, que sempre acreditaram e acreditam no meu potencial;

Ao meu amigo Eldon pela sua importante contribuição na elaboração deste trabalho;

Ao amigo e orientador José Marão que foi de grande importância para que esse trabalho pudesse ser realizado;

À SBM, a CAPES e a UFMA por, respectivamente, realizar, financiar e executar o projeto.

*À minha mãe Darci, ao meu  
padrinho Alcemir, à minha es-  
posa Liviane e à minha filha  
Isadora.*

*“Os encantos dessa sublime  
ciência se revelam apenas  
àqueles que tem coragem de  
irem a fundo nela.”*  
*Carl Friedrich Gauss*

# Resumo

Visando dar maior fundamentação teórica e exibir uma aplicabilidade das Funções Polinomiais do 1º e 2º Graus, tanto para professores quanto para alunos, o presente trabalho abordará alguns conteúdos relacionados a estas funções. Tais conteúdos não são mostrados na maioria dos livros didáticos, bem como o emprego dessas funções no estudo da cinemática, de modo a estabelecer a ligação entre essas duas áreas do conhecimento, a saber: a Matemática e Física.

Para isso, foi desenvolvido nesse trabalho, o estudo das equações polinomiais do 1º e 2º graus, como fundamentação teórica ao estudo das funções, dando destaque para: os princípios aditivo e multiplicativo e o completamento do quadrado, como métodos utilizados na resolução dessas equações. Em seguida, abordou-se as Funções Polinomiais do 1º e 2º Graus, expondo conteúdos dessas funções que raramente são trabalhados no Ensino Médio e de grande importância para determinar certas características e/ou propriedades dessas funções, e por fim, o estudo dos principais movimentos da cinemática (MRU, MRUV e queda livre), que foram abordados no âmbito das Funções Polinomiais do 1º e 2º Graus.

**Palavras chave:** Equações Polinomiais, Funções Polinomiais, Cinemática.

# Abstract

To ensure greater theoretical basis and display a applicability of Polynomial Functions of the First and Second Degrees, both for teachers and for students, this paper will address some content related to these functions. Such content is not shown in most textbooks , as well as the use of these functions in the study of kinematics, in order to establish the link between these two areas of knowledge, namely: Mathematics and Physics.

So, was developed in this work, the study of polynomial equations of the First and Second Degrees, as theoretical foundation for the study of functions, giving emphasis on: the additive and multiplicative principles and completion of the square, as methods used to solve these equations. Then addressed if the Polynomial Functions of the First and Second Degrees, exposing contents of those functions that are rarely worked in high school and of great importance to determine certain characteristics and/or properties of these functions, and finally, studies of the major movements kinematics ( movement Retilínio Uniform Rectilinear Motion uniformly Miscellaneous and free fall ), were addressed in the context of polynomial functions of the First and Second Degrees.

**Keywords:** Polynomial Equations, Polynomial Functions, kinematics.

# Sumário

<b>Lista de Figuras</b>	<b>10</b>
<b>Introdução</b>	<b>11</b>
<b>1 Equação Polinomial do 1º grau com uma variável</b>	<b>15</b>
1.1 Definição . . . . .	15
1.2 Equações Equivalentes . . . . .	16
1.3 Resolução de Equações Polinomiais do 1º grau com uma variável . .	16
1.4 Equações Impossíveis e Equações Identidade . . . . .	22
<b>2 Equação Polinomial do 2º grau com uma variável</b>	<b>23</b>
2.1 Definição . . . . .	23
2.2 Resolução de equações incompletas do 2º grau . . . . .	23
2.3 Método do Completamento do Quadrado . . . . .	25
2.4 Resolução de equações completas do 2º grau . . . . .	26
2.5 Propriedades das raízes . . . . .	28
<b>3 Função Polinomial do 1º grau</b>	<b>31</b>
3.1 Definição . . . . .	31
3.2 Caracterização da função polinomial do 1º grau . . . . .	32
3.3 Significado analítico de $a$ e $b$ na função $f(x) = ax + b$ . . . . .	34
3.3.1 Taxa de variação da função polinomial do 1º grau . . . . .	34
3.3.2 Valor inicial da função polinomial do 1º grau . . . . .	35
3.4 Gráfico da função polinomial do 1º grau . . . . .	36
<b>4 Função Polinomial do 2º grau ou Quadrática</b>	<b>43</b>
4.1 Definição . . . . .	43
4.2 Forma canônica da função quadrática . . . . .	43
4.3 Forma fatorada da função quadrática . . . . .	44
4.4 Estudo analítico do sinal da função quadrática . . . . .	45
4.5 Gráfico da função quadrática . . . . .	51



4.6	Coordenadas do vértice do gráfico da função quadrática. . . . .	56
4.7	Máximos e Mínimos da função quadrática . . . . .	64
<b>5</b>	<b>Aplicações na Cinemática</b>	<b>70</b>
5.1	Definições Iniciais . . . . .	70
5.2	Movimento Retilíneo Uniforme . . . . .	71
5.2.1	Definição . . . . .	71
5.2.2	Funções Horárias do MRU . . . . .	71
5.2.3	Gráficos das funções horárias do MRU . . . . .	72
5.3	Movimento Retilíneo Uniformemente Variado (MRUV) . . . . .	76
5.3.1	Definição . . . . .	76
5.3.2	Funções Horárias do MRUV . . . . .	76
5.3.3	Gráficos das funções horárias do MRUV . . . . .	78
5.4	Estudo dos Movimentos em Queda Livre . . . . .	82
5.4.1	Lançamento oblíquo . . . . .	82
5.4.2	Análise da trajetória de um objeto, em queda livre, através da variação do ângulo $\theta$ . . . . .	85
	<b>Considerações Finais</b>	<b>90</b>
	<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>93</b>

# Lista de Figuras

3.1	demonstração do gráfico da função $f(x) = ax + b$ . . . . .	38
3.2	reta $r$ determinada pelos pontos $(0, b)$ e $(x_0, y_0)$ . . . . .	40
3.3	reta $r$ formando um ângulo $\theta$ com o eixo- $x$ e passando pelo ponto $(0, b)$ . . . . .	41
4.1	parábola de foco $F$ e diretriz $d$ . . . . .	52
4.2	parábola com concavidade para cima e vértice $V(x_V, y_V)$ . . . . .	53
4.3	eixo de simetria da parábola . . . . .	57
4.4	coordenadas do vértice da parábola . . . . .	58
4.5	parábola do exemplo 4.2 . . . . .	62
4.6	o vértice da parábola é ponto de máximo ou de mínimo . . . . .	64
5.1	gráfico da função horária da aceleração no MRU. . . . .	72
5.2	gráficos da função horária da velocidade no MRU. . . . .	73
5.3	a área $A$ é numericamente igual ao deslocamento escalar. . . . .	73
5.4	curva que representa o gráfico $v$ x $t$ . . . . .	74
5.5	gráficos da função horária da posição no MRU. . . . .	75
5.6	gráficos da função horária da aceleração no MRUV. . . . .	78
5.7	a área $A$ é numericamente igual à variação de velocidade. . . . .	79
5.8	gráficos da função horária da velocidade no MRUV. . . . .	80
5.9	demonstração da função horária da posição no MRUV. . . . .	81
5.10	gráfico da função horária da posição no MRUV. . . . .	82
5.11	componentes vertical e horizontal de $\vec{v}_0$ . . . . .	83
5.12	trajetória do objeto lançado obliquamente. . . . .	85
5.13	trajetória do objeto quando $\theta = 0$ . . . . .	86
5.14	trajetória do objeto quando $\theta$ varia entre 0 e $\frac{\pi}{2}$ . . . . .	87
5.15	trajetória do objeto quando $\theta = \frac{\pi}{2}$ . . . . .	88

# Introdução

Os livros didáticos do Ensino Médio, em sua maioria, e até mesmo por grande parte dos professores, abordam o tema Funções Polinomiais do 1º e 2º Graus, basicamente da seguinte maneira:

1. **definição:** sem a devida caracterização<sup>1</sup> dessas funções e sem relacioná-las com outras áreas do conhecimento;
2. **gráfico:** sem a sequência construtiva de que a reta e a parábola representam graficamente tais funções;
3. **estudo do sinal:** não é mostrado a forma analítica de trabalhar esse conteúdo;

ou seja, o estudo das funções polinomiais do 1º e 2º graus, em sua grande parte, pecam nos seguintes aspectos:

- ✓ não é feito um estudo analítico e nem gráfico mais aprofundados dessas funções. Como exemplo: nas funções quadráticas é dito que o seu gráfico é uma parábola, sem antes definir o que seja uma parábola ou a demonstração de tal afirmação;
- ✓ não relaciona essas funções com outras áreas do conhecimento ou são deficientes no que diz respeito às aplicações de tais funções. Para esta situação, como exemplo, poderia ser comentado que a conversão entre as escalas de temperatura, Celsius ( $C$ ) e Fahrenheit ( $F$ ), é dada pela relação  $F = 1,8C + 32$ , que nada mais é que uma função polinomial do 1º grau;
- ✓ os conceitos são dados, muitas vezes, sem a ênfase interdisciplinar<sup>2</sup>;

---

<sup>1</sup>A caracterização de uma função torna possível utilizar, satisfatoriamente, os seus conceitos e métodos matemáticos para resolver os problemas concretos do dia-a-dia ou para aplicá-los nas outras ciências.

<sup>2</sup>Interdisciplinaridade é a integração de dois ou mais componentes curriculares na construção do conhecimento.

- ✓ a conexão com outros assuntos de Matemática não é abordado, mas será mostrado no trabalho presente que a conexão é ampla e promove a transdisciplinaridade<sup>3</sup> de modo abrangente;

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN's) de Matemática para o Ensino Médio em [1], destacam o ensino das funções:

*“O estudo das funções permite ao aluno adquirir a linguagem algébrica como a linguagem das ciências, necessária para expressar a relação entre grandezas e modelar situações-problema, construindo modelos descritivos de fenômenos e permitindo várias conexões dentro e fora da própria matemática. Assim, a ênfase do estudo das diferentes funções deve estar no conceito de função e em suas propriedades em relação às operações, na interpretação de seus gráficos e nas aplicações dessas funções.*

*Tradicionalmente o ensino de funções estabelece como pré-requisito o estudo dos números reais e de conjuntos e suas operações, para depois definir relações e a partir daí identificar as funções como particulares relações. Todo esse percurso é, então, abandonado assim que a definição de função é estabelecida, pois para a análise dos diferentes tipos de funções todo o estudo relativo a conjuntos e relações é desnecessário. Assim, o ensino pode ser iniciado diretamente pela noção de função para descrever situações de dependência entre duas grandezas, o que permite o estudo a partir de situações contextualizadas, descritas algébrica e graficamente. Toda a linguagem excessivamente formal que cerca esse tema deve ser relativizada e em parte deixada de lado, juntamente com os estudos sobre funções injetoras, sobrejetoras, compostas e modulares.”*

Tendo em vista, a importância dada pelos Parâmetros Curriculares Nacionais sobre o estudo das funções, o presente trabalho tem o escopo de fazer um estudo mais detalhado das funções polinomiais do 1º e 2º graus, apresentando informações analíticas e/ou gráficas que geralmente não são abordadas com ênfase global nos livros do Ensino Médio de forma a complementar esses conteúdos. Além disso, serão mostradas algumas das aplicações dessas funções na Física<sup>4</sup>, mais especifica-

<sup>3</sup>Transdisciplinaridade é o princípio teórico que busca uma intercomunicação entre as disciplinas, tratando efetivamente de um tema comum (transversal). Ou seja, na transdisciplinaridade não existem fronteiras entre as disciplinas.

<sup>4</sup>Física é a ciência que estuda a natureza e seus fenômenos em seus aspectos mais gerais. Analisa suas relações e propriedades, além de descrever e explicar a maior parte de suas consequências.

mente, na cinemática<sup>5</sup>. O tema em questão, segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) em [1]:

*”A necessária articulação entre as disciplinas da área de conhecimento para a promoção das competências gerais certamente inclui o desenvolvimento de instrumentos de investigação comuns, como conceitos e procedimentos partilhados pelas várias ciências, na investigação e compreensão de diferentes processos naturais.”*

Nota-se claramente o aspecto da articulação com outras áreas do conhecimento. Assim, pretende-se aplicar tal conexão à Física, mostrando que as funções polinomiais do 1º e 2º graus são os modelos matemáticos<sup>6</sup> que descrevem os principais movimentos da cinemática (MRU, MRUV e queda livre) e com este resultado, diferentemente de como é feito nos livros de física, serão apresentadas as demonstrações das equações horárias, fazendo a correspondência entre os conceitos abstratos destas funções com os conceitos físicos desses movimentos, ou seja, será estabelecida uma conexão entre esses dois conteúdos, atingido uma das competências dos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) em [1]:

***”Articulação dos símbolos e códigos***

*Ler, articular e interpretar símbolos e códigos em diferentes linguagens e representações: sentenças, equações, esquemas, diagramas, tabelas, gráficos e representações geométricas.”*

Portanto, o objetivo é elaborar um material de estudo, consulta e até mesmo pesquisa, com maior fundamentação teórica sobre as funções polinomiais do 1º e 2º graus e com aplicações concretas de tais funções em outra área do conhecimento, com a finalidade de dar maior suporte para professores e alunos. Para tanto, serão feitas, nos próximos capítulos, as definições necessárias das respectivas funções e em seguida, a análise dos movimentos da cinemática no contexto das funções.

No primeiro capítulo, serão estudadas as equações polinomiais do 1º grau, dando ênfase aos princípios aditivo e multiplicativo na resolução de tais equações, pois, para determinar os zeros de uma função polinomial do 1º grau, deve-se encontrar as raízes da equação polinomial do 1º grau correspondente.

No segundo capítulo, o estudo das funções será iniciado com a função polinomial do 1º grau  $f(x) = ax + b$ , mostrando informações que não são dadas na maioria dos livros do ensino médio, como:

---

<sup>5</sup>Cinemática é o ramo da física que se ocupa da descrição dos movimentos dos corpos, sem se preocupar com a análise de suas causas.

<sup>6</sup>A modelagem matemática é a área do conhecimento que estuda a simulação de sistemas reais a fim de prever o comportamento dos mesmos, sendo empregada em diversos campos de estudo, tais como física, química, biologia, economia e engenharias. Ou seja, modelagem matemática consiste na arte (ou tentativa) de se descrever matematicamente um fenômeno.

- ✓ a sua caracterização;
- ✓ os significados analíticos dos números reais  $a$  e  $b$  e;
- ✓ a demonstração e a recíproca, de que o seu gráfico é uma reta não-vertical e não-horizontal;

Seguindo com o estudo das equações, no terceiro capítulo serão abordadas as equações polinomiais do 2º grau, com destaque para o método do completamento do quadrado que será utilizado na determinação das raízes de tais equações.

Dando continuidade ao estudo das funções, o quarto capítulo é dedicado à função polinomial do 2º grau  $f(x) = ax^2 + bx + c$ , tendo este capítulo como pontos principais:

- ✓ a sua forma canônica;
- ✓ a sua forma fatorada;
- ✓ o estudo analítico do seu sinal;
- ✓ a demonstração e a recíproca, de que o seu gráfico é uma parábola;
- ✓ a demonstração de que possui valor máximo ou mínimo e ele ocorre no vértice da parábola;

E finalmente, no quinto capítulo, será feito um estudo do movimento retilíneo uniforme e do movimento retilíneo uniformemente variado, demonstrando suas equações horárias através da comparação entre as características e propriedades desses movimentos com as propriedades típicas das funções polinomiais do 1º e 2º graus e concluímos o capítulo, com a análise do lançamento oblíquo variando o ângulo  $\theta$ .

# Capítulo 1

## Equação Polinomial do 1º grau com uma variável

### 1.1 Definição

Denomina-se **equação polinomial do 1º grau** na variável  $x$ , toda equação que pode ser reduzida à forma:

$$ax + b = 0$$

sendo  $a$  e  $b$  números reais com  $a \neq 0$ .

**Exemplo 1.1** *São equações polinomiais do 1º grau com uma variável:*

a)  $4x - 8 = 0$

b)  $-\frac{5}{4}x + \frac{3}{8} = 0$

c)  $23x - 16 = 14 - 17x$

d)  $\frac{x - 5}{10} + \frac{1 - 2x}{5} = \frac{3 - x}{4}$

Nota-se que as equações, nos exemplos  $c$  e  $d$ , não estão na forma  $ax + b = 0$ , entretanto, essas equações podem ser reduzidas à forma mais simples de uma equação polinomial do 1º grau através de transformações algébricas. Tais transformações são baseadas na aplicação dos princípios de equivalência das igualdades.

## 1.2 Equações Equivalentes

Duas ou mais equações são equivalentes quando elas têm as mesmas raízes (soluções) ou quando ambas são impossíveis (não tem solução).

**Exemplo 1.2** *A equação,  $2x + 5 = 9$  é equivalente à equação  $x + 1 = 3$ , porque ambas têm a mesma raiz, que é 2.*

De fato:

✓ 2 é a solução da equação  $2x + 5 = 9$ , pois:

$$\begin{aligned}2 \cdot 2 + 5 &= 9 \\4 + 5 &= 9 \\9 &= 9. \quad (\text{verdadeiro})\end{aligned}$$

✓ 2 é a solução da equação  $x + 1 = 3$ , pois:

$$\begin{aligned}2 + 1 &= 3 \\3 &= 3. \quad (\text{verdadeiro})\end{aligned}$$

## 1.3 Resolução de Equações Polinomiais do 1º grau com uma variável

Determinar a solução de uma equação polinomial do 1º grau significa obter, através de propriedades ou processos algébricos, o valor da incógnita  $x$  que verifica a igualdade.

Os processos algébricos utilizados para a resolução de uma equação polinomial do 1º grau, baseiam-se nos seguintes princípios matemáticos (ou princípios de equivalência):

### $P_1$ ) Princípio Aditivo

Quando aos dois membros de uma equação se adiciona (ou deles se subtrai) a mesma quantidade, obtém-se uma nova equação equivalente à primeira.

**Exemplo 1.3** *Dada a equação  $-7x + 5 = 8 - 2x$  que tem por raiz  $-\frac{3}{5}$ , adicionando-se aos seus membros  $(-5)$ , obtém-se a equação:*



$$\begin{aligned}
-7x + 5 + (-5) &= 8 - 2x + (-5) \\
-7x + 5 - 5 &= 8 - 2x - 5 \\
-7x &= 3 - 2x,
\end{aligned} \tag{1.1}$$

fazendo  $x = -\frac{3}{5}$ , na equação (1.1), segue que:

$$\begin{aligned}
-7 \cdot \left(-\frac{3}{5}\right) &= 3 - 2 \cdot \left(-\frac{3}{5}\right) \\
\frac{21}{5} &= 3 + \frac{6}{5} \\
\frac{21}{5} &= \frac{21}{5} . \quad (\text{verdadeiro})
\end{aligned}$$

Logo,  $-\frac{3}{5}$  é solução da equação  $-7x = 3 - 2x$ .

Portanto, as equações  $-7x + 5 = 8 - 2x$  e  $-7x = 3 - 2x$  são equivalentes.

**Exemplo 1.4** Dada a equação  $8x - 10 = 15 + 5x$  que tem por raiz  $\frac{25}{3}$ , adicionando-se aos seus membros  $(-5x)$ , obtém-se a equação:

$$\begin{aligned}
8x - 10 + (-5x) &= 15 + 5x + (-5x) \\
8x - 10 - 5x &= 15 + 5x - 5x \\
3x - 10 &= 15 .
\end{aligned} \tag{1.2}$$

fazendo  $x = \frac{25}{3}$ , na equação (1.2), segue que:

$$\begin{aligned}
3 \cdot \frac{25}{3} - 10 &= 15 \\
\frac{75}{3} - 10 &= 15 \\
\frac{45}{3} &= 15 \\
15 &= 15 . \quad (\text{verdadeiro})
\end{aligned}$$

Logo,  $\frac{25}{3}$  é solução da equação  $3x - 10 = 15$ .

Portanto, as equações  $8x - 10 = 15 + 5x$  e  $3x - 10 = 15$  são equivalentes.

**Conclusão:** no princípio aditivo, adicionando-se aos membros de uma equação, tanto números reais como variáveis, sempre obtém-se uma equação equivalente à primeira.

## $P_2$ ) Princípio Multiplicativo

Quando aos dois membros de uma equação se multiplica (ou deles se divide) a mesma quantidade (diferente de zero), obtém-se uma nova equação equivalente à primeira.

**Exemplo 1.5** Dada a equação  $\frac{x}{2} + \frac{7}{10} = \frac{3x}{5} + 1$  que tem por raiz  $-3$ , multiplicando-se os seus membros por  $10$ , obtém-se a equação:

$$\begin{aligned}\left(\frac{x}{2} + \frac{7}{10}\right) \cdot 10 &= \left(\frac{3x}{5} + 1\right) \cdot 10 \\ \frac{x}{2} \cdot 10 + \frac{7}{10} \cdot 10 &= \frac{3x}{5} \cdot 10 + 1 \cdot 10 \\ 5x + 7 &= 6x + 10.\end{aligned}\tag{1.3}$$

fazendo  $x = -3$ , na equação (1.3), segue que:

$$\begin{aligned}5 \cdot (-3) + 7 &= 6 \cdot (-3) + 10 \\ -15 + 7 &= -18 + 10 \\ -8 &= -8. \quad (\text{verdadeiro})\end{aligned}$$

Logo,  $-3$  é solução da equação  $5x + 7 = 6x + 10$ .

Portanto, as equações  $\frac{x}{2} + \frac{7}{10} = \frac{3x}{5} + 1$  e  $5x + 7 = 6x + 10$  são equivalentes.

**Exemplo 1.6** Na equação  $x - 2 = 0$  que tem por raiz  $2$ , multiplicando-se os seus membros por  $x$ , obtém-se a equação:

$$\begin{aligned}(x - 2) \cdot x &= 0 \cdot x \\ x(x - 2) &= 0 \\ x^2 - 2x &= 0.\end{aligned}$$

ou seja, multiplicando-se a equação  $(x - 2)$  por  $x$ , gerou-se uma equação polinomial do 2º grau que tem por raízes  $0$  e  $2$ . Portanto, obteve-se uma equação que não é equivalente a  $(x - 2)$  e também não é polinomial do 1º grau.

**Conclusão:** no princípio multiplicativo, só multiplica-se os membros de uma equação por números reais diferentes de zero, para obter uma equação equivalente à primeira.

O professor deve comentar com o aluno que, apesar de os princípios aditivo e multiplicativo estarem sendo usados na resolução de equações polinomiais do 1º grau, estes princípios podem ser utilizados para auxiliar na resolução de qualquer equação.

Portanto, o processo para resolver uma equação polinomial do 1º grau, consiste em obter equações equivalentes sucessivamente através da aplicação dos princípios aditivo e multiplicativo, até que a solução (ou raiz) da equação seja encontrada.

**Exemplo 1.7** Resolva a equação abaixo  $5x - 5 = 4x + 10$ .

**Resolução:**

$$\begin{aligned} 5x - 5 + 5 &= 4x + 10 + 5 && \text{aplicando } (P_1) \\ 5x &= 4x + 15 \\ 5x - 4x &= 4x + 15 - 4x && \text{aplicando } (P_1) \\ x &= 15 . \end{aligned}$$

Portanto,  $S = \{15\}$

**Exemplo 1.8** Resolva a equação abaixo  $2(x - 5) + 4(1 - 2x) = 5(3 - x)$ .

**Resolução:**

Para este tipo de equação deve-se, inicialmente, eliminar os parênteses aplicando a propriedade distributiva da multiplicação e em seguida reduzir os termos semelhantes em cada membro.

$$\begin{aligned} 2x - 10 + 4 - 8x &= 15 - 5x \\ -6x - 6 &= 15 - 5x \\ -6x - 6 + 6 &= 15 - 5x + 6 && \text{aplicando } (P_1) \\ -6x &= 21 - 5x \\ -6x + 5x &= 21 - 5x + 5x && \text{aplicando } (P_1) \\ -x &= 21 \\ (-x) \cdot (-1) &= 21 \cdot (-1) && \text{aplicando } (P_2) \\ x &= -21 . \end{aligned}$$

Portanto,  $S = \{-21\}$ .

**Exemplo 1.9** Resolva a equação abaixo  $\frac{(2x + 3)}{3} + \frac{5(2x - 1)}{2} = 5x - \frac{1}{6}$ .

**Resolução:**

Nesse tipo de equação, inicialmente, elimina-se todos os denominadores, utilizando-se o *m.m.c* dos mesmos, ou seja  $m.m.c(2, 3, 6) = 6$ .

$$\left[ \frac{(2x + 3)}{3} + \frac{5(2x - 1)}{2} \right] \cdot 6 = \left( 5x - \frac{1}{6} \right) \cdot 6 \quad \text{aplicando } (P_2)$$

$$2(2x + 3) + 15(2x - 1) = 30x - 1 ,$$

aplicando a propriedade distributiva da multiplicação e reduzindo os termos semelhantes em cada membro, obtém-se:

$$4x + 6 + 30x - 15 = 30x - 1$$

$$34x - 9 = 30x - 1$$

$$34x - 9 + 9 = 30x - 1 + 9 \quad \text{aplicando } (P_1)$$

$$34x = 30x + 8$$

$$34x - 30x = 30x + 8 - 30x \quad \text{aplicando } (P_1)$$

$$4x = 8$$

$$\frac{4x}{4} = \frac{8}{4} \quad \text{aplicando } (P_2)$$

$$x = 2 .$$

Portanto,  $S = \{2\}$ .

O princípio aditivo e o princípio multiplicativo servem para facilitar o entendimento da resolução de uma equação polinomial do 1º grau, mas para resolvê-la existe um método simples e prático que é o seguinte:

1. Coloca-se no 1º membro os termos que tem  $x$  e no 2º membro os termos que não tem  $x$ . Trocando o sinal dos termos que mudam de um membro para outro (Princípio Aditivo);
2. Reduz-se os termos semelhantes em cada membro da equação;
3. Por fim, isola-se a variável  $x$ , dividindo o segundo membro pelo coeficiente de  $x$  (Princípio Multiplicativo);

**Exemplo 1.10** Resolver a equação  $5x - 8 = 12 + x$ .

**Resolução:**

$$5x - 8 = 12 + x \quad \text{aplicando 1}$$

$$5x - x = 12 + 8 \quad \text{aplicando 2}$$

$$4x = 20 \quad \text{aplicando 3}$$

$$x = \frac{20}{4}$$

$$x = 5 .$$

Portanto,  $S = \{5\}$ .

**Exemplo 1.11** Resolver a equação  $2(x + 5) - 3(5 - x) = 5$ .

**Resolução:**

$$2(x + 5) - 3(5 - x) = 5 ,$$

Nessa equação, inicialmente, é necessário eliminar os parênteses aplicando a propriedade distributiva da multiplicação.

$$\begin{aligned} 2x + 10 - 15 + 3x &= 5 && \text{aplicando 1} \\ 2x + 3x &= 5 - 10 + 15 && \text{aplicando 2} \\ 5x &= 10 && \text{aplicando 3} \\ x &= \frac{10}{5} \\ x &= 2 . \end{aligned}$$

Portanto,  $S = \{2\}$ .

**Exemplo 1.12** Resolver a equação  $\frac{3x + 1}{5} - \frac{2x + 3}{3} = x - 4$ .

**Resolução:**

$$\frac{3x + 1}{5} - \frac{2x + 3}{3} = x - 4 ,$$

Nesse tipo de equação, inicialmente, elimina-se todos os denominadores, multiplicando os membros da equação pelo *m.m.c* dos denominadores. Ou seja,  $m.m.c(3, 5) = 15$ .

$$\left( \frac{3x + 1}{5} - \frac{2x + 3}{3} \right) \cdot 15 = (x - 4) \cdot 15$$

$$3(3x + 1) - 5(2x + 3) = 15(x - 4) ,$$

Elimina-se os parênteses, aplicando a propriedade distributiva da multiplicação.

$$\begin{aligned} 9x + 3 - 10x - 15 &= 15x - 60 && \text{aplicando 1} \\ 9x - 10x - 15x &= -60 - 3 + 15 && \text{aplicando 2} \\ -16x &= -48 && \text{aplicando 3} \\ x &= \frac{-48}{-16} \\ x &= 3 . \end{aligned}$$

Portanto,  $S = \{3\}$ .

## 1.4 Equações Impossíveis e Equações Identidade

**Definição 1.1** Chama-se **equação impossível**, toda equação que não possui solução, ou seja, não existe  $x \in \mathbb{R}$ , tal que  $x$  torna a equação uma sentença verdadeira. Neste caso, a solução será representada pelo conjunto vazio.

**Exemplo 1.13** Seja a seguinte equação  $2(6x - 4) = 3(4x - 1)$ .

**Resolução:**

$$\begin{aligned}2(6x - 4) &= 3(4x - 1) \\12x - 8 &= 12x - 3 \\12x - 12x &= -3 + 8 \\0 \cdot x &= 5\end{aligned}\tag{1.4}$$

Nota-se que não existe  $x \in \mathbb{R}$ , que torne a equação (1.4) uma sentença verdadeira, então a equação  $2(6x - 4) = 3(4x - 1)$  é impossível e, portanto, não tem solução. Logo,  $S = \emptyset$ .

Portanto, uma equação polinomial do 1º grau  $ax + b = 0$  é impossível, quando  $a = 0$  e  $b \neq 0$ .

**Definição 1.2** Chama-se **equação identidade**, toda equação que possui infinitas soluções, ou seja, a equação é uma sentença verdadeira para qualquer valor de  $x \in \mathbb{R}$ . Neste caso, a solução será representada pelo conjunto dos números reais.

**Exemplo 1.14** Seja agora a seguinte equação  $3(3 - x) - 7 = 2(1 - x) - x$ .

**Resolução:**

$$\begin{aligned}3(3 - x) - 7 &= 2(1 - x) - x \\9 - 3x - 7 &= 2 - 2x - x \\-3x + 2x + x &= 2 - 9 + 7 \\0 \cdot x &= 0\end{aligned}\tag{1.5}$$

Fica claro que todo  $x \in \mathbb{R}$ , torna a equação (1.5) uma sentença verdadeira, então a equação  $3(3 - x) - 7 = 2(1 - x) - x$  é uma equação identidade e, portanto, possui infinitas soluções. Logo,  $S = \mathbb{R}$ .

Portanto, uma equação polinomial do 1º grau  $ax + b = 0$  é impossível, quando  $a = 0$  e  $b = 0$ .

## Capítulo 2

# Equação Polinomial do 2º grau com uma variável

### 2.1 Definição

Denomina-se **equação polinomial do 2º grau** na variável  $x$ , a qualquer expressão matemática que pode ser escrita na forma

$$ax^2 + bx + c = 0$$

onde  $a$ ,  $b$  e  $c$  são números reais, com  $a \neq 0$ .

**Exemplo 2.1** São equações do 2º grau:

✓  $2x^2 + 23x - 39 = 0$ , com:  $a = 2$ ,  $b = 23$  e  $c = -39$

✓  $-4x^2 + 25 = 0$ , com:  $a = -4$ ,  $b = 0$  e  $c = 25$

✓  $3x^2 - x = 0$ , com:  $a = 3$ ,  $b = -1$  e  $c = 0$

✓  $x^2 = 2$ , com:  $a = 1$ ,  $b = 0$  e  $c = 0$

### 2.2 Resolução de equações incompletas do 2º grau

Resolver uma equação do 2º grau em  $\mathbb{R}$  significa determinar, através de processos algébricos, o valor ou valores de  $x$  que verifiquem a igualdade correspondente à equação, ou seja, as suas soluções.

Para as equações incompletas do 2º grau, podemos determinar as suas soluções utilizando apenas propriedades algébricas.

Sejam as duas situações:

**1ª situação:** Equação incompleta do 2º grau na forma  $ax^2 + bx = 0$ , sendo ( $a \neq 0$  e  $b \neq 0$ ).

Para resolução deste tipo de equação incompleta do 2º grau, usa-se a seguinte propriedade:

**Propriedade 2.1** Se  $a \in \mathbb{R}$ ,  $b \in \mathbb{R}$  e  $a \cdot b = 0$ , então  $a = 0$  ou  $b = 0$ .

Resolução de  $ax^2 + bx = 0$ , ( $a \neq 0$ ).

$ax^2 + bx = 0 \implies x(ax + b) = 0$ , então pela propriedade 2.1

$$x = 0 \quad \text{ou} \quad ax + b = 0$$

$$x = 0 \quad \text{ou} \quad ax = -b$$

$$x = 0 \quad \text{ou} \quad x = -\frac{b}{a}.$$

Portanto, a solução é dada por:

$$S = \left\{ 0, -\frac{b}{a} \right\}.$$

**2ª situação:** Equação incompleta do 2º grau na forma  $ax^2 + c = 0$ , sendo ( $a \neq 0$  e  $c \neq 0$ ).

Para resolução deste tipo de equação incompleta do 2º grau, usa-se a seguinte propriedade:

**Propriedade 2.2** Se  $a \in \mathbb{R}$ ,  $b \in \mathbb{R}_+$  e  $a^2 = b$ , então  $a = -\sqrt{b}$  ou  $a = \sqrt{b}$ .

Resolução de  $ax^2 + c = 0$ , ( $a \neq 0$ ).

$$ax^2 + c = 0 \tag{2.1}$$

$$ax^2 = -c \tag{2.2}$$

$$x^2 = -\frac{c}{a} \tag{2.3}$$

$$x = \pm \sqrt{-\frac{c}{a}}. \tag{2.4}$$

Portanto, a solução é dada por:

$$S = \left\{ -\sqrt{-\frac{c}{a}}, \sqrt{-\frac{c}{a}} \right\}.$$

A aplicação da propriedade 2.2 na equação (2.3) só é possível quando  $-\frac{c}{a} \geq 0$ .

Caso  $-\frac{c}{a} < 0$ , da equação (2.3), concluí-se que a equação (2.1) não possui solução real, pois, o quadrado de  $x$  não pode ser negativo.



## 2.3 Método do Completamento do Quadrado

Basicamente, o método do completamento do quadrado consiste em adicionar ao binômio do 2º grau da forma  $x^2 + kx$  um termo de modo a se obter um trinômio quadrado perfeito.

Portanto, o problema consiste em determinar qual o termo a ser utilizado para realizar o completamento do quadrado.

Seja  $T$  o termo que completa o quadrado do binômio do 2º grau  $x^2 + kx$ , logo a expressão algébrica:

$$x^2 + kx + T, \quad (2.5)$$

é um trinômio quadrado perfeito.

Desenvolvendo o produto notável  $(p + q)^2$ , obtém-se um trinômio quadrado perfeito, ou seja:

$$(p + q)^2 = p^2 + 2pq + q^2. \quad (2.6)$$

Considerando, sem perda de generalidade,  $p, q > 0$ , e comparando os termos do trinômio (2.5) com os seus correspondentes no trinômio obtido em (2.6), isto é, fazendo:

$$x^2 + kx + T = p^2 + 2pq + q^2, \quad (2.7)$$

obtém-se de (2.7), as seguintes igualdades:

$$x^2 = p^2 \quad (2.8)$$

$$kx = 2pq \quad (2.9)$$

$$T = q^2. \quad (2.10)$$

Da igualdade (2.8), segue que:

$$x^2 = p^2 \xrightarrow{(p>0)} x = p. \quad (2.11)$$

Substituindo o resultado obtido em (2.11) na igualdade (2.9) e isolando  $q$ , tem-se:

$$kx = 2pq \xrightarrow{(2.11)} kp = 2pq \implies q = \frac{kp}{2p} \xrightarrow{(p>0)} q = \frac{k}{2}. \quad (2.12)$$

Finalmente, substituindo o resultado obtido em (2.12) na igualdade (2.10), segue que:

$$T = q^2 \xrightarrow{(2.12)} T = \left(\frac{k}{2}\right)^2 \implies T = \frac{k^2}{4}. \quad (2.13)$$

Logo, da igualdade (2.13), conclui-se que o termo que transforma o binômio do 2º grau da forma  $x^2 + kx$  em um trinômio quadrado perfeito é:

$$T = \frac{k^2}{4}$$

. Pois,

$$x^2 + kx + \frac{k^2}{4} = \left(x + \frac{k}{2}\right)^2 . \quad (2.14)$$

Portanto, o método do completamento do quadrado consiste na obtenção da seguinte igualdade:

$$x^2 + kx = \left(x + \frac{k}{2}\right)^2 - \frac{k^2}{4} . \quad (2.15)$$

De fato:

$$x^2 + kx = \underbrace{x^2 + kx + \frac{k^2}{4}}_{(2.14)} - \frac{k^2}{4} = \left(x + \frac{k}{2}\right)^2 - \frac{k^2}{4} .$$

## 2.4 Resolução de equações completas do 2º grau

Na resolução da equação completa do 2º grau, o processo algébrico que utiliza-se para determinar as suas soluções, será o **método do completamento do quadrado**.

Resolução de  $ax^2 + bx + c = 0$  , ( $a \neq 0$  ,  $b \neq 0$  e  $c \neq 0$ ).

Dada a equação:

$$ax^2 + bx + c = 0 , \quad (2.16)$$

como  $a \neq 0$ , podemos escrevê-la da seguinte forma:

$$a \left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = 0 \implies \left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) + \frac{c}{a} = 0 . \quad (2.17)$$

Do método do completamento do quadrado, sabe-se que:

$$x^2 + kx = \left(x + \frac{k}{2}\right)^2 - \frac{k^2}{4} .$$

Logo,

$$x^2 + \frac{b}{a}x = \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} . \quad (2.18)$$

Substituindo a igualdade (2.18) na equação (2.17), tem-se:

$$\begin{aligned} \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} &= 0 \\ \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 &= \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a} \\ \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 &= \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \end{aligned} \tag{2.19}$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right) = \pm \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} \tag{2.20}$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right) = \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} .$$

Fazendo  $\Delta = b^2 - 4ac$ , obtém-se<sup>1</sup>:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} .$$

Logo, as raízes  $r_1$  e  $r_2$  da equação  $ax^2 + bx + c = 0$ , são dadas por:

$$r_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ ou } r_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} ,$$

e a solução é dada por:

$$S = \left\{ \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}, \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \right\} .$$

Note-se que a passagem da equação (2.19) para a equação (2.20) só é possível se  $\Delta \geq 0$ . Caso contrário,  $\Delta < 0$ , da equação (2.19), a equação (2.16) não possui raízes reais, pois,  $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$  não pode ser negativo.

---

<sup>1</sup>essa expressão é conhecida como **fórmula de Bháskara**.

## 2.5 Propriedades das raízes

Dada uma equação do 2º grau da forma  $ax^2 + bx + c = 0$ , as suas soluções são dadas por:

$$r_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ ou } r_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

desde que  $\Delta \geq 0$ .

É possível, a partir das raízes, obter a equação que deu origem às mesmas. Para isso, é necessária a apresentação de duas propriedades existentes entre os coeficientes  $a$ ,  $b$ ,  $c$  e as raízes  $r_1$  e  $r_2$ .

**Propriedade 2.3 (Soma das raízes)** *A soma das raízes  $r_1$  e  $r_2$ , da equação do 2º grau  $ax^2 + bx + c = 0$ , é dada por:*

$$r_1 + r_2 = -\frac{b}{a}.$$

**Demonstração:**

$$\begin{aligned} r_1 + r_2 &= \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} + \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \\ r_1 + r_2 &= \frac{-b - \sqrt{\Delta} - b + \sqrt{\Delta}}{2a} \\ r_1 + r_2 &= -\frac{2b}{2a} \\ r_1 + r_2 &= -\frac{b}{a}. \end{aligned}$$

**Propriedade 2.4 (Produto das raízes)** *O produto das raízes  $r_1$  e  $r_2$ , da equação do 2º grau  $ax^2 + bx + c = 0$ , é dada por:*

$$r_1 \cdot r_2 = \frac{c}{a}.$$

**Demonstração:**

$$\begin{aligned}r_1 \cdot r_2 &= \left( \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \right) \cdot \left( \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \right) \\r_1 \cdot r_2 &= \frac{(-b)^2 - (\Delta)^2}{(2a)^2} \\r_1 \cdot r_2 &= \frac{b^2 - \Delta^2}{4a^2} \\r_1 \cdot r_2 &= \frac{b^2 - (b^2 - 4ac)}{4a^2}, \text{ pois } \Delta = b^2 - 4ac . \\r_1 \cdot r_2 &= \frac{b^2 - b^2 + 4ac}{4a^2} \\r_1 \cdot r_2 &= \frac{4ac}{4a^2}, \text{ como } a \neq 0, \text{ tem-se:} \\r_1 \cdot r_2 &= \frac{c}{a} .\end{aligned}$$

Com estas duas propriedades, é possível formar uma equação do 2º grau a partir de suas raízes, da seguinte forma.

Sejam  $r_1$  e  $r_2$  as raízes da equação do 2º grau  $ax^2 + bx + c = 0$ , tem-se que:

$$\begin{aligned}ax^2 + bx + c &= 0, \text{ dividindo por } a \neq 0 \text{ obtemos,} \\x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} &= 0 \\x^2 - \left( -\frac{b}{a} \right)x + \frac{c}{a} &= 0 .\end{aligned} \tag{2.21}$$

Mas,  $r_1 + r_2 = -\frac{b}{a}$  e  $r_1 \cdot r_2 = \frac{c}{a}$ , substituindo na igualdade (2.21), tem-se:

$$x^2 - (r_1 + r_2)x + (r_1 \cdot r_2) = 0 .$$

Fazendo,  $S = r_1 + r_2$  e  $P = r_1 \cdot r_2$ , segue que:

$$x^2 - Sx + P = 0 . \tag{2.22}$$

Faz-se importante comentar com o aluno que como as equações da forma  $x^2 - Sx + P = 0$ , apresentam explicitamente, a soma e o produto de suas raízes, para algumas dessas equações é possível determinar, mentalmente, as raízes. Para isso, basta encontrar dois números reais que tenham soma  $S$  e produto  $P$ , se for determinado, tais números são as raízes.

**Exemplo 2.2** Dada equação  $x^2 + 4x - 5 = 0$ , comparando com a equação (2.22), tem-se:

$$S = -4 \quad e \quad P = -5$$

Os dois números que tem soma  $-4$  e produto  $-5$  são  $-5$  e  $1$ , pois,  $-5 + 1 = -4$  e  $(-5) \cdot 1 = -5$ .

Logo, os números  $-5$  e  $1$  são as raízes da equação  $x^2 + 4x - 5 = 0$ .

Outra observação importante que decorre das propriedades (2.3) e (2.4), que poderá ser mencionada ao aluno, é o fato de que é possível determinar a soma e o produto das raízes de uma equação do 2º grau, mesmo quando estas equações não possuem raízes reais.

**Exemplo 2.3** Na equação  $x^2 - 2x + 10 = 0$ , comparando com a equação (2.22), tem-se:

$$S = 2 \quad e \quad P = 10$$

Entretanto, nessa equação  $\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 10 = 4 - 40 = -36 \implies \Delta < 0$ , ou seja, a equação  $x^2 - 2x + 10 = 0$  não possui raízes reais.

O professor poderá aproveitar a oportunidade para fazer um comentário superficial sobre os números complexos e que esses números é que garantem a existência da soma e do produto das raízes de equações do 2º grau que não possuem raízes reais, ou seja, para tais equações as raízes são dois números complexos cuja a soma é  $S$  e o produto é  $P$ .

# Capítulo 3

## Função Polinomial do 1º grau

### 3.1 Definição

Chama-se **função polinomial do 1º grau**, toda função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por:

$$y = f(x) = ax + b$$

sendo  $a$  e  $b$  números reais com  $a \neq 0$ .

**Exemplo 3.1** São funções polinomiais do 1º grau:

$$\checkmark f(x) = 3x - 10$$

$$\checkmark y = -\frac{2}{5}x + \sqrt{7}$$

$$\checkmark f(x) = -4x$$

$$\checkmark f(x) = x$$

Casos Particulares:

1. Na função polinomial do 1º grau  $f(x) = ax + b$ , quando  $b = 0$ , a função resultante  $f(x) = ax$  é chamada de **função linear**.

**Exemplo 3.2** São funções lineares:

$$\checkmark f(x) = -\pi x$$

$$\checkmark y = \sqrt{13}x$$

2. Na função polinomial do 1º grau  $f(x) = ax + b$ , quando  $a = 1$  e  $b = 0$ , a função resultante  $f(x) = ax$  é chamada de **função identidade**.

## 3.2 Caracterização da função polinomial do 1º grau

**Teorema 3.1** Dada uma função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Se o quociente  $\frac{f(x+p) - f(x)}{p}$  for um número real diferente de 0, para quaisquer  $x, p \in \mathbb{R}$ , com  $p \neq 0$ , então  $f$  é uma função polinomial do 1º grau.

De fato:

Seja  $\frac{f(x+p) - f(x)}{p} = a$ , onde  $a \in \mathbb{R}$  e  $a \neq 0$ . Então, obtém-se:

$$\begin{aligned}\frac{f(x+p) - f(x)}{p} &= a \\ f(x+p) - f(x) &= ap \\ f(x+p) &= f(x) + p.\end{aligned}\tag{3.1}$$

Como a igualdade (3.1) é verdadeira para quaisquer  $x, p \in \mathbb{R}$ , com  $p \neq 0$ , então, para  $x = 0$  na igualdade (3.1), temos:

$$\begin{aligned}f(0+p) &= f(0) + ap \\ f(p) &= f(0) + ap.\end{aligned}\tag{3.2}$$

e fazendo  $f(0) = b$  na igualdade (3.2), segue:

$$f(p) = ap + b.$$

Logo,

$$f(x) = ax + b, \text{ para todo } x \in \mathbb{R}.$$

Desenvolvendo a igualdade  $\frac{f(x+p) - f(x)}{p} = a$ , com  $a \in \mathbb{R}$  e  $a \neq 0$ . Daí:

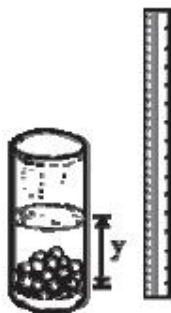
$$\begin{aligned}\frac{f(x+p) - f(x)}{p} &= a \\ f(x+p) - f(x) &= ap \\ f(x+p) - f(x) &= a[(x+p) - x]\end{aligned}\tag{3.3}$$

Da igualdade (3.3), conclui-se o seguinte:

Se no estudo de determinado fenômeno ou tabela que relaciona duas quantidades (ou grandezas)  $x$  e  $y$ , para variações iguais na variável independente  $x$  corresponderem variações iguais na variável dependente  $y$ , então o modelo matemático que descreve o fenômeno ou a tabela será a função polinomial do 1º grau.



**Exemplo 3.3 (ENEM 2009)** *Um experimento consiste em colocar certa quantidade de bolas de vidro idênticas em um copo com água até certo nível e medir o nível da água, conforme ilustrado na figura a seguir. Como resultado do experimento, concluiu-se que o nível da água é função do número de bolas de vidro que são colocadas dentro do copo.*



O quadro a seguir mostra alguns resultados do experimento realizado.

número de bolas ( $x$ )	nível da água ( $y$ )
5	6,35 cm
10	6,70 cm
15	7,05 cm

Determine o modelo matemático que permite calcular o nível da água ( $y$ ) em função do número de bolas ( $x$ ).

**Resolução:**

Observe que a cada novas 5 bolas que são colocadas no copo, o nível da água aumenta em 0,35 cm, ou seja, para variações iguais no número de bolas ( $x$ ) correspondem variações iguais no nível da água ( $y$ ), então o modelo matemático que descreve o experimento será a função polinomial do 1º grau  $y = ax + b$ .

Portanto, no quadro acima:

✓ quando  $x = 5$  e  $y = 6,35$ , tem-se:

$$6,35 = 5a + b \implies b = 6,35 - 5a . \quad (3.4)$$

✓ quando  $x = 10$  e  $y = 6,70$ , tem-se:

$$6,7 = 10a + b . \quad (3.5)$$

Substituindo a igualdade (3.4) na igualdade (3.5), obtém-se:

$$\begin{aligned} 6,7 &= 10a + (6,35 - 5a) \\ 5a &= 0,35 \\ a &= 0,07 . \end{aligned}$$

substituindo o valor de  $a$  na igualdade (3.4), segue que:

$$b = 6,35 - 5 \cdot 0,07$$

$$b = 6,35 - 0,35$$

$$b = 6.$$

Portanto, o modelo matemático que permite calcular o nível da água ( $y$ ) em função do número de bolas ( $x$ ), é dado por:

$$y = 0,07x + 6.$$

### 3.3 Significado analítico de $a$ e $b$ na função $f(x) = ax + b$

Na maioria dos livros didáticos, os números reais  $a$  e  $b$  presentes na lei de formação da função polinomial do 1º grau  $f(x) = ax + b$ , são apresentados, respectivamente, como coeficiente angular e coeficiente linear.

Entretanto, tais denominações dadas aos números reais  $a$  e  $b$  são geométricas, pois, estão associadas ao gráfico da função polinomial do 1º grau, que como provaremos neste capítulo, é uma reta não-vertical e não-horizontal.

Portanto, como forma de enriquecer o estudo da função polinomial do 1º grau, será apresentado neste capítulo os significados analíticos dos números reais  $a$  e  $b$ .

#### 3.3.1 Taxa de variação da função polinomial do 1º grau

Na função polinomial do 1º grau  $f(x) = ax + b$ , o coeficiente  $a$  será chamado de **taxa de variação** da função  $f$ , pois:

$$a = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

onde  $x_1$  e  $x_2$  são elementos distintos do domínio de  $f$ .

De fato:

**Definição 3.1** *Taxa de variação média*, denotada por  $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ , de uma função  $f$  em relação ao intervalo de extremos  $x_1$  e  $x_2$ , com  $x_1 \neq x_2$ , é dada por:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

Portanto, ao determina-se a taxa de variação média da função polinomial do 1º grau em relação ao intervalo de extremos  $x_1$  e  $x_2$ , tem-se:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \quad (3.6)$$

como  $f(x) = ax + b$ , então:

$$f(x_1) = ax_1 + b \quad (3.7)$$

e

$$f(x_2) = ax_2 + b \quad (3.8)$$

substituindo as igualdades (3.7) e (3.8) na igualdade (3.6), segue que:

$$\begin{aligned} \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{(ax_2 + b) - (ax_1 + b)}{x_2 - x_1} \\ \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{ax_2 + b - ax_1 - b}{x_2 - x_1} \\ \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{a(x_2 - x_1)}{x_2 - x_1}, \text{ como } x_1 \neq x_2, \text{ obtemos:} \\ \frac{\Delta y}{\Delta x} &= a. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Logo, com base na igualdade (3.9), será adotado para a função polinomial do 1º grau  $f(x) = ax + b$ , que a taxa de variação média será chamada de **taxa de variação**, pois, para quaisquer  $x_1$  e  $x_2 \in \mathbb{R}$ , com  $x_1 \neq x_2$ , a taxa de variação média é sempre a mesma e igual ao coeficiente  $a$ .

Basicamente, dizer que a taxa de variação da função polinomial do 1º grau  $f(x) = ax + b$  é igual ao coeficiente  $a$ , significa dizer que, cada variação de 1 unidade na variável  $x$  produz variação de  $a$  unidades em  $f(x)$ .

### 3.3.2 Valor inicial da função polinomial do 1º grau

Na função polinomial do 1º grau  $f(x) = ax + b$ , o número real  $b$ , será chamado de **valor inicial** da função  $f$ , pois:

$$b = f(0).$$

De fato:

Fazendo  $x = 0$  em  $f(x) = ax + b$ , temos que:

$$f(0) = a \cdot 0 + b \implies f(0) = b.$$

A razão do número real  $b$  na função  $f(x) = ax + b$  ser chamado valor inicial, esta relacionada às aplicações da função polinomial do 1º grau na Física, especificamente na cinemática, que serão apresentadas posteriormente neste trabalho. Nestas aplicações a função polinomial do 1º grau será uma função do tempo  $t$ , ou seja, o domínio será dado por  $t \geq 0$ , com  $t \in \mathbb{R}$ .

**Exemplo 3.4** *no início do capítulo 03, página 81, do livro do Joamir. OBS.: resolver, citando a taxa de variação e o valor inicial.*

### 3.4 Gráfico da função polinomial do 1º grau

**Definição 3.2** *O gráfico de uma função  $f$  é o conjunto  $G$  de todos os pontos  $(x, y)$  do plano, tais que  $y = f(x)$ , onde  $x \in \mathbb{R}$ , ou seja:*

$$G = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = f(x) \text{ e } x \in \mathbb{R}\}$$

No caso da função polinomial do 1º grau  $f(x) = ax + b$ , será mostrado que o seu gráfico, isto é, o conjunto descrito por

$$G = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = ax + b \text{ e } x \in \mathbb{R}\}$$

representa uma reta não-vertical e não-horizontal.

**Teorema 3.2** *O gráfico de uma função polinomial do 1º grau é uma reta não-vertical e não-horizontal e, reciprocamente, toda reta não-vertical e não-horizontal é o gráfico de uma função polinomial do 1º grau.*

#### Demonstração

( $\implies$ ) O gráfico da função polinomial do 1º grau é uma reta não-vertical e não-horizontal.

Seguem agora duas demonstrações, sendo a primeira analítica e a segunda geométrica.

#### Demonstração Analítica

Para realizar a demonstração, será usada a fórmula da distância entre dois pontos.

Dados dois pontos  $A(x_A, y_A)$  e  $B(x_B, y_B)$  e sendo  $d(A, B)$  a distância entre eles, temos que:

$$d(A, B) = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}.$$

Será demonstrado que o gráfico da função polinomial do 1º grau é uma reta não-vertical e não-horizontal, mostrando que três pontos quaisquer do seu gráfico estão em uma mesma reta, ou seja, são colineares.

Sejam  $A(x_A, ax_A + b)$ ,  $B(x_B, ax_B + b)$  e  $C(x_C, ax_C + b)$  três pontos quaisquer do gráfico da função polinomial do 1º grau  $f(x) = ax + b$ , tais que  $x_A < x_B < x_C$ .

Como

$$\begin{aligned}
 d(A, B) &= \sqrt{(x_B - x_A)^2 + [(ax_B + b) - (ax_A + b)]^2} \\
 &= \sqrt{(x_B - x_A)^2 + [ax_B + b - ax_A - b]^2} \\
 &= \sqrt{(x_B - x_A)^2 + [ax_B - ax_A]^2} \\
 &= \sqrt{(x_B - x_A)^2 + [a(x_B - x_A)]^2} \\
 &= \sqrt{(x_B - x_A)^2 + a^2(x_B - x_A)^2} \\
 &= \sqrt{(x_B - x_A)^2(1 + a^2)} \\
 d(A, B) &= (x_B - x_A)\sqrt{1 + a^2} ;
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 d(B, C) &= \sqrt{(x_C - x_B)^2 + [(ax_C + b) - (ax_B + b)]^2} \\
 &= \sqrt{(x_C - x_B)^2 + [ax_C + b - ax_B - b]^2} \\
 &= \sqrt{(x_C - x_B)^2 + [ax_C - ax_B]^2} \\
 &= \sqrt{(x_C - x_B)^2 + [a(x_C - x_B)]^2} \\
 &= \sqrt{(x_C - x_B)^2 + a^2(x_C - x_B)^2} \\
 &= \sqrt{(x_C - x_B)^2(1 + a^2)} \\
 d(B, C) &= (x_C - x_B)\sqrt{1 + a^2} ;
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 d(A, C) &= \sqrt{(x_C - x_A)^2 + [(ax_C + b) - (ax_A + b)]^2} \\
 &= \sqrt{(x_C - x_A)^2 + [ax_C + b - ax_A - b]^2} \\
 &= \sqrt{(x_C - x_A)^2 + [ax_C - ax_A]^2} \\
 &= \sqrt{(x_C - x_A)^2 + [a(x_C - x_A)]^2} \\
 &= \sqrt{(x_C - x_A)^2 + a^2(x_C - x_A)^2} \\
 &= \sqrt{(x_C - x_A)^2(1 + a^2)} \\
 d(A, C) &= (x_C - x_A)\sqrt{1 + a^2} .
 \end{aligned}$$

Note-se que

$$\begin{aligned}
 d(A, B) + d(B, C) &= (x_B - x_A)\sqrt{1 + a^2} + (x_C - x_B)\sqrt{1 + a^2} \\
 &= \sqrt{1 + a^2}(x_B - x_A + x_C - x_B) \\
 &= \sqrt{1 + a^2}(x_C - x_A) \\
 &= d(A, C),
 \end{aligned}$$

ou seja,

$$d(A, B) + d(B, C) = d(A, C).$$

Logo, três pontos quaisquer do gráfico da função polinomial do 1º grau estão alinhados. Portanto, o seu gráfico é uma reta não-vertical e não-horizontal.

### Demonstração Geométrica

Considerando três pontos  $A(x_A, ax_A + b)$ ,  $B(x_B, ax_B + b)$  e  $P(x_P, ax_P + b)$  do gráfico da função polinomial do 1º grau  $f(x) = ax + b$ .

Sem perda de generalidade, admite-se que  $x_A < x_P < x_B$  e  $a > 0$ , acarretando em  $f(x_A) < f(x_P) < f(x_B)$ .

De fato:

Sendo  $x_A < x_P < x_B$  e  $a > 0$ , tem-se:

$$ax_A < ax_P < ax_B . \tag{3.10}$$

adicionando  $b$ , aos membros das desigualdades em (3.10), segue que:

$$ax_A + b < ax_P + b < ax_B + b \implies f(x_A) < f(x_P) < f(x_B) .$$

Salientamos, que a demonstração para  $a < 0$  é feita de forma análoga.

Localizando os pontos  $A(x_A, ax_A + b)$ ,  $B(x_B, ax_B + b)$  e  $P(x_P, ax_P + b)$ , no plano cartesiano, tem-se a figura abaixo.

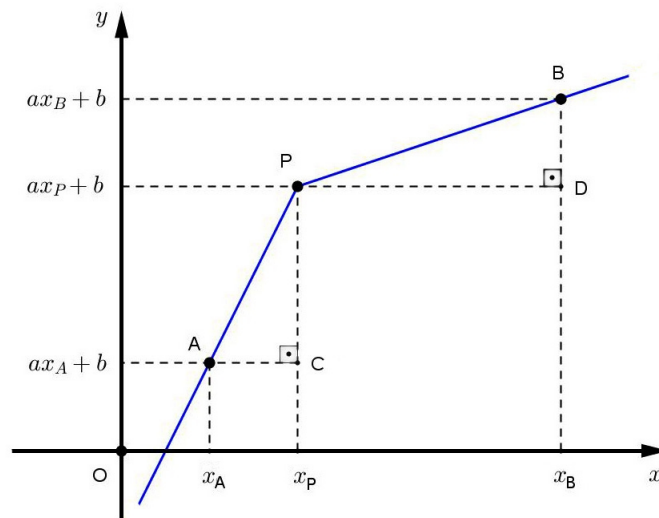


Figura 3.1: demonstração do gráfico da função  $f(x) = ax + b$

Nota-se nos triângulos retângulos  $ACP$  e  $PDB$  da figura 3.1, que:

$$\begin{aligned}
 \frac{BD}{CP} &= \frac{(ax_B + b) - (ax_P + b)}{(ax_P + b) - (ax_A + b)} \\
 \frac{BD}{CP} &= \frac{ax_B + b - ax_P - b}{ax_P + b - ax_A - b} \\
 \frac{BD}{CP} &= \frac{ax_B - ax_P}{ax_P - ax_A} \\
 \frac{BD}{CP} &= \frac{a(x_B - x_P)}{a(x_P - x_A)}, \text{ como } a \neq 0, \text{ tem-se:} \\
 \frac{BD}{CP} &= \frac{x_B - x_P}{x_P - x_A} \\
 \frac{BD}{CP} &= \frac{DP}{AC}.
 \end{aligned} \tag{3.11}$$

Da igualdade (3.11), os triângulos retângulos  $ACP$  e  $PDB$  possuem lados proporcionais. Portanto, pelo caso de semelhança  $LAL$  (lado-ângulo-lado) os triângulos  $ACP$  e  $PDB$  são semelhantes. Logo, seus ângulos correspondentes são congruentes.

Como o lado  $\overline{AC}$  é paralelo ao lado  $\overline{DP}$ , tem-se que os ângulos  $\widehat{CAP}$  e  $\widehat{DPB}$  são correspondentes. Portanto, os ângulos  $\widehat{CAP}$  e  $\widehat{DPB}$  são congruentes, o que é possível somente se os pontos  $A$ ,  $B$  e  $P$  estiverem na mesma reta, transversal às retas paralelas  $AC$  e  $DP$ .

Portanto, o gráfico da função  $f(x) = ax + b$  é uma reta não-vertical e não-horizontal.

( $\Leftarrow$ ) Toda reta não-vertical e não-horizontal é o gráfico de uma função polinomial do 1º grau.

Seja  $r$  uma reta não-vertical e não-horizontal.

Para que  $r$  seja o gráfico da função polinomial do 1º grau  $f(x) = ax + b$ , devemos mostrar que existem números reais  $a$  e  $b$ , tais que a reta  $r$  coincida com o gráfico de  $f(x) = ax + b$ .

Como a reta  $r$  é não-vertical, ela intercepta o eixo  $y$ , ou seja, existe  $b \in \mathbb{R}$ , tal que o ponto  $(0, b) \in r$ .

Seja  $(x_0, y_0)$  um ponto qualquer da reta  $r$  distinto do ponto  $(0, b)$  e tome  $a \in \mathbb{R}$ , tal que

$$a = \frac{y_0 - b}{x_0}$$

Nota-se que sempre vai existir o número real  $a$ , pois, foi excluído o único ponto da reta  $r$  que possui abscissa igual a 0.

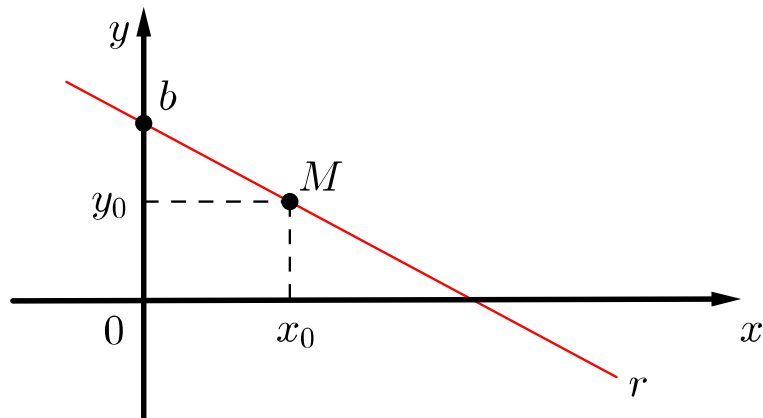


Figura 3.2: reta  $r$  determinada pelos pontos  $(0, b)$  e  $(x_0, y_0)$

Por outro lado, sabe-se que o gráfico da função polinomial do 1º grau  $f(x) = ax + b$ , é uma reta não-vertical e não-horizontal. Observa-se que:

$$f(0) = 0 \cdot a + b = 0 + b = b \implies f(0) = b. \quad (3.12)$$

e

$$f(x_0) = ax_0 + b, \text{ como } a = \frac{y_0 - b}{x_0}, \text{ temos:}$$

$$f(x_0) = \left( \frac{y_0 - b}{x_0} \right) x_0 + b$$

$$f(x_0) = y_0 - b + b$$

$$f(x_0) = y_0. \quad (3.13)$$

Concluí-se das igualdades (3.12) e (3.13), que os pontos  $(0, b)$  e  $(x_0, y_0)$  da reta  $r$  são pontos do gráfico da função  $f(x) = ax + b$ .

Portanto, a reta  $r$  coincide com o gráfico da função polinomial do 1º grau.

Logo, a reta  $r$  é o gráfico da função polinomial do 1º grau  $f(x) = ax + b$ .

Agora que foi provado que o gráfico da função polinomial do 1º grau  $f(x) = ax + b$ , é uma reta não-vertical e não-horizontal e que a recíproca é verdadeira. Apresenta-se o significado geométrico dos números reais  $a$  e  $b$ .

Seja  $f(x) = ax + b$  uma função polinomial do 1º grau e  $r$  a reta que representa o seu gráfico, conforme figura abaixo.



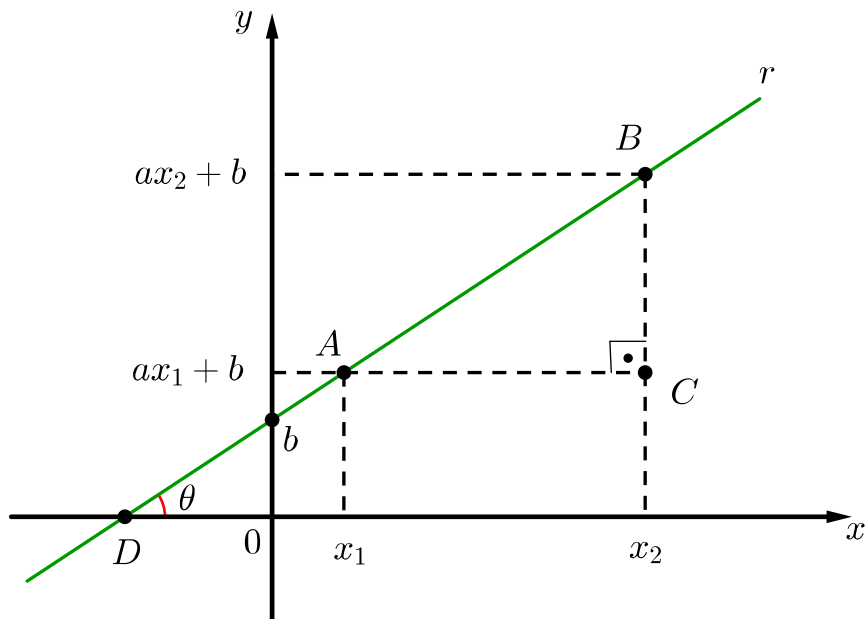


Figura 3.3: reta  $r$  formando um ângulo  $\theta$  com o eixo- $x$  e passando pelo ponto  $(0, b)$

Em relação a reta  $r$ , chamamos  $a$  de **coeficiente angular** e  $b$  de **coeficiente linear**. Pois, geometricamente, o coeficiente  $a$  representa a tangente do ângulo que a reta  $r$  forma com o eixo- $x$  e  $b$  é a ordenada do ponto onde a reta  $r$  intercepta o eixo- $y$ .

De fato:

✓ **Coeficiente Angular**

Na figura 3.3, sejam  $A$ ,  $B$  e  $D$  pontos da reta  $r$  e  $\theta$  o ângulo que essa reta forma com o eixo- $x$ . Nota-se que os ângulos  $\theta$  e  $\widehat{BAC}$  são correspondentes, pois, o lado  $AC$  do triângulo retângulo  $ABC$  é paralelo ao eixo- $x$  e os pontos  $A$ ,  $B$  e  $D$  estão alinhados. Portanto, os ângulos  $\theta$  e  $\widehat{BAC}$  são congruentes. No triângulo retângulo  $ABC$  da figura 3.3, a tangente do ângulo  $\theta$  é dada

por:

$$\begin{aligned}\tan \widehat{BAC} = \tan \theta &= \frac{BC}{AC} \\ \tan \theta &= \frac{(ax_2 + b) - (ax_1 + b)}{x_2 - x_1} \\ \tan \theta &= \frac{ax_2 + b - ax_1 - b}{x_2 - x_1} \\ \tan \theta &= \frac{ax_2 - ax_1}{x_2 - x_1} \\ \tan \theta &= \frac{a(x_2 - x_1)}{x_2 - x_1}, \text{ como } x_1 \neq x_2, \text{ tem-se:} \\ \tan \theta &= a .\end{aligned}$$

Portanto, o coeficiente  $a$  representa a tangente do ângulo que a reta  $r$  forma com o eixo- $x$ .

✓ **Coeficiente linear**

Para que um ponto  $P(x, y)$  da reta  $r$  pertença ao eixo- $y$ , deve-se ter  $x = 0$ . Logo, substituindo  $x = 0$  em  $f(x) = ax + b$ , obtém-se:

$$f(0) = a \cdot 0 + b \implies f(0) = b .$$

Portanto, o número real  $b$  é a ordenada do ponto onde a reta  $r$  intercepta o eixo- $y$ .

# Capítulo 4

## Função Polinomial do 2º grau ou Quadrática

### 4.1 Definição

Chama-se **função polinomial do 2º grau** ou **função quadrática**, toda função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$y = f(x) = ax^2 + bx + c$$

sendo  $a$ ,  $b$  e  $c$  números reais, com  $a \neq 0$ .

**Exemplo 4.1** São funções quadráticas:

$$\checkmark f(x) = \sqrt{7}x^2 - \frac{2}{5}x + 8$$

$$\checkmark f(x) = x^2 - \pi x$$

$$\checkmark f(x) = -6x^2 - \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\checkmark f(x) = \frac{x^2}{9}$$

### 4.2 Forma canônica da função quadrática

Diz-se que algum objeto matemático (fórmula, equação, matriz etc) está na sua forma canônica, quando ele está escrito na sua forma mais simples ou que expõe algo de grande importância.

Para obter a forma canônica da função polinomial do 2º grau, será utilizado o **método do completamento do quadrado**.

De modo geral, a função polinomial do 2º grau  $f(x) = ax^2 + bx + c$  pode ser escrita da seguinte forma:

$$f(x) = ax^2 + bx + c \stackrel{(a \neq 0)}{=} a \left( x^2 + \frac{b}{a}x \right) + c. \quad (4.1)$$

Do método do completamento do quadrado, estudado na seção 2.3 do capítulo 2, sabe-se que:

$$x^2 + kx = \left( x + \frac{k}{2} \right)^2 - \frac{k^2}{4}.$$

Logo,

$$x^2 + \frac{b}{a}x = \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2}{4a^2}. \quad (4.2)$$

Portanto, substituindo a igualdade (4.2) na igualdade (4.1), tem-se:

$$\begin{aligned} f(x) &= a \left[ \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} \right] + c; \\ f(x) &= a \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c; \\ f(x) &= a \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}; \end{aligned} \quad (4.3)$$

fazendo,

$$m = -\frac{b}{2a} \quad e \quad k = \frac{4ac - b^2}{4a} = -\frac{\Delta}{4a}.$$

e substituindo na igualdade (4.3), tem-se:

$$f(x) = a(x - m)^2 + k, \text{ para todo } x \in \mathbb{R}$$

onde  $m = -\frac{b}{2a}$  e  $k = -\frac{\Delta}{4a}$ .

Esta é a **forma canônica** da função polinomial do 2º grau.

### 4.3 Forma fatorada da função quadrática

Toda função polinomial do 2º grau  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , definida por:

$$f(x) = ax^2 + bx + c,$$

que possui zeros  $r_1$  e  $r_2$ , pode ser escrita da seguinte maneira:

$$f(x) = a(x - r_1)(x - r_2) .$$

Esta forma de representar a função polinomial do 2º grau é chamada **forma fatorada**.

**Demonstração:**

Sejam  $r_1$  e  $r_2$  os zeros da função quadrática  $f(x) = ax^2 + bx + c$ , tem-se:

$$f(x) = ax^2 + bx + c \stackrel{(a \neq 0)}{=} a \left( x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} \right) , \quad (4.4)$$

mas, da seção (2.5) do capítulo 2, sabe-se que:

$$r_1 + r_2 = -\frac{b}{a} \implies \frac{b}{a} = -(r_1 + r_2) \quad (4.5)$$

e

$$r_1 \cdot r_2 = \frac{c}{a} \quad (4.6)$$

substituindo as igualdades (4.5) e (4.6) na igualdade (4.4), tem-se:

$$\begin{aligned} f(x) &= a[x^2 - (r_1 + r_2)x + (r_1 \cdot r_2)] \\ f(x) &= a[x^2 - r_1x - r_2x + r_1 \cdot r_2] \\ f(x) &= a[x(x - r_1) - r_2(x - r_1)] \\ f(x) &= a(x - r_1)(x - r_2) . \end{aligned}$$

## 4.4 Estudo analítico do sinal da função quadrática

Estudar o sinal de uma função  $f$  consiste em determinar os valores (ou intervalos) do domínio para os quais a função  $f$  assume valores positivos ou negativos.

Geralmente, o estudo do sinal da função polinomial do 2º grau é feito através da análise (ou estudo) do seu gráfico, seguindo basicamente, a seguinte seqüência:

1. determina-se os zeros ou raízes da função quadrática, caso existam;
2. em seguida, é feito um esboço do gráfico da função polinomial do 2º grau;
3. e finalmente, observando os pontos do gráfico da função quadrática, seguem as seguintes conclusões:

- (a) os valores de  $x$ , para os quais a função quadrática assume valores positivos, correspondem aos pontos do seu gráfico que estão acima do eixo- $x$ . Caso não existam tais pontos, a função quadrática não assume valores positivos.
- (b) os valores de  $x$  para os quais a função quadrática assume valores negativos, correspondem aos pontos do seu gráfico que estão abaixo do eixo- $x$ . Caso não existam tais pontos, a função quadrática não assume valores negativos.

Entretanto, utilizando a forma fatorada da função polinomial do 2º grau é possível realizar o estudo do sinal da mesma sem recorrer à análise do seu gráfico, ou seja, é possível fazer o estudo analítico do sinal da função quadrática. Pois, a forma fatorada da função polinomial do 2º grau, permite tirar as seguintes conclusões sobre o sinal da mesma.

**Teorema 4.1** *Se um certo  $x$  está situado entre os zeros  $r_1$  e  $r_2$  da função quadrática  $f(x) = ax^2 + bx + c$ , então  $f(x)$  tem sinal oposto ao sinal de  $a$ . Caso contrário, ou  $x$  é raiz ou  $f(x)$  tem o mesmo sinal de  $a$ .*

**Demonstração:**

Sejam  $r_1$  e  $r_2$  os zeros da função polinomial do 2º grau  $f(x) = ax^2 + bx + c$  e  $f(x) = a(x - r_1)(x - r_2)$  a sua forma fatorada.

**1º Caso:**  $x$  está situado entre os zeros da função quadrática.

Supondo  $r_1 < r_2$ , considere  $x \in \mathbb{R}$ , tal que  $x$  esteja situado entre  $r_1$  e  $r_2$ , logo:

$$r_1 < x < r_2, \tag{4.7}$$

da desigualdade (4.7), segue que:

$$r_1 < x < r_2 \iff r_1 < x \quad \text{e} \quad x < r_2 \iff \underbrace{x - r_1}_{(1)} > 0 \quad \text{e} \quad \underbrace{x - r_2}_{(2)} < 0.$$

Das desigualdades (1) e (2), concluí-se que:

$$(x - r_1)(x - r_2) < 0. \tag{4.8}$$

Multiplicando a desigualdade (4.8) por  $a \in \mathbb{R}$ , com  $a \neq 0$ , deve-se considerar duas situações:

*i)* se  $a > 0$ , tem-se:

$$a > 0 \quad \text{e} \quad (x - r_1)(x - r_2) < 0 \implies \underbrace{a(x - r_1)(x - r_2)}_{\text{forma fatorada de } f(x)} < 0 \implies f(x) < 0.$$

ou seja, sendo  $a > 0$ , o sinal de  $f(x)$  é oposto ao sinal de  $a$ , para todo  $r_1 < x < r_2$ .

ii) se  $a < 0$ , segue:

$$a < 0 \quad \text{e} \quad (x - r_1)(x - r_2) < 0 \implies \underbrace{a(x - r_1)(x - r_2)}_{\text{forma fatorada de } f(x)} > 0 \implies f(x) > 0 .$$

ou seja, sendo  $a < 0$ , o sinal de  $f(x)$  é oposto ao sinal de  $a$ , para todo  $r_1 < x < r_2$ .

**Conclusão:** para  $x$  situado entre os zeros  $r_1$  e  $r_2$  da função quadrática  $f(x) = ax^2 + bx + c$ ,  $f(x)$  terá sinal oposto ao sinal do coeficiente  $a$ .

**2º Caso:**  $x$  não está situado entre os zeros da função quadrática.

Supondo  $r_1 < r_2$ , consideremos  $x \in \mathbb{R}$ , tal que  $x$  não esteja situado entre  $r_1$  e  $r_2$ , logo:

$$\underbrace{x \leq r_1}_{(3)} \quad \text{ou} \quad \underbrace{x \geq r_2}_{(4)} .$$

Na desigualdade (3), temos  $x \leq r_1$  e como  $r_1 < r_2$ , obtém-se:

$$x < r_2 \tag{4.9}$$

Utilizando as desigualdades (3) e (4.9), tem-se,

$$x \leq r_1 \quad \text{e} \quad x < r_2 \iff \underbrace{x - r_1 \leq 0}_{(5)} \quad \text{e} \quad \underbrace{x - r_2 < 0}_{(6)} .$$

Das desigualdades (5) e (6), fica claro que:

$$(x - r_1)(x - r_2) \geq 0 . \tag{4.10}$$

Multiplicando a desigualdade (4.10) por  $a \in \mathbb{R}$ , com  $a \neq 0$ , deve-se considerar duas situações:

i) se  $a > 0$ , temos:

$$a > 0 \quad \text{e} \quad (x - r_1)(x - r_2) \geq 0 \implies \underbrace{a(x - r_1)(x - r_2)}_{\text{forma fatorada de } f(x)} \geq 0 \implies f(x) \geq 0 .$$

logo, sendo  $a > 0$ , ou  $x$  é a raiz  $r_1$  de  $f(x)$  ou o sinal de  $f(x)$  é o mesmo sinal de  $a$ , para todo  $x < r_1$ .

ii) se  $a < 0$ , temos:

$$a < 0 \quad \text{e} \quad (x - r_1)(x - r_2) \geq 0 \implies \underbrace{a(x - r_1)(x - r_2)}_{\text{forma fatorada de } f(x)} \leq 0 \implies f(x) \leq 0 .$$

Logo, sendo  $a < 0$ , ou  $x$  é a raiz  $r_1$  de  $f(x)$  ou o sinal de  $f(x)$  é o mesmo sinal de  $a$ , para todo  $x < r_1$ .

**Conclusão 1:** para  $x \leq r_1$ , ou  $x$  é a raiz  $r_1$  de  $f(x)$  ou o sinal de  $f(x)$  é o mesmo sinal de  $a$ , para todo  $x < r_1$ .

Na desigualdade (4), temos  $x \geq r_2$  e como  $r_1 < r_2$ , segue:

$$x > r_1 . \tag{4.11}$$

Utilizando as desigualdades (4) e (4.11), tem-se:

$$x \geq r_2 \quad \text{e} \quad x > r_1 \iff \underbrace{x - r_2 \geq 0}_{(7)} \quad \text{e} \quad \underbrace{x - r_1 > 0}_{(8)} .$$

Das desigualdades (7) e (8), tem-se finalmente:

$$(x - r_1)(x - r_2) \geq 0 . \tag{4.12}$$

Multiplicando a desigualdade (4.12) por  $a \in \mathbb{R}$ , com  $a \neq 0$ , deve-se considerar duas situações:

i) se  $a > 0$ , temos:

$$a > 0 \quad \text{e} \quad (x - r_1)(x - r_2) \geq 0 \implies \underbrace{a(x - r_1)(x - r_2)}_{\text{forma fatorada de } f(x)} \geq 0 \implies f(x) \geq 0 .$$

logo, sendo  $a > 0$ , ou  $x$  é a raiz  $r_2$  de  $f(x)$  ou o sinal de  $f(x)$  é o mesmo sinal de  $a$ , para todo  $x > r_2$ .

ii) se  $a < 0$ , temos:

$$a < 0 \quad \text{e} \quad (x - r_1)(x - r_2) \geq 0 \implies \underbrace{a(x - r_1)(x - r_2)}_{\text{forma fatorada de } f(x)} \leq 0 \implies f(x) \leq 0 .$$

Logo, sendo  $a < 0$ , ou  $x$  é a raiz  $r_2$  de  $f(x)$  ou o sinal de  $f(x)$  é o mesmo sinal de



$a$ , para todo  $x > r_2$ .

**Conclusão 2:** para  $x \geq r_2$ , ou  $x$  é a raiz  $r_2$  de  $f(x)$  ou o sinal de  $f(x)$  é o mesmo sinal de  $a$ , para todo  $x > r_2$ .

**Conclusão Geral:** com base nas conclusões 1 e 2, para  $x$  não situado entre os zeros  $r_1$  e  $r_2$  da função quadrática  $f(x) = ax^2 + bx + c$ , ou  $x$  é uma das raízes de  $f(x)$  ou  $f(x)$  tem o mesmo sinal de  $a$ .

**Teorema 4.2** *Se a função polinomial do 2º grau  $f(x) = ax^2 + bx + c$ , possui uma única raiz real  $r$ , chamada raiz dupla, então, ou  $x$  é igual a  $r$  ou  $f(x)$  tem o mesmo sinal de  $a$ , para todo  $x \neq r$ .*

**Demonstração:**

Como a função polinomial do 2º grau  $f(x) = ax^2 + bx + c$ , possui uma única raiz real  $r$ , sua forma fatorada dada por:

$$f(x) = a(x - r_1)(x - r_2)$$

passa a ser escrita da seguinte forma:

$$\begin{aligned} f(x) &= a(x - r_1)(x - r_2) \\ f(x) &= a(x - r)(x - r) \\ f(x) &= a(x - r)^2, \quad \text{pois: } r_1 = r_2 = r. \end{aligned} \tag{4.13}$$

No entanto, para todo  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$(x - r)^2 \geq 0. \tag{4.14}$$

Multiplicando a desigualdade (4.14) por  $a \in \mathbb{R}$ , com  $a \neq 0$ , tem-se duas situações:  
*i)* se  $a > 0$ :

$$a > 0 \quad \text{e} \quad (x - r)^2 \geq 0 \implies \underbrace{a(x - r)^2}_{(4.13)} \geq 0 \implies f(x) \geq 0.$$

Logo, sendo  $a > 0$ , ou  $x$  é a raiz  $r$  de  $f(x)$  ou o sinal de  $f(x)$  é igual ao sinal de  $a$ , para todo  $x \neq r$ .

*ii)* se  $a < 0$ :

$$a < 0 \quad \text{e} \quad (x - r)^2 \geq 0 \implies \underbrace{a(x - r)^2}_{(4.13)} \leq 0 \implies f(x) \leq 0.$$

Portanto, sendo  $a < 0$ , ou  $x$  é a raiz  $r$  de  $f(x)$  ou o sinal de  $f(x)$  é igual ao sinal de  $a$ , para todo  $x \neq r$ .

**Conclusão:** Se a função polinomial do 2º grau  $f(x) = ax^2 + bx + c$ , possui uma única raiz real  $r$ , então, ou  $x$  é igual a  $r$  ou  $f(x)$  tem o mesmo sinal de  $a$ , para todo  $x \neq r$ .

**Teorema 4.3** *Se a função polinomial do 2º grau  $f(x) = ax^2 + bx + c$ , não possui raízes reais, então  $f(x)$  tem o mesmo sinal de  $a$ , para todo  $x \in \mathbb{R}$ .*

**Demonstração:**

Seja a função polinomial do 2º grau  $f(x) = ax^2 + bx + c$ , que não possui raízes reais. Então,  $f(x)$  não terá forma fatorada em  $\mathbb{R}$  e  $\Delta < 0$ .

Neste caso, para realizar o estudo analítico do sinal da função quadrática, utiliza-se a sua forma canônica, dada por:

$$f(x) = a(x - m)^2 + k \quad (4.15)$$

onde:  $m = -\frac{b}{2a}$  e  $k = \underbrace{-\frac{\Delta}{4a}}_{(9)}$ .

Note-se que o sinal de  $k$  é igual ao sinal de  $a$ , pois, como  $\Delta < 0$ , o numerador do quociente em (9) é positivo.

Assim, para todo  $x \in \mathbb{R}$ :

$$(x - m)^2 \geq 0. \quad (4.16)$$

Multiplicando a desigualdade (4.16) por  $a \in \mathbb{R}$ , com  $a \neq 0$ , seguem as situações:  
i) se  $a > 0$ :

$$a > 0 \quad \text{e} \quad (x - m)^2 \geq 0 \implies \underbrace{a(x - m)^2 \geq 0}_{(10)}.$$

Adicionando  $k$  aos membros da desigualdade (10), obtemos:

$$a(x - m)^2 + k \geq k. \quad (4.17)$$

Sendo o sinal de  $k$  igual ao sinal de  $a$  e como  $a > 0$ , então  $\underbrace{k > 0}_{(11)}$ .

Das desigualdades (4.17) e (11), segue:

$$\underbrace{a(x - m)^2 + k}_{(4.15)} \geq k > 0 \implies f(x) > 0.$$

ou seja, sendo  $a > 0$ ,  $f(x)$  tem o mesmo sinal de  $a$ , para todo  $x \in \mathbb{R}$ .

ii) se  $a < 0$ :

$$a < 0 \quad \text{e} \quad (x - m)^2 \geq 0 \implies \underbrace{a(x - m)^2}_{(12)} \leq 0 .$$

Adicionando  $k$  aos membros da desigualdade (12), obtemos:

$$a(x - m)^2 + k \leq k . \tag{4.18}$$

Sendo o sinal de  $k$  igual ao sinal de  $a$  e como  $a < 0$ , então  $\underbrace{k}_{(13)} < 0$  .

Das desigualdades (4.18) e (13), concluímos que:

$$\underbrace{a(x - m)^2 + k}_{(4.15)} \leq k < 0 \implies f(x) < 0 .$$

ou seja, sendo  $a < 0$ ,  $f(x)$  tem o mesmo sinal de  $a$ , para todo  $x \in \mathbb{R}$ .

**Conclusão:** Se a função quadrática  $f(x) = ax^2 + bx + c$ , não possui raízes reais, então  $f(x)$  tem o mesmo sinal de  $a$ , para todo  $x \in \mathbb{R}$ .

## 4.5 Gráfico da função quadrática

Nos livros de matemática do Ensino Médio, o gráfico da função polinomial do 2º grau é exposto ao aluno como sendo uma curva denominada **parábola**. Geralmente, esta afirmação é feita ao aluno sem que seja apresentada:

- ✓ a definição de parábola (o que é uma parábola) e;
- ✓ a demonstração de que o gráfico da função polinomial do 2º grau é, de fato, uma parábola;

Portanto, a proposta do trabalho neste capítulo será apresentar a definição de parábola, juntamente com a equação que a representa, e em seguida provar que o gráfico de uma função quadrática é a parábola.

**Definição 4.1 (Parábola)** *Dados uma reta  $d$  e um ponto  $F$ , não pertencente à reta  $d$ , chamamos de **parábola** o conjunto dos pontos do plano equidistantes do ponto  $F$  e da reta  $d$ .*

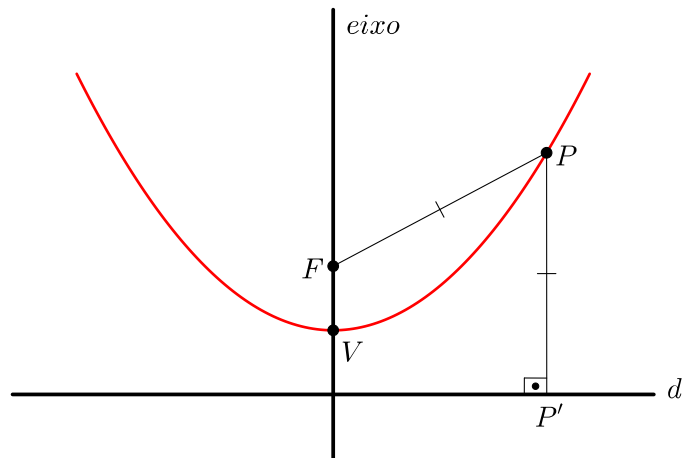


Figura 4.1: parábola de foco  $F$  e diretriz  $d$

Na figura 4.1, a abertura da parábola é chamada de concavidade e de acordo com a definição 4.1, o ponto  $P$ , pertence à parábola se, e somente se,

$$d(P, F) = d(P, P') .$$

Observando a figura 4.1, em uma parábola tem-se os seguintes elementos:

**Foco:** é o ponto  $F$ ;

**Diretriz:** é a reta  $d$ ;

**Eixo:** é a reta que passa pelo foco  $F$  e é perpendicular à diretriz  $d$ ;

**Vértice:** é o ponto  $V$  de interseção da parábola com o seu eixo.

Antes de determinar a equação da parábola, ressalta-se que uma parábola qualquer, será o gráfico de alguma função se, e somente se, seu eixo é paralelo ao eixo- $y$ . Note-se que, para este caso, a parábola terá concavidade para cima ou para baixo.

O professor poderia aproveitar a condição acima e mostrar aos alunos as diversas maneiras que a parábola pode ser disposta no plano, ou seja, que não existem apenas parábolas com a concavidade para cima ou para baixo. Pois, na maioria dos livros didáticos do ensino médio, não são apresentadas parábolas em que o seu eixo não seja paralelo ao eixo- $y$ .

Será determinada a equação de uma parábola com eixo paralelo ao eixo- $y$ , concavidade para cima e vértice  $V$  de coordenadas  $(x_V, y_V)$ .

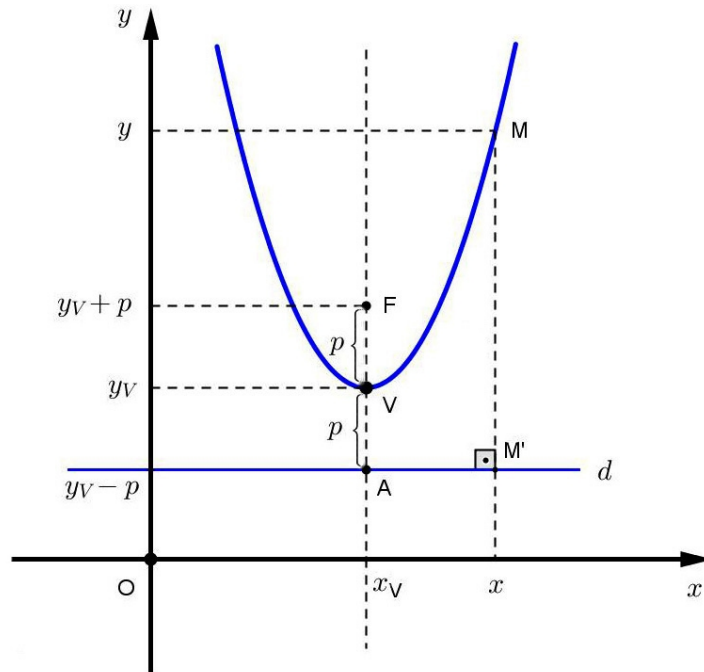


Figura 4.2: parábola com concavidade para cima e vértice  $V(x_V, y_V)$

Seja  $p \in \mathbb{R}$ , com  $p > 0$ , a distância do vértice  $V$  ao foco  $F$  da parábola e  $M(x, y)$  um ponto qualquer da parábola.

Tomando o ponto  $M'$  da diretriz, tal que  $M'$  seja a interseção da reta perpendicular à diretriz traçada pelo ponto  $M$ .

Observando a figura 4.2, concluí-se que as coordenadas do foco  $F$  e do ponto  $M'$  são,

$$F(x_V, y_V + p) \quad \text{e} \quad M'(x, y_V - p) .$$

Portanto, como  $M(x, y)$  é ponto da parábola, então:

$$d(M, F) = d(M, M') . \tag{4.19}$$

Usando a fórmula da distância entre dois pontos, apresentada na seção 3.4 do capítulo 3, na igualdade (4.19), temos:

$$\sqrt{(x - x_V)^2 + [y - (y_V + p)]^2} = \sqrt{(x - x_V)^2 + [y - (y_V - p)]^2} . \tag{4.20}$$

Elevando ao quadrado, os dois membros da equação (4.20):

$$\begin{aligned}
 (x - x_V)^2 + [y - (y_V + p)]^2 &= [y - (y_V - p)]^2 \\
 (x - x_V)^2 + y^2 - 2y(y_V + p) + (y_V + p)^2 &= y^2 - 2y(y_V - p) + (y_V p)^2 \\
 (x - x_V)^2 - 2y_V y - 2py + y_V^2 + 2py_V + p^2 &= -2y_V y + 2py + y_V^2 - 2py_V + p^2 \\
 (x - x_V)^2 &= 2py + 2py - 2py_V - 2py_V \\
 (x - x_V)^2 &= 4py - 4py_V \\
 (x - x_V)^2 &= 4p(y - y_V) . \tag{4.21}
 \end{aligned}$$

A equação (4.21) determina no plano, qualquer parábola com eixo paralelo ao eixo- $y$ , **concavidade para cima** e vértice  $V$  de coordenadas  $(x_V, y_V)$ , pois,  $x_V$ ,  $y_V$  e  $p$  são números reais, com  $p > 0$ .

De forma análoga, obtemos a equação:

$$(x - x_V)^2 = -4p(y - y_V) .$$

que determina no plano, qualquer parábola com eixo paralelo ao eixo- $y$ , **concavidade para baixo** e vértice  $V$  de coordenadas  $(x_V, y_V)$ , pois,  $x_V$ ,  $y_V$  e  $p$  são números reais, com  $p > 0$ .

**Teorema 4.4** *O gráfico de uma função quadrática é uma parábola com eixo paralelo ao eixo- $y$  e, reciprocamente, toda parábola com eixo paralelo ao eixo- $y$  é o gráfico de uma função quadrática.*

**Demonstração:**

( $\implies$ ) O gráfico de uma função quadrática é uma parábola com eixo paralelo ao eixo- $y$ .

Na seção 4.2 foi mostrado, que a função quadrática  $f(x) = ax^2 + bx + c$ , tem sua forma canônica dada por:

$$f(x) = a(x - m)^2 + k \tag{4.22}$$

onde:  $m = -\frac{b}{2a}$  e  $k = -\frac{\Delta}{4a}$ .

Considere, sem perda de generalidade,  $a > 0$ . Pois, a demonstração para  $a < 0$  é feita de forma análoga.

Como  $y = f(x)$  e isolando o termo  $(x - m)^2$  na equação (4.22), obtém-se:

$$\begin{aligned}
 f(x) &= a(x - m)^2 + k \\
 y &= a(x - m)^2 + k \\
 y - k &= a(x - m)^2 \\
 (x - m)^2 &= \frac{1}{a}(y - k) . \tag{4.23}
 \end{aligned}$$

fazendo:

$$x_V = m, \quad y_V = k \quad \text{e} \quad 4p = \frac{1}{a},$$

e substituindo na equação (4.23), tem-se:

$$(x - x_V)^2 = 4p(y - y_V). \quad (4.24)$$

A equação (4.24) é a equação da parábola com eixo paralelo ao eixo- $y$ , concavidade para cima e vértice  $V$  de coordenadas  $(x_V, y_V)$ .

Completando a demonstração, para  $a < 0$ , encontra-se a equação da parábola com eixo paralelo ao eixo- $y$ , concavidade para baixo e vértice  $V$  de coordenadas  $(x_V, y_V)$ , ou seja:

$$(x - x_V)^2 = -4p(y - y_V).$$

**Conclusão:** O gráfico de uma função quadrática é uma parábola com eixo paralelo ao eixo- $y$ .

( $\Leftarrow$ ) Toda parábola com eixo paralelo ao eixo- $y$  é o gráfico de uma função quadrática.

A equação que determina no plano, uma parábola com eixo paralelo ao eixo- $y$ , concavidade para cima e vértice  $V$  de coordenadas  $(x_V, y_V)$  é dada por

$$(x - x_V)^2 = 4p(y - y_V). \quad (4.25)$$

A demonstração é análoga, para a parábola com eixo paralelo ao eixo- $y$ , concavidade para baixo e vértice  $V$  de coordenadas  $(x_V, y_V)$ .

Desenvolvendo a equação (4.25) e isolando a variável  $y$ , obtém-se:

$$\begin{aligned} (x - x_V)^2 &= 4p(y - y_V) \\ x^2 - 2x_Vx + x_V^2 &= 4py - 4py_V \\ 4py &= x^2 - 2x_Vx + x_V^2 + 4py_V \\ y &= \frac{1}{4p}(x^2 - 2x_Vx + x_V^2 + 4py_V) \\ y &= \frac{1}{4p}x^2 - \frac{2x_V}{4p}x + \frac{x_V^2}{4p} + \frac{4py_V}{4p} \\ y &= \frac{1}{4p}x^2 - \frac{x_V}{2p}x + \frac{x_V^2}{4p} + y_V. \end{aligned} \quad (4.26)$$

Fazendo,

$$a = \frac{1}{4p}, \quad b = -\frac{x_V}{2p} \quad \text{e} \quad c = \frac{x_V^2}{4p} + y_V,$$

e substituindo na equação (4.26), temos:

$$y = ax^2 + bx + c .$$

Logo, a parábola de equação (4.25) é o gráfico da função quadrática  $f(x) = ax^2 + bx + c$ .

Completando a demonstração com a equação que determina no plano, uma parábola com eixo paralelo ao eixo- $y$ , concavidade para baixo e vértice  $V$  de coordenadas  $(x_V, y_V)$ , ou seja:

$$(x - x_V)^2 = -4p(y - y_V) .$$

também encontra-se  $y = ax^2 + bx + c$ .

**Conclusão:** Toda parábola com eixo paralelo ao eixo- $y$  é o gráfico de uma função quadrática.

## 4.6 Coordenadas do vértice do gráfico da função quadrática.

Antes de determinar as coordenadas do vértice da parábola que representa graficamente a função polinomial do 2º grau  $f(x) = ax^2 + bx + c$ . Segue agora uma importante propriedade da parábola, que será utilizada na obtenção das coordenadas do vértice da mesma.

**Propriedade 4.1 (Eixo de Simetria)** *Em uma parábola, o seu eixo divide a mesma em partes simétricas, ou seja, é um eixo de simetria.*

**Demonstração:**

Dada uma parábola de foco  $F$  e diretriz  $d$ , considere apenas a “parte” da parábola que esta contida em um dos semi-planos determinados pelo seu eixo.

Sejam  $P$  um ponto da parábola,  $P'$  o seu simétrico em relação ao eixo e a reta  $r$ , perpendicular à diretriz  $d$  passando por  $P'$ .

Na figura 4.3, nota-se que os triângulos  $PCF$  e  $P'CF$  são congruentes, pelo caso  $LAL$  (lado-ângulo-lado), pois:

$$(L) \overline{PC} \cong \overline{P'C} \quad (P \text{ e } P' \text{ são simétricos em relação ao eixo da parábola})$$

$$(A) \widehat{PCF} \cong \widehat{P'CF} \quad (\text{ambos medem } 90^\circ)$$

$$(L) \overline{CF} \cong \overline{CF} \quad (\text{lado comum})$$



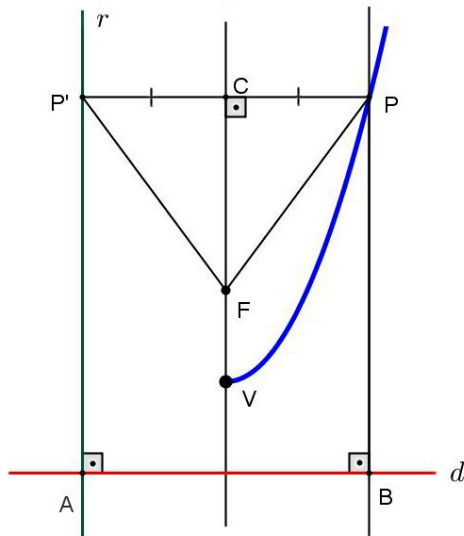


Figura 4.3: eixo de simetria da parábola

Como os triângulos  $PCF$  e  $P'CF$  são congruentes. Temos que seus lados correspondentes tem a mesma medida. Ou seja:

$$\overline{PF} = \overline{P'F} . \quad (4.27)$$

Pela construção da figura 4.3, concluí-se que o quadrilátero  $ABPP'$  é um retângulo, pois, todos os seus ângulos internos são ângulos retos. Portanto, seus lados opostos têm a mesma medida. Logo:

$$\overline{PB} = \overline{P'A} . \quad (4.28)$$

Sendo  $P$  ponto da parábola, então:

$$\overline{PF} = \overline{PB} . \quad (4.29)$$

Substituindo as igualdades (4.27) e (4.28) na igualdade (4.29), concluí-se que:

$$\overline{P'F} = \overline{P'A} . \quad (4.30)$$

Portanto, da igualdade (4.30), segue que o ponto  $P'$ , simétrico do ponto  $P$  em relação ao eixo da parábola, também é um ponto da parábola. Logo, o eixo da parábola é, na realidade o eixo de simetria da parábola.

Com este resultado, para construir a outra parte da parábola da figura 4.3, basta tomar todos os pontos simétricos aos pontos da curva, na figura 4.3, em relação ao eixo da parábola.

**Teorema 4.5** As coordenadas do vértice  $V(x_V, y_V)$  da parábola que representa graficamente a função polinomial do 2º grau  $f(x) = ax^2 + bx + c$ , são:

$$x_V = -\frac{b}{2a} \quad e \quad y_V = -\frac{\Delta}{4a}$$

onde:  $\Delta = b^2 - 4ac$ .

**Demonstração:**

Considere, no gráfico da função  $f(x) = ax^2 + bx + c$  na figura 4.4, um ponto  $P$  da parábola e seu simétrico  $Q$ , em relação ao eixo da parábola.

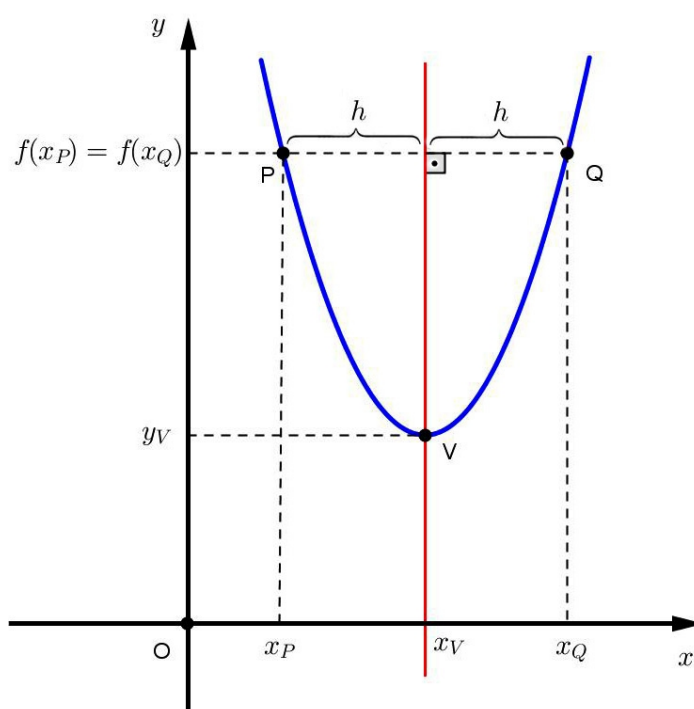


Figura 4.4: coordenadas do vértice da parábola

Sendo o eixo da parábola, um eixo de simetria conforme propriedade 4.1, então o ponto  $Q$ , simétrico do ponto  $P$  em relação ao eixo da parábola, também é um ponto da parábola.

Logo, estando os pontos  $P$  e  $Q$  na mesma reta horizontal (ver figura 4.4), segue que:

$$f(x_P) = f(x_Q) \tag{4.31}$$

Devido aos pontos  $P$  e  $Q$  serem simétricos em relação ao eixo da parábola, temos que estes pontos são equidistantes do eixo de simetria. Portanto, considerando que eles estejam a uma distância  $h > 0$  do eixo da parábola, tem-se que (ver figura 4.4):

$$\underbrace{x_P = x_V - h}_{(14)} \quad \text{e} \quad \underbrace{x_Q = x_V + h}_{(15)} .$$

Substituindo as igualdades (14) e (15) na igualdade (4.31), obtém-se:

$$f(x_V - h) = f(x_V + h) . \quad (4.32)$$

Sendo  $f(x) = ax^2 + bx + c$ , da igualdade (4.32), segue que:

$$\begin{aligned} a(x_V - h)^2 + b(x_V - h) + c &= a(x_V + h)^2 + b(x_V + h) + c \\ a(x_V^2 - 2hx_V + h^2) + bx_V - bh &= a(x_V^2 + 2hx_V + h^2) + bx_V + bh \\ ax_V^2 - 2ahx_V + ah^2 - bh &= ax_V^2 + 2ahx_V + ah^2 + bh \\ -2ahx_V - 2ahx_V &= bh + bh \\ -4ahx_V &= 2bh \\ x_V &= \frac{2bh}{-4ah}, \text{ como } h > 0, \text{ temos:} \\ x_V &= -\frac{b}{2a} . \end{aligned}$$

Logo,  $x_V = -\frac{b}{2a}$  é a abscissa do vértice da parábola.

Para obter a ordenada  $y_V$  do vértice da parábola, calcula-se  $f(x_V)$  na função  $f(x) = ax^2 + bx + c$ , ou seja,  $f\left(-\frac{b}{2a}\right)$ . Então:

$$\begin{aligned} y_V = f\left(-\frac{b}{2a}\right) &= a\left(-\frac{b}{2a}\right) + b\left(-\frac{b}{2a}\right) + c \\ y_V &= a \cdot \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{2a} + c \\ y_V &= \frac{b^2}{4a} - \frac{b^2}{2a} + c \\ y_V &= \frac{b^2 - 2b^2 + 4ac}{4a} \\ y_V &= -\frac{(b^2 - 4ac)}{4a}, \text{ sendo: } \Delta = b^2 - 4ac, \text{ temos:} \\ y_V &= -\frac{\Delta}{4a} . \end{aligned}$$

Portanto, as coordenadas do vértice  $V(x_V, y_V)$  da parábola que representa graficamente a função polinomial do 2º grau  $f(x) = ax^2 + bx + c$  são:

$$x_V = -\frac{b}{2a} \quad \text{e} \quad y_V = -\frac{\Delta}{4a}$$

onde:  $\Delta = b^2 - 4ac$ .

Outra maneira de determinar as coordenadas do vértice  $V(x_V, y_V)$  da parábola associada à função quadrática  $f(x) = ax^2 + bx + c$ , é usando o seguinte teorema.

**Teorema 4.6** *Se  $P(x_P, y_P)$  e  $Q(x_Q, y_Q)$  são dois pontos de uma parábola, simétricos em relação ao eixo de simetria. Então, a abscissa  $x_V$  do vértice da parábola é a média aritmética das abscissas dos pontos  $P$  e  $Q$ .*

Ou seja:

$$x_V = \frac{x_P + x_Q}{2}$$

### Demonstração:

Sejam  $P(x_P, y_P)$  e  $Q(x_Q, y_Q)$  pontos da parábola, simétricos em relação ao eixo da parábola. Então:

$$\underbrace{x_P = x_V - h}_{(14)} \quad \text{e} \quad \underbrace{x_Q = x_V + h}_{(15)} .$$

(ver demonstração do teorema 4.5)

Adicionando-se as igualdades (14) e (15), membro a membro, obtém-se:

$$\begin{aligned} x_P + x_Q &= x_V - h + x_V + h \\ x_P + x_Q &= 2x_V \\ x_V &= \frac{x_P + x_Q}{2} . \end{aligned}$$

Ou seja, para determinar as coordenadas do vértice  $V(x_V, y_V)$  da parábola associada à função quadrática  $f(x) = ax^2 + bx + c$ . Basta tomar dois pontos quaisquer da parábola que sejam simétricos em relação ao eixo de simetria.

Ora, os zeros  $r_1$  e  $r_2$  da função quadrática  $f(x) = ax^2 + bx + c$ , atendem a hipótese do teorema 4.6, pois:

$$\underbrace{f(r_1) = f(r_2) = 0} .$$

(ver demonstração do teorema 4.5)

logo, do teorema 4.6, temos:

$$x_V = \frac{r_1 + r_2}{2} . \tag{4.33}$$

Mostrou-se na seção 2.5 do capítulo 2, que:

$$r_1 + r_2 = -\frac{b}{a} . \quad (4.34)$$

substituindo a igualdade (4.34) na igualdade (4.33), têm-se:

$$x_V = \frac{\left(-\frac{b}{a}\right)}{2} \implies x_V = -\frac{b}{2a} ,$$

e fazendo  $x = -\frac{b}{2a}$  em  $f(x) = ax^2 + bx + c$ , obtém-se a ordenada  $y_V$  do vértice igual a:

$$y_V = -\frac{\Delta}{4a}$$

em que  $\Delta = b^2 - 4ac$  .

Portanto, as coordenadas do vértice  $V(x_V, y_V)$  da parábola relacionada à função quadrática  $f(x) = ax^2 + bx + c$  são:

$$x_V = -\frac{b}{2a} \quad e \quad y_V = -\frac{\Delta}{4a}$$

sendo  $\Delta = b^2 - 4ac$  .

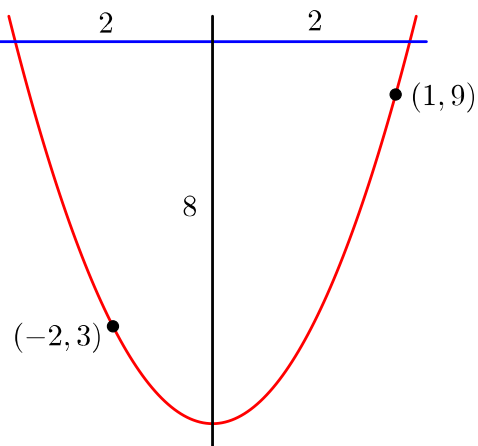
Com base nos resultados acima, percebe-se que as coordenadas do vértice podem ser obtidas através da forma canônica da função quadrática:

$$f(x) = a(x - m)^2 + k .$$

visto que, ela fornece de imediato, estas coordenadas, pois:

$$m = -\frac{b}{2a} \quad e \quad k = -\frac{\Delta}{4a} .$$

**Exemplo 4.2** Encontre a função quadrática cujo gráfico é dado na figura abaixo.



**Resolução:**

Na figura 4.5 abaixo, nota-se que a reta  $r$  é o eixo de simetria da parábola, pois, os pontos  $A$  e  $B$  são equidistantes de  $r$ . Logo, o ponto  $V$  é o vértice da parábola.

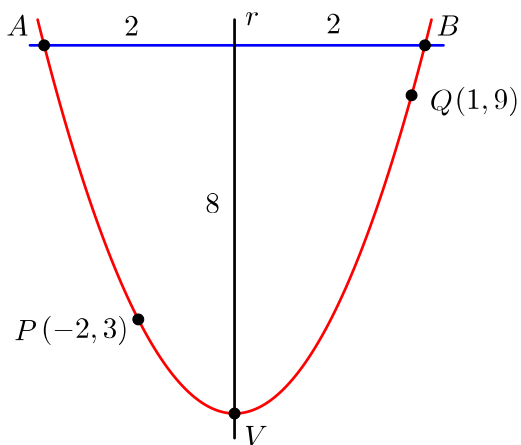


Figura 4.5: parábola do exemplo 4.2

Como a forma canônica da função quadrática  $f(x) = ax^2 + bx + c$  é dada por:

$$y = a(x - m)^2 + k , \quad (4.35)$$

então, as coordenadas de  $V$  são:

$$V(m, k) .$$

Portanto, da figura 4.5, concluí-se que o ponto  $B$  tem coordenadas:

$$B(m + 2, k + 8) .$$

Substituindo as coordenadas de  $B$  na equação (4.35), obtém-se:

$$\begin{aligned} k + 8 &= a[(m + 2) - m]^2 + k \\ 8 &= a(m + 2 - m)^2 \\ 8 &= a \cdot 2^2 \\ 4a &= 8 \\ a &= 2 . \end{aligned}$$

Logo,

$$y = 2x^2 + bx + c \quad (4.36)$$

Para determinar os valores de  $b$  e  $c$ , utilizam-se os pontos da parábola  $P(-2, 3)$  e  $Q(1, 9)$ . Ou seja:

✓ quando  $x = -2$  e  $y = 3$ , tem-se na equação (4.36):

$$\begin{aligned} 3 &= 2 \cdot (-2)^2 + b \cdot (-2) + c \\ 3 &= 8 - 2b + c \\ c &= 2b - 5 . \end{aligned} \quad (4.37)$$

✓ quando  $x = 1$  e  $y = 9$ , tem-se na equação (4.36):

$$\begin{aligned} 9 &= 2 \cdot 1^2 + b \cdot 1 + c \\ 9 &= 2 + b + c \\ b + c &= 7 . \end{aligned} \quad (4.38)$$

Substituindo a igualdade (4.37) na igualdade (4.38), obtém-se:

$$\begin{aligned} b + (2b - 5) &= 7 \\ 3b &= 12 \\ b &= 4 . \end{aligned}$$

Substituindo o valor de  $b$  na igualdade (4.37), segue que:

$$\begin{aligned}c &= 2 \cdot 4 - 5 \\c &= 3 .\end{aligned}$$

Portanto, a função quadrática cujo gráfico é a figura 4.5 é:

$$y = 2x^2 + 4x + 3 .$$

## 4.7 Máximos e Mínimos da função quadrática

Observando os gráficos da função polinomial do 2º grau  $f(x) = ax^2 + bx + c$ , na figura 4.5, nota-se que o vértice da parábola, é o ponto que esta "acima" ou "abaixo" dos demais pontos do gráfico. E isso justifica-se facilmente, pois, o vértice é o ponto da parábola que esta mais próximo da diretriz.

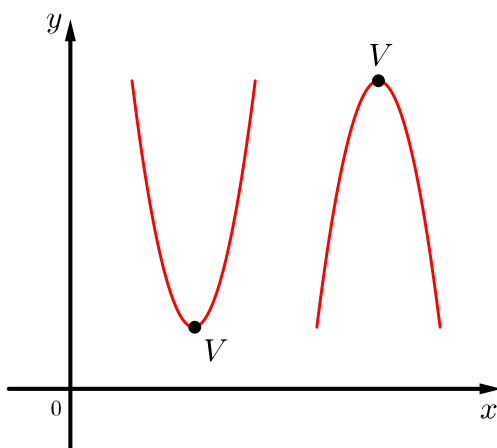


Figura 4.6: o vértice da parábola é ponto de máximo ou de mínimo

Portanto, graficamente, diz-se que o vértice da parábola é ponto de máximo, quando ele esta "acima" dos demais pontos do gráfico e ponto de mínimo, quando ele esta "abaixo" dos demais pontos do gráfico. Consequentemente, como a função polinomial do 2º grau admite ponto de máximo e ponto de mínimo, ela possui valor máximo e valor mínimo.



O objetivo agora será mostrar, analiticamente, que a função polinomial do 2º grau:

- ✓ admite valor máximo ou valor mínimo e determinar esses valores e;
- ✓ que o ponto em que eles ocorrem é o vértice da parábola;

Inicialmente, seguem as definições de máximos e mínimos de uma função  $f$ .

**Definição 4.2** *Sejam  $f$  uma função e  $p \in D(f)$ . Diz-se que  $f(p)$  é o **valor mínimo** de  $f$  ou que  $p$  é um **ponto de mínimo** de  $f$ , se  $f(x) \geq f(p)$ , para todo  $x \in D(f)$ .*

**Definição 4.3** *Sejam  $f$  uma função e  $p \in D(f)$ . Diz-se que  $f(p)$  é o **valor máximo** de  $f$  ou que  $p$  é um **ponto de máximo** de  $f$ , se  $f(x) \leq f(p)$ , para todo  $x \in D(f)$ .*

**Teorema 4.7** *Se  $a > 0$ , a função polinomial do 2º grau  $f(x) = ax^2 + bx + c$ , possui **valor mínimo**  $m$  dado por:*

$$m = -\frac{\Delta}{4a}$$

e seu **ponto de mínimo** é o vértice da parábola.

**Demonstração:**

Dada a função polinomial do 2º grau  $f(x) = ax^2 + bx + c$ , com  $a > 0$ . Mostrou-se na seção 4.2 do capítulo 4, que a sua forma canônica é dada por:

$$f(x) = a(x - m)^2 + k \tag{4.39}$$

onde  $m = -\frac{b}{2a}$  e  $k = -\frac{\Delta}{4a}$ .

Sabe-se que, para todo  $x \in \mathbb{R}$ :

$$(x - m)^2 \geq 0 . \tag{4.40}$$

Como  $a > 0$ , multiplicando a inequação (4.40) por  $a$ , obtém-se:

$$a(x - m)^2 \geq 0 . \tag{4.41}$$

Adicionando  $k$  aos membros da inequação (4.41), tem-se:

$$\underbrace{a(x - m)^2 + k}_{(4.39)} \geq k \implies f(x) \geq k . \tag{4.42}$$

Substituindo o valor de  $k$ , na desigualdade (4.42), segue que:

$$f(x) \geq -\frac{\Delta}{4a}, \text{ para todo } x \in \mathbb{R} .$$

Portanto, da definição 4.2, conclui-se que a função  $f(x) = ax^2 + bx + c$  possui **valor mínimo**  $m = -\frac{\Delta}{4a}$ , para  $a > 0$ .

Como  $f(x) \geq -\frac{\Delta}{4a}$ , significa que existe  $p \in \mathbb{R}$ , tal que:

$$f(p) = -\frac{\Delta}{4a} . \quad (4.43)$$

Fazendo  $x = p$  na igualdade (4.39), obtém-se:

$$f(p) = a(p - m)^2 + k . \quad (4.44)$$

Das igualdades (4.43) e (4.44), segue que:

$$a(p - m)^2 + k = -\frac{\Delta}{4a} . \quad (4.45)$$

mas,  $m = -\frac{b}{2a}$  e  $k = -\frac{\Delta}{4a}$ , substituindo na equação (4.45), obtém-se:

$$\begin{aligned} a \left( p + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a} &= -\frac{\Delta}{4a} \\ a \left( p + \frac{b}{2a} \right)^2 &= 0, \text{ como } a \neq 0, \text{ temos:} \\ \left( p + \frac{b}{2a} \right)^2 &= 0 \\ p + \frac{b}{2a} &= 0 \\ p &= -\frac{b}{2a} , \end{aligned}$$

ou seja,  $f \left( -\frac{b}{2a} \right) = -\frac{\Delta}{4a}$  .

Portanto, o **valor mínimo** ocorre no ponto de coordenadas  $\left( -\frac{b}{2a}; -\frac{\Delta}{4a} \right)$ , ou seja, o **vértice da parábola** é o **ponto de mínimo** da função quadrática  $f(x) = ax^2 + bx + c$ .

**Teorema 4.8** Se  $a < 0$ , a função polinomial do 2º grau  $f(x) = ax^2 + bx + c$ , possui **valor máximo**  $m$  dado por:

$$M = -\frac{\Delta}{4a}$$

e seu **ponto de máximo** é o vértice da parábola.

### Demonstração

Sendo  $f(x) = ax^2 + bx + c$ , com  $a < 0$ , uma função polinomial do 2º grau, sabe-se que sua forma canônica é dada por:

$$f(x) = a(x - m)^2 + k . \quad (4.46)$$

onde  $m = -\frac{b}{2a}$  e  $k = -\frac{\Delta}{4a}$  .

Para todo  $x \in \mathbb{R}$ :

$$(x - m)^2 \geq 0 . \quad (4.47)$$

Como  $a < 0$ , multiplicando a inequação (4.47) por  $a$ , obtém-se:

$$a(x - m)^2 \leq 0 . \quad (4.48)$$

Adicionando  $k$  aos membros da inequação (4.48), tem-se:

$$\underbrace{a(x - m)^2 + k}_{(4.46)} \leq k \implies f(x) \leq k . \quad (4.49)$$

Substituindo o valor de  $k$ , na desigualdade (4.49), segue que:

$$f(x) \leq -\frac{\Delta}{4a}, \text{ para todo } x \in \mathbb{R} .$$

Portanto, da definição 4.3, concluí-se que a função  $f(x) = ax^2 + bx + c$  possui **valor máximo**  $M = -\frac{\Delta}{4a}$ , para  $a < 0$ .

Como  $f(x) \leq -\frac{\Delta}{4a}$ , significa que existe  $p \in \mathbb{R}$ , tal que:

$$f(p) = -\frac{\Delta}{4a} . \quad (4.50)$$

Fazendo  $x = p$  na igualdade (4.46), segue:

$$f(p) = a(p - m)^2 + k . \quad (4.51)$$

Das igualdades (4.50) e (4.51), vem:

$$a(p - m)^2 + k = -\frac{\Delta}{4a} . \quad (4.52)$$

mas,  $m = -\frac{b}{2a}$  e  $k = -\frac{\Delta}{4a}$ , substituindo na equação (4.52), obtém-se:

$$\begin{aligned} a \left( p + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a} &= -\frac{\Delta}{4a} \\ a \left( p + \frac{b}{2a} \right)^2 &= 0, \text{ como } a \neq 0, \text{ temos:} \\ \left( p + \frac{b}{2a} \right)^2 &= 0 \\ p + \frac{b}{2a} &= 0 \\ p &= -\frac{b}{2a} , \end{aligned}$$

ou seja,  $f\left(-\frac{b}{2a}\right) = -\frac{\Delta}{4a}$ .

Portanto, o **valor máximo** ocorre no ponto de coordenadas  $\left(-\frac{b}{2a}; -\frac{\Delta}{4a}\right)$ , ou seja, o **vértice da parábola** é o **ponto de máximo** da função quadrática  $f(x) = ax^2 + bx + c$ .

Dos teoremas 4.7 e 4.8, nota-se que a forma canônica da função quadrática:

$$f(x) = a(x - m)^2 + k ,$$

nos fornece, claramente, o valor máximo ou mínimo dessa função, pois:

$$k = -\frac{\Delta}{4a} .$$

**Exemplo 4.3 (ENEM 2009)** *Um posto de combustível vende 10.000 litros de álcool por dia a 1,50 reais cada litro. Seu proprietário percebeu que, para cada centavo de desconto que concedia por litro, eram vendidos 100 litros a mais por dia. Por exemplo, no dia em que o preço do álcool foi 1,48 reais, foram vendidos 10.200 litros. Considerando  $x$  o valor, em centavos, do desconto dado no preço de cada litro, e  $V$  o valor, em reais, arrecadado por dia com a venda do álcool. Determine o desconto a ser dado pelo proprietário para que ele tenha arrecadação máxima e o valor dessa arrecadação máxima.*

**Resolução:**

Sendo  $x$  o valor, em centavos, do desconto dado no preço de cada litro, então, vamos acumular um desconto total de  $0,01x$ .

Logo, o preço de cada litro de álcool é calculado subtraindo o preço inicial de seu desconto, ou seja, é dado por:

$$(1,5 - 0,01x) \text{ reais.} \quad (4.53)$$

A quantidade de álcool vendida por dia, para cada centavo de desconto que foi concedido por litro, é:

$$(10.000 + 100x) \text{ litros.} \quad (4.54)$$

Multiplicando as equações (4.53) e (4.54), tem-se que o valor arrecadado é:

$$\begin{aligned} V &= (1,50 - 0,01x) \cdot (10.000 + 100x) \\ V &= 15.000 + 150x - 100x - x^2 \\ V &= 15.000 + 50x - x^2. \end{aligned} \quad (4.55)$$

Como a igualdade (4.55) é uma função quadrática e o coeficiente de  $x^2$  é  $-1 < 0$ , então pelo teorema 4.8, a função  $V = 15.000 + 50x - x^2$  admite valor máximo dado por:

$$\begin{aligned} V &= -\frac{\Delta}{4a} \\ V &= -\frac{[50^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 15.000]}{4 \cdot (-1)} \\ V &= -\frac{62.500}{(-4)} \\ V &= 15.625. \end{aligned} \quad (4.56)$$

e ele ocorre em:

$$\begin{aligned} x &= -\frac{b}{2a} \\ x &= -\frac{50}{2 \cdot (-1)} \\ x &= 25. \end{aligned} \quad (4.57)$$

Portanto, das igualdades (4.56) e (4.57), concluí-se que o desconto a ser dado pelo proprietário para que ele tenha arrecadação máxima é de 25 centavos por litro e o valor da arrecadação máxima é de 15.625 reais.

# Capítulo 5

## Aplicações na Cinemática

### 5.1 Definições Iniciais

Neste capítulo, serão consideradas funções  $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ , uma vez que, a variável independente de tais funções será o tempo  $t$ .

Antes de mostrar as aplicações das funções polinomiais do 1º e 2º graus na cinemática, serão apresentadas algumas definições da física, para melhor entendimento dos movimentos que serão estudados neste capítulo e que vão facilitar na associação das características de tais movimentos com as propriedades das funções.

**Definição 5.1** *Define-se **velocidade escalar média** de um móvel, a grandeza  $v_m$ , como sendo a razão entre a variação da posição ( $\Delta s$ ) e a respectiva variação de tempo ( $\Delta t$ ). Ou seja:*

$$v_m = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1}$$

*Nota-se que, por definição, a velocidade escalar média é a taxa de variação média da posição em relação aos instantes  $t_1$  e  $t_2$ .*

**Definição 5.2** *Denomina-se **velocidade instantânea** a velocidade com que um móvel percorre a trajetória num determinado instante  $t$ . Ou seja, significa determinar a velocidade escalar média para um intervalo de tempo muito pequeno.*

**Definição 5.3** *Define-se **aceleração escalar média** de um móvel, a grandeza  $a_m$ , como sendo a razão entre a variação de velocidade ( $\Delta v$ ) e a respectiva variação de tempo ( $\Delta t$ ). Ou seja:*

$$a_m = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1}$$

*Nota-se que, por definição, a aceleração escalar média é a taxa de variação média da velocidade em relação aos instantes  $t_1$  e  $t_2$ .*

**Definição 5.4** Denomina-se **aceleração instantânea** a aceleração do móvel em determinado instante  $t$ . Ou seja, significa determinar a aceleração escalar média para um intervalo de tempo muito pequeno.

## 5.2 Movimento Retilíneo Uniforme

### 5.2.1 Definição

Chama-se **Movimento Retilíneo Uniforme** (MRU), qualquer movimento realizado por um móvel, em uma trajetória retilínea, que percorre distâncias iguais em intervalos de tempo iguais. Conseqüentemente, no movimento retilíneo uniforme a velocidade escalar instantânea  $v$  é constante, não nula e igual à velocidade escalar média  $v_m$  em qualquer intervalo de tempo.

Naturalmente, se no MRU a velocidade escalar instantânea  $v$  é constante e diferente de zero, então a aceleração escalar  $a$  é constante e igual a zero.

### 5.2.2 Funções Horárias do MRU

*i)* **Aceleração em função do tempo** [ $a = a(t)$ ]

Como no MRU, a aceleração  $a$  é constante e igual a zero. Então, sua função horária é dada por:

$$a(t) = 0$$

ou seja, uma função constante e nula.

*ii)* **Velocidade em função do tempo** [ $v = v(t)$ ]

Sendo no MRU, a velocidade escalar instantânea  $v$  constante, não nula e igual à velocidade escalar média  $v_m$  em qualquer intervalo de tempo. Então, sua função horária é dada por:

$$v(t) = v_m = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \text{constante} \neq 0$$

ou seja, uma função constante e não-nula.

*iii)* **Posição em função do tempo** [ $s = s(t)$ ]

Como no MRU, um móvel percorre distâncias iguais em intervalos de tempo iguais. Concluí-se da seção 3.2 do capítulo 3, que a definição de movimento retilíneo uniforme caracteriza uma função polinomial do 1º grau, e sendo  $s$  a posição e  $t$  o tempo, tem-se:

$$s(t) = at + b \tag{5.1}$$

onde:

- ✓  $b = s(0)$  é o valor inicial de  $s$  e;
- ✓  $a$  é a taxa de variação de  $s$

Para completar a função horária da posição, deve-se determinar as constantes  $a$  e  $b$  na equação (5.1), ou seja, determinar um significado físico para elas.

Sendo  $s_0$  a posição inicial do móvel, ou seja, a sua posição no instante  $t = 0$  e como a velocidade  $v$  no MRU, mede a variação da posição em relação à correspondente variação do tempo, ou seja, é a taxa de variação de  $s$  em relação a  $t$ . Daí, segue que:

$$\underbrace{b = s_0}_{(1)} \quad \text{e} \quad \underbrace{a = v}_{(2)}$$

Substituindo as igualdades (1) e (2) na equação (5.1), obtém-se a função horária da posição, dada por:

$$s(t) = s_0 + vt$$

em que:

- ✓  $s(t)$  é a posição do móvel no instante  $t$ ;
- ✓  $s_0$  é a posição inicial (instante  $t = 0$ );
- ✓  $v$  é a velocidade;

### 5.2.3 Gráficos das funções horárias do MRU

#### i) Aceleração em função do tempo [ $a = a(t)$ ]

Sendo a função horária da aceleração no MRU, uma função constante e nula. Então, o seu gráfico é uma reta que coincide com o eixo das abscissas (eixo- $t$ ).



Figura 5.1: gráfico da função horária da aceleração no MRU.



ii) **Velocidade em função do tempo** [ $v = v(t)$ ]

Como a função horária da velocidade no MRU, é uma função constante e não-nula. Então, o seu gráfico corresponde a uma reta paralela ao eixo das abscissas (eixo- $t$ ).

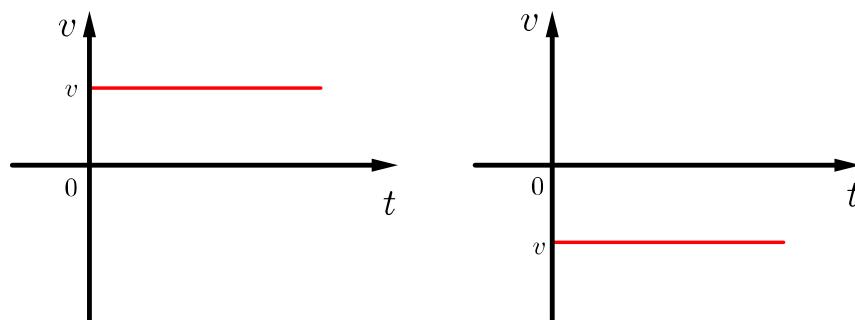


Figura 5.2: gráficos da função horária da velocidade no MRU.

**Propriedade 5.1** *No MRU, a área compreendida entre o segmento de reta que representa o gráfico de  $v = v(t)$  e o eixo horizontal entre os instantes  $t_1$  e  $t_2$  é numericamente igual ao deslocamento escalar, no intervalo de tempo considerado.*

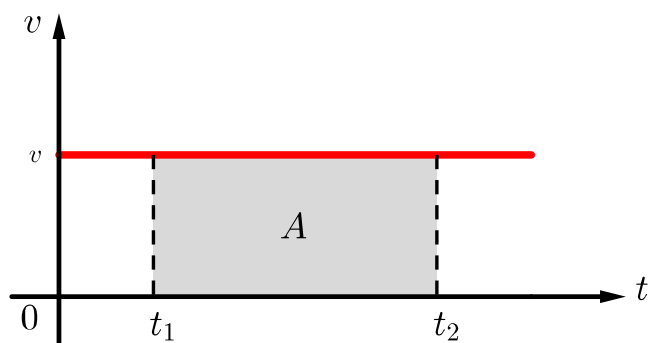


Figura 5.3: a área  $A$  é numericamente igual ao deslocamento escalar.

### Demonstração:

Na figura 5.3, determinando a área definida entre a curva e o intervalo de extremos  $t_1$  e  $t_2$ , obtém-se:

$$A = v \cdot (t_2 - t_1) . \quad (5.2)$$

Pois, a região é um retângulo.

Mas, sabe-se que:

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t} \implies \Delta s = v \cdot \Delta t \implies \Delta s = v \cdot (t_2 - t_1) . \quad (5.3)$$

Das equações (5.2) e (5.3), concluí-se que:

$$A \stackrel{N}{=} \Delta s .$$

**Propriedade 5.2** *Em qualquer movimento a área sob a curva, no gráfico da velocidade em função do tempo, entre os instantes  $t_1$  e  $t_2$ , é numericamente igual à variação de posição ( $\Delta s$ ) no correspondente intervalo de tempo.*

### Demonstração:

Considere abaixo, uma curva qualquer que representa o gráfico  $v \times t$ , entre os instantes  $t_1$  e  $t_2$ .

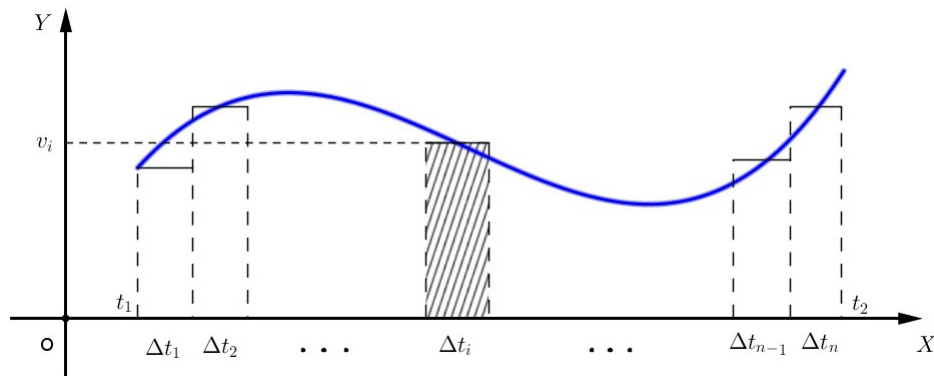


Figura 5.4: curva que representa o gráfico  $v \times t$ .

Dividido o intervalo de tempo  $\Delta t = t_2 - t_1$ , em inúmeros pequenos intervalos,  $\Delta t_1, \Delta t_2, \dots, \Delta t_n$ , tais que  $\Delta t_1 = \Delta t_2 = \dots = \Delta t_n$ . Então, constroi-se um conjunto de retângulos, como mostrado na figura 5.1.

A área do retângulo correspondente ao  $i$ -ésimo intervalo  $\Delta t_i$  (sombreado na figura 5.1) é  $v_i \cdot \Delta t_i$ , o que é aproximadamente igual ao deslocamento  $\Delta s_i$  no intervalo  $\Delta t_i$ . A soma das áreas retangulares é, portanto, aproximadamente igual à soma dos deslocamentos durante os intervalos de tempo e é aproximadamente igual ao deslocamento entre os instantes  $t_1$  e  $t_2$ .

Para tornar a aproximação tão precisa quanto quisermos, basta colocar um número suficientemente grande de retângulos sob a curva, conseqüentemente, tendo cada retângulo um valor de  $\Delta t$  suficientemente pequeno.

Para o limite de intervalos de tempo cada vez menor (e o número de retângulos cada vez maior), a soma resultante se aproxima da área sob a curva, o que equivale ao deslocamento entre os instantes  $t_1$  e  $t_2$ .

Portanto, o deslocamento  $\Delta s$  entre os instantes  $t_1$  e  $t_2$  é, assim, a área sob a curva que representa o gráfico  $v \times t$ , no intervalo de extremos  $t_1$  e  $t_2$ .

*iii)* **Posição em função do tempo** [ $s = s(t)$ ]

A função horária da posição no MRU é uma função polinomial do 1º grau da forma  $s = s_0 + vt$ . Portanto, como mostramos na seção 3.4 do capítulo 3, o seu gráfico será uma reta não-vertical e não-horizontal em relação ao eixo- $t$ .

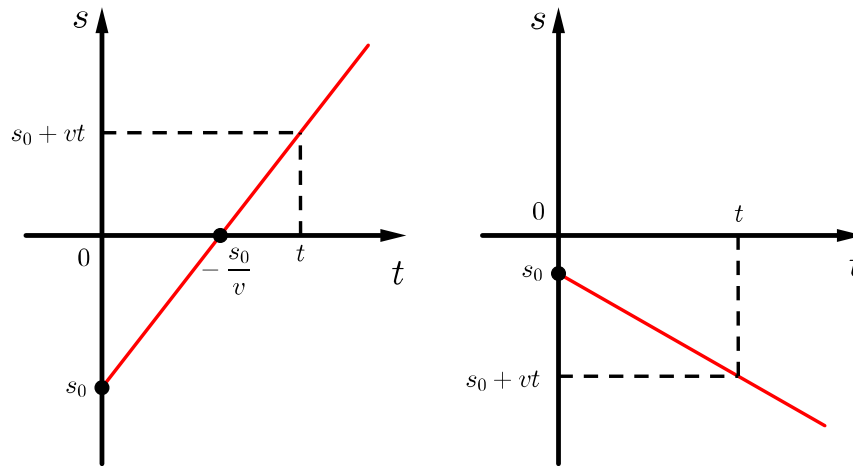


Figura 5.5: gráficos da função horária da posição no MRU.

**Propriedade 5.3** No MRU, a tangente do ângulo que o gráfico da posição em função do tempo forma com o eixo das abscissas (eixo- $t$ ) é numericamente igual à velocidade do móvel.

$$v \stackrel{N}{=} tg\theta$$

**Demonstração:**

Sendo a função horária da posição no MRU,  $s = s_0 + vt$  e seu gráfico uma reta. Sabe-se da seção 3.4 do capítulo 3, que a tangente do ângulo que a reta forma com o eixo- $x$ , no gráfico de  $f(x) = ax + b$ , é igual ao coeficiente  $a$ . Portanto, para a função horária da posição,  $s = s_0 + vt$ , conclui-se que  $v$  é numericamente igual a tangente do ângulo que o gráfico da posição em função do tempo forma com o eixo das abscissas (eixo- $t$ ).

## 5.3 Movimento Retilíneo Uniformemente Variado (MRUV)

### 5.3.1 Definição

Denomina-se **Movimento Retilíneo Uniformemente Variado** (MRUV), qualquer movimento realizado por um móvel, numa trajetória retilínea, em que a velocidade varia uniformemente no decorrer do tempo, ou seja, sofre iguais variações de velocidade em iguais intervalos de tempo.

Conseqüentemente, no movimento retilíneo uniformemente variado a aceleração escalar instantânea  $a$  é constante, não nula e igual à aceleração escalar média  $a_m$  em qualquer intervalo de tempo.

### 5.3.2 Funções Horárias do MRUV

i) **Aceleração em função do tempo** [ $a = a(t)$ ]

Como no MRUV, a aceleração escalar instantânea  $a$  é constante, não-nula e igual à aceleração escalar média  $a_m$  em qualquer intervalo de tempo. Então, sua função horária é dada por:

$$a(t) = a_m = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \text{constante} \neq 0 .$$

ou seja, uma função constante e não-nula.

ii) **Velocidade em função do tempo** [ $v = v(t)$ ]

Como no MRUV, um móvel sofre iguais variações de velocidade em iguais intervalos de tempo. Concluí-se da seção 3.2 do capítulo 3, que a definição de movimento retilíneo uniformemente variado caracteriza uma função polinomial do 1º grau, e sendo  $v$  a velocidade e  $t$  o tempo, temos:

$$v(t) = ct + d . \quad (5.4)$$

onde:

- ✓  $d = v(0)$  é o valor inicial de  $v$  e;
- ✓  $c$  é a taxa de variação de  $v$ .

Para completar a função horária da velocidade, deve-se determinar as constantes  $c$  e  $d$  na equação (5.4), ou seja, determinar um significado físico para elas.

Sendo  $v_0$  a velocidade inicial do móvel, ou seja, a sua velocidade no instante  $t = 0$  e como a aceleração  $a$  no MRUV, mede a variação da velocidade em relação à correspondente variação do tempo, ou seja, é a taxa de variação de  $v$  em relação a  $t$ . Concluí-se que:

$$d = v_0 \quad (5.5)$$

e

$$c = a \quad (5.6)$$

Substituindo as igualdades (5.5) e (5.6) na equação (5.4), obtém-se a função horária da velocidade, dada por:

$$v(t) = v_0 + at$$

em que:

- ✓  $v(t)$  é a velocidade do móvel no instante  $t$ ;
- ✓  $v_0$  é a velocidade inicial (instante  $t = 0$ )
- ✓  $a$  é a aceleração;

iii) **Posição em função do tempo** [ $s = s(t)$ ]

A função horária da posição no MRUV é dada por:

$$s(t) = s_0 + v_0t + \frac{a}{2}t^2 \quad (5.7)$$

onde:

- ✓  $s(t)$  é a posição do móvel no instante  $t$ .
- ✓  $s_0$  é a posição do móvel no instante  $t = 0$  (posição inicial).
- ✓  $v_0$  é a velocidade do móvel no instante  $t = 0$  (velocidade inicial).
- ✓  $a$  é aceleração.

A demonstração da equação (5.7), será feita no item *ii*) da subseção 5.3.3.

### 5.3.3 Gráficos das funções horárias do MRUV

*i*) **Aceleração em função do tempo** [ $a = a(t)$ ]

Como a função horária da aceleração no MRUV, é uma função constante e não-nula. Então, o seu gráfico corresponde a uma reta paralela ao eixo das abscissas (eixo- $t$ ).

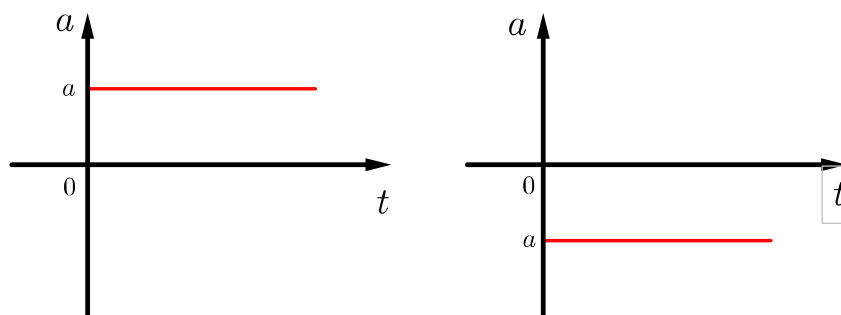


Figura 5.6: gráficos da função horária da aceleração no MRUV.

**Propriedade 5.4** *No MRUV, a área compreendida entre o segmento de reta que representa o gráfico de  $a = a(t)$  e o eixo horizontal entre os instantes  $t_1$  e  $t_2$  é numericamente igual à variação de velocidade, no intervalo de tempo considerado.*

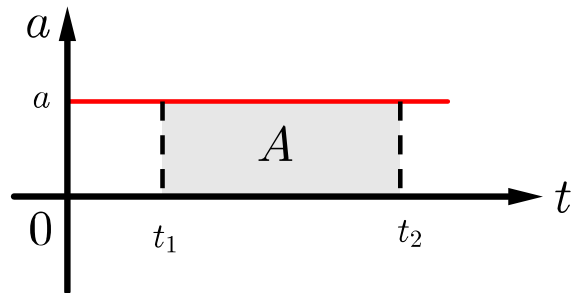


Figura 5.7: a área  $A$  é numericamente igual à variação de velocidade.

**Demonstração:**

Na figura 5.7, determinando a área definida entre a curva e o intervalo de extremos  $t_1$  e  $t_2$ , obtém-se:

$$A = a \cdot (t_2 - t_1) . \quad (5.8)$$

Pois, a região é um retângulo.

Mas, sabe-se que:

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} \implies \Delta v = a \cdot \Delta t \implies \Delta v = a \cdot (t_2 - t_1) . \quad (5.9)$$

Das equações (5.8) e (5.9), concluí-se que:

$$A \stackrel{N}{=} \Delta v$$

**ii) Velocidade em função do tempo [ $v = v(t)$ ]**

A função horária da velocidade no MRUV é uma função polinomial do 1º grau da forma  $v = v_0 + at$ . Portanto, como mostrado na seção 3.4 do capítulo 3, o seu gráfico será uma reta não-vertical e não-horizontal em relação ao eixo- $t$ .

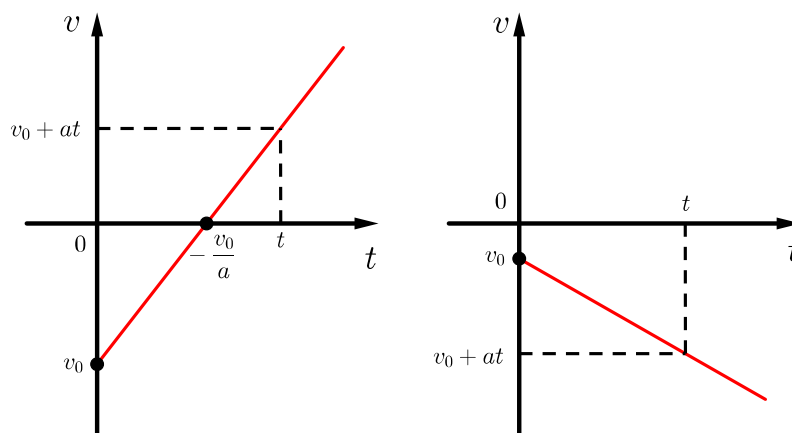


Figura 5.8: gráficos da função horária da velocidade no MRUV.

**Propriedade 5.5** *No MRUV, a tangente do ângulo que o gráfico da velocidade em função do tempo forma com o eixo das abscissas (eixo- $t$ ) é numericamente igual à aceleração do móvel.*

$$a \stackrel{N}{=} \operatorname{tg}\theta$$

**Demonstração:**

Sendo a função horária da velocidade, no MRUV,  $v = v_0 + at$  e seu o gráfico uma reta. Sabe-se da seção 3.4 do capítulo 3, que a tangente do ângulo que a reta forma com o eixo- $x$ , no gráfico de  $f(x) = cx + d$ , é igual ao coeficiente  $c$ . Portanto, para a função horária da velocidade,  $v = v_0 + at$ , concluí-se que  $a$  é numericamente igual a tangente do ângulo que o gráfico da velocidade em função do tempo forma com o eixo das abscissas (eixo- $t$ ).

Será realizada agora, a demonstração da função horária da posição no MRUV, apresentada no item *iii*) da seção 5.3.2.

**Demonstração:**

De acordo com a propriedade 5.2, em qualquer movimento a área sob a curva, no gráfico da velocidade em função do tempo, entre os instantes  $t_1$  e  $t_2$ , é



numericamente igual à variação de espaço ( $\Delta s$ ) no correspondente intervalo de tempo. Ou seja:

$$A \stackrel{N}{=} \Delta s .$$

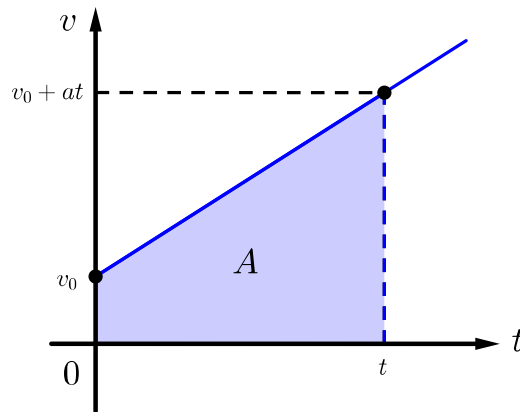


Figura 5.9: demonstração da função horária da posição no MRUV.

Sendo a parte sombreada na figura 5.9, um trapézio retângulo, e aplicando a propriedade 5.2, temos que:

$$\begin{aligned} \Delta s &= \frac{[v_0 + (v_0 + at)]}{2} \cdot \Delta t \\ s - s_0 &= \frac{(2v_0 + at)}{2} \cdot (t - 0) \\ s - s_0 &= \frac{2v_0}{2} \cdot t + \frac{a}{2} \cdot t^2 \\ s &= s_0 + v_0 t + \frac{a}{2} \cdot t^2 . \end{aligned}$$

*iii*) **Posição em função do tempo** [ $s = s(t)$ ]

Sendo a função horária da posição no MRUV uma função polinomial do 2º grau da forma  $s = s_0 + v_0 t + \frac{a}{2} t^2$ . Concluí-se, com base na seção 4.5 do capítulo 4, que o seu gráfico será uma parábola com eixo paralelo ao eixo- $y$ .

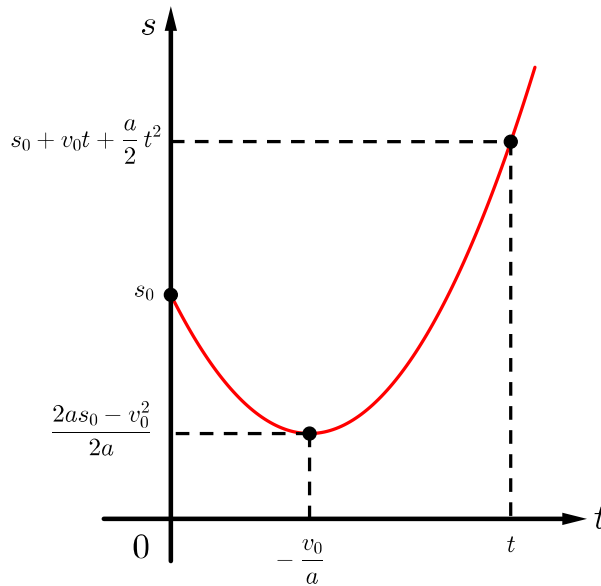


Figura 5.10: gráfico da função horária da posição no MRUV.

## 5.4 Estudo dos Movimentos em Queda Livre

Nesta seção, será mostrado que a trajetória descrita por um objeto lançado obliquamente, com velocidade inicial  $v_0$  formando um ângulo  $\theta$  acima do eixo- $x$  é uma parábola e faremos a análise desse movimento para o ângulo  $\theta$  variando no intervalo de  $[0, \frac{\pi}{2}]$ .

### 5.4.1 Lançamento oblíquo

**Definição 5.5 (Queda Livre)** *Denomina-se **queda livre**, todo movimento em que os objetos caem livremente sob a influência apenas da gravidade.*

Considere no plano cartesiano, um objeto lançado obliquamente, com velocidade inicial  $v_0$  formando um ângulo  $\theta$  acima do eixo- $x$  e tendo a origem como ponto de lançamento, conforme figura 5.11.

Antes de determinar a equação que descreve a trajetória do objeto. Serão enunciados, o **princípio da independência dos movimentos** e a **2ª lei de Newton** que servirão de embasamento teórico para as demonstrações.

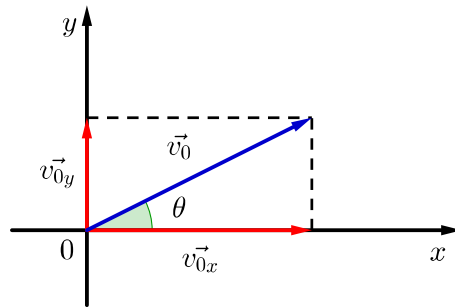


Figura 5.11: componentes vertical e horizontal de  $\vec{v}_0$ .

✓ **Princípio da independência dos movimentos:**

Quando um corpo se encontra sob a ação simultânea de vários movimentos, cada um deles se processa como se os demais não existissem.

✓ **2ª Lei de Newton:**

A resultante das forças que agem sobre um corpo é igual ao produto de sua massa pela aceleração adquirida.

Portanto, com base no princípio da independência dos movimentos. Estudou-se o lançamento oblíquo do objeto, considerando esse movimento como sendo a composição de dois movimentos: um na vertical e outro na horizontal.

As componentes horizontal e vertical da velocidade inicial  $v_0$  são dadas por (ver figura 5.11):

$$v_{0x} = v_0 \cos \theta \quad (5.10)$$

e

$$v_{0y} = v_0 \sin \theta \quad (5.11)$$

Após o lançamento do objeto, as únicas forças atuantes sobre o mesmo são a resistência do ar e a gravidade. Considerando que o objeto está em queda livre, desprezou-se a resistência do ar. Assim, a única força que atua sobre o objeto é a da gravidade, ou seja, seu peso atuando na direção vertical.

Como não há forças atuando na horizontal, pela 2ª Lei de Newton, tem-se que a aceleração nessa direção é nula.

Portanto:

- ✓ na direção horizontal, o objeto realiza um **movimento retilíneo uniforme** com velocidade igual a  $v_{0_x}$  e;
- ✓ na direção vertical, o objeto realiza um **movimento retilíneo uniformemente variado** com velocidade inicial igual a  $v_{0_y}$  e aceleração igual a  $-g$ .

Como na direção horizontal, o movimento é retilíneo uniforme e a posição inicial é igual a zero, tem-se da subseção 5.2.2, que a equação horária da posição do objeto é dada por:

$$x(t) = v_{0_x} t$$

Na direção vertical, sendo o movimento retilíneo uniformemente variado e a posição inicial igual a zero, tem-se da subseção 5.3.2, que a equação horária da posição do objeto é dada por:

$$y(t) = v_{0_y} t - \frac{g}{2} t^2$$

As notações  $x(t)$  e  $y(t)$ , são simplesmente para enfatizar que  $x$  e  $y$  são funções do tempo. Assim, se  $P(x, y)$  é a posição do objeto no instante  $t$ , tem-se:

$$x = v_{0_x} t \tag{5.12}$$

e

$$y = v_{0_y} t - \frac{g}{2} t^2 \tag{5.13}$$

A equação que descreve a trajetória  $y(x)$  do objeto pode ser obtida das equações (5.12) e (5.13), eliminando-se a variável  $t$ .

Portanto, isolando  $t$  na equação (5.12), obtém-se  $t = \frac{x}{v_{0_x}}$  e substituindo na equação (5.13), vem:

$$\begin{aligned} y(x) &= v_{0_y} \cdot \left( \frac{x}{v_{0_x}} \right) - \left( \frac{g}{2} \right) \cdot \left( \frac{x}{v_{0_x}} \right)^2 \\ y(x) &= \left( \frac{v_{0_y}}{v_{0_x}} \right) \cdot x - \left( \frac{g}{2v_{0_x}^2} \right) \cdot x^2, \end{aligned} \tag{5.14}$$

Substituindo as igualdades (5.10) e (5.11), na equação (5.14), tem-se:

$$y(x) = (\tan \theta) x - \left( \frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \theta} \right) x^2. \tag{5.15}$$

como sendo a equação que descreve a trajetória do objeto. Esta equação tem a forma  $y = bx + ax^2$ , ou seja, é a lei de formação da função quadrática, apresentada na seção 4.1 do capítulo 4.

Portanto, isso mostra que a trajetória do objeto é uma **parábola**.

A figura 5.12 mostra a trajetória do objeto com as componentes horizontal e vertical da velocidade em vários pontos. A distância horizontal  $R$  entre o lançamento e o impacto no solo em  $S$ , na mesma elevação, é chamado **alcance horizontal**.

Através da equação (5.15), determina-se a altura máxima  $H$  que o objeto atinge em relação ao solo (eixo- $x$ ) e seu alcance horizontal  $R$ . Pois, sendo a trajetória do objeto uma parábola, a altura máxima corresponde à ordenada do vértice da parábola e o alcance horizontal corresponde a um dos zeros da equação (5.15).

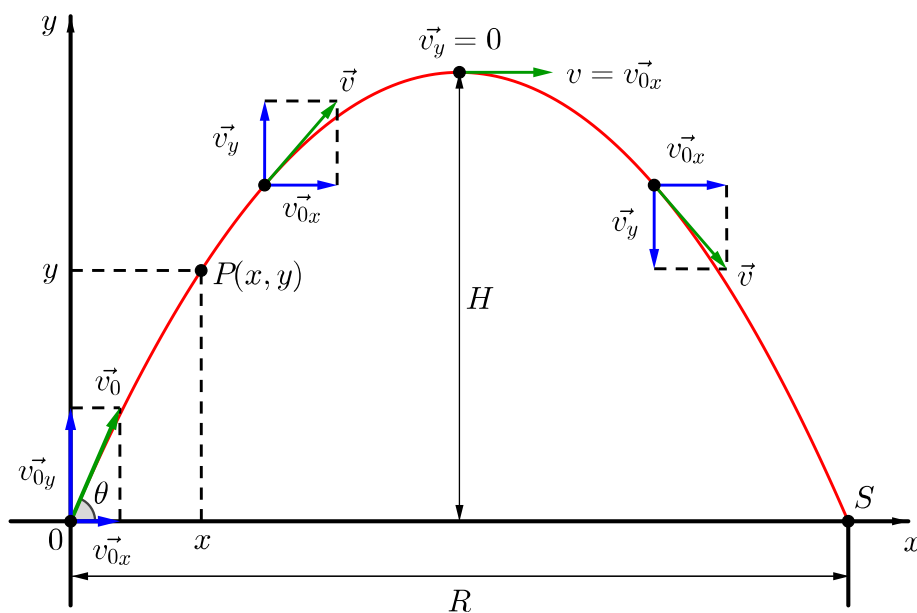


Figura 5.12: trajetória do objeto lançado obliquamente.

#### 5.4.2 Análise da trajetória de um objeto, em queda livre, através da variação do ângulo $\theta$

Tomando o ângulo  $\theta$  como parâmetro na equação (5.15). Será feita uma análise da trajetória que realizará um objeto em queda livre, fazendo o ângulo  $\theta$  variar no intervalo de  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ .

Para realizar esta análise, considera-se o objeto sendo lançado da origem com velocidade inicial  $v_0$ , segundo um ângulo  $\theta$  acima do eixo- $x$  e estando a uma altura  $y_s$  acima do solo.

**1ª situação:** o objeto é lançado segundo um ângulo  $\theta$  igual a zero.

Nessa situação, fisicamente, diz-se que o objeto foi **lançado horizontalmente** e descreve a trajetória parabólica mostrada na figura 5.13.

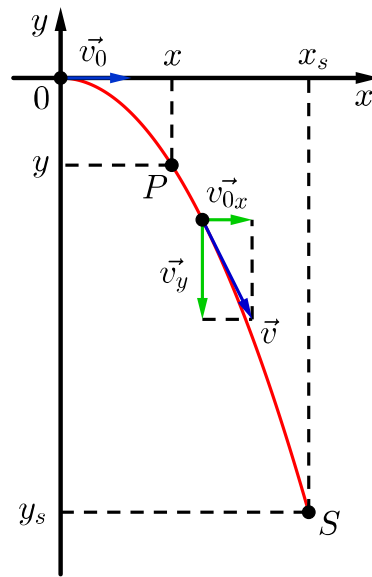


Figura 5.13: trajetória do objeto quando  $\theta = 0$ .

De fato:

Fazendo  $\theta = 0$  na equação (5.15), obtemos:

$$\begin{aligned}
 y &= \tan 0 \cdot x - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2 0} \cdot x^2 \\
 y &= 0 \cdot x - \frac{g}{2v_0^2 \cdot 1^2} \cdot x^2 \\
 y &= -\frac{g}{2v_0^2} x^2 .
 \end{aligned} \tag{5.16}$$

Como a equação (5.16) é uma função quadrática e o seu gráfico representa a trajetória do objeto, conclui-se que o objeto, após o lançamento, descreve uma **parábola**.

Na figura 5.13, o ponto  $S(x_s, y_s)$  é o ponto em que o objeto atinge o solo.

**Conclusão:** quando um objeto é lançado segundo um ângulo  $\theta = 0$ , em queda livre, a sua trajetória será uma **parábola** e o seu movimento será denominado **lançamento horizontal**.

**2ª situação:** o objeto é lançado segundo um ângulo  $\theta$  variando no intervalo  $]0, \frac{\pi}{2}[$ .

Para o lançamento de um objeto, segundo um ângulo  $\theta$  variando entre 0 e  $\frac{\pi}{2}$ , tem-se que a sua trajetória será descrita pela equação:

$$\underbrace{y(x) = (\tan \theta) x - \left( \frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \theta} \right) x^2}_{\text{(função quadrática)}} .$$

ou seja, a sua trajetória será uma **parábola**, representada na figura abaixo, e o seu movimento será denominado **lançamento oblíquo**.

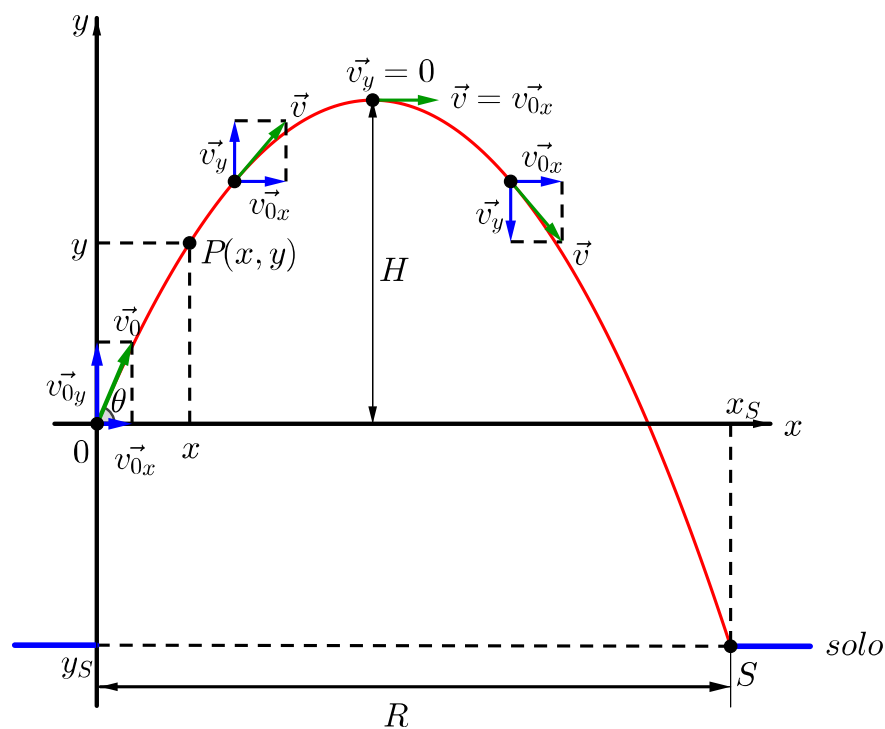


Figura 5.14: trajetória do objeto quando  $\theta$  varia entre 0 e  $\frac{\pi}{2}$ .

A determinação da equação que descreve a trajetória do objeto para essa situação foi realizada na subseção 5.4.1.

Na figura 5.14, o ponto  $S(x_s, y_s)$  é o ponto em que o objeto atinge o solo.

**Conclusão:** quando um objeto é lançado segundo um ângulo  $\theta$  variando entre  $0$  e  $\frac{\pi}{2}$ , em queda livre, a sua trajetória será uma **parábola** e o seu movimento será denominado **lançamento oblíquo**.

**3ª situação:** o objeto é lançado segundo um ângulo  $\theta$  igual a  $\frac{\pi}{2}$ .

Nessa situação, fisicamente, diz-se que o objeto foi **lançado verticalmente para cima** e sua trajetória será uma reta vertical, conforme figura 5.15.

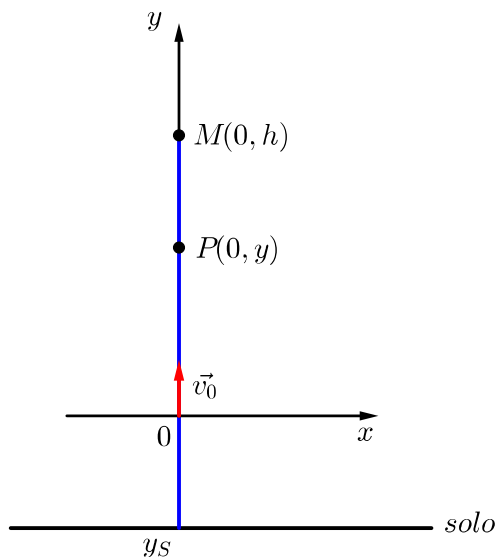


Figura 5.15: trajetória do objeto quando  $\theta = \frac{\pi}{2}$ .

onde:

- ✓  $M(0, h)$  é o ponto em que o objeto atinge a altura máxima em relação ao eixo- $x$ ;
- ✓  $(h + y_s)$  é o valor da altura máxima em relação ao solo;
- ✓ e a reta vertical na cor azul é a trajetória descrita pelo objeto.



De fato:

A equação (5.15) não pode ser utilizada para esta situação, pois, para  $\theta = \frac{\pi}{2}$ , não existe  $\tan \frac{\pi}{2}$  e nem  $\sec \frac{\pi}{2}$ .

Como  $\theta = \frac{\pi}{2}$ , as componentes horizontal e vertical da velocidade inicial, utilizando as equações (5.10) e (5.11), são:

$$v_{0_x} = v_0 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = v_0 \cdot 0 \implies v_{0_x} = 0 \quad (5.17)$$

$$\text{e} \\ v_{0_y} = v_0 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = v_0 \cdot 1 \implies v_{0_y} = v_0 \quad (5.18)$$

Sendo  $v_{0_x} = 0$  e como a única força que atua sobre o objeto é a gravidade, a qual não possui componente horizontal, concluí-se que não há movimento na direção horizontal, ou seja, para todo  $t \in \mathbb{R}_+$ , temos  $x = 0$ . Portanto, o movimento do objeto será um MRUV na direção vertical, pois,  $\theta = \frac{\pi}{2}$ .

Logo, se  $P(x, y)$  é a posição do objeto no instante  $t$ , tem-se  $P(0, y)$ , com  $y = v_0 t - \frac{g}{2} t^2$ . Neste caso, a trajetória do objeto é uma **reta vertical**.

**Conclusão:** quando um objeto é lançado segundo um ângulo  $\theta = \frac{\pi}{2}$ , em queda livre, a sua trajetória será uma **reta vertical** e o seu movimento será denominado **lançamento vertical para cima**.

# Considerações Finais

A abordagem das Funções Polinomiais do Primeiro e Segundo Graus foi feita no presente trabalho procurando tratar essas funções de forma mais abrangente, apresentando informações que geralmente não são dadas na maioria dos livros didáticos do Ensino Médio e exibindo uma aplicação dessas funções na Física, especificamente na cinemática, no estudo dos movimentos uniforme e uniformemente variado.

Deste modo, a contribuição aos conteúdos relacionados à Função Polinomial do 1º Grau  $f(x) = ax + b$ , mostrados nessa dissertação, podem ser destacados nos pontos seguintes:

- ✓ **a sua caracterização**, pois, torna possível determinar se ela será o modelo matemático a ser aplicado no estudo de certo fenômeno ou tabela que relaciona duas quantidades (ou grandezas)  $x$  e  $y$ ;
- ✓ **o significado analítico dos números reais  $a$  e  $b$** , visto que, após a caracterização da Função Polinomial do 1º grau como modelo matemático para a resolução de determinado problema, é possível, através da interpretação analítica desses números associá-los às informações relacionadas ao problema;
- ✓ **a demonstração e a recíproca, de que o seu gráfico é uma reta não-vertical e não-horizontal**, uma vez que, considera-se fundamental tais demonstrações, pois servem para mostrar de forma natural ao aluno que o conjunto de pontos  $(x, ax + b) \in \mathbb{R}^2$ , onde  $x \in \mathbb{R}$  estão na mesma reta;

Cabe salientar que as contribuições desse trabalho, aos conteúdos associados à Função Polinomial do 2º Grau, são abaixo destacados:

- ✓ **a sua forma canônica**, pois, é uma representação da função quadrática que raramente é exibida nos livros didáticos e que fornece, visivelmente, o seu valor máximo ou mínimo e as coordenadas do vértice da parábola;
- ✓ **a sua forma fatorada**, dado que, é uma representação da função quadrática que fornece, explicitamente, os seus zeros e é o fundamento para o estudo analítico do seu sinal;

- ✓ **o estudo analítico do seu sinal**, visto que, o estudo do sinal da função quadrática é feito, somente, através da análise do seu gráfico, além de ser mais uma alternativa para realizar esse estudo;
- ✓ **a demonstração e a recíproca, de que o seu gráfico é uma parábola**, uma vez que, considera-se necessárias tais demonstrações, pois servem para fixar a ideia para o aluno de que o conjunto de pontos  $(x, ax^2 + bx + c) \in \mathbb{R}^2$ , onde  $x \in \mathbb{R}$  formam uma parábola;
- ✓ **a demonstração de que possui valor máximo ou mínimo e ele ocorre no vértice da parábola**, pois, essa característica da função quadrática constitui-se numa importante ferramenta na resolução de problemas de otimização<sup>1</sup>, daí a importância de apresentar a prova dessa característica;

Assim, fica reforçada a importância dos conteúdos destacados acima, presentes neste trabalho, pois, além de darem maior apoio bibliográfico ao professor e ao aluno, fortalecem os conceitos matemáticos dessas funções.

A aplicação na cinemática, teve o propósito de mostrar que as Funções Polinomiais do 1º e 2º Grau não são apenas mais uma variedade de conceitos abstratos da Matemática, utilizados apenas na resolução de problemas didáticos, mas que podem servir de modelos para outras áreas do conhecimento ou situações concretas. Por esta razão, no capítulo Aplicações na Cinemática, as demonstrações das equações horárias do MRU e MRUV foram realizadas, associando as características dessas funções com as características ou propriedades desses movimentos, e considerando a importância histórica para se determinar a trajetória de um objeto lançado em queda livre de acordo com [11]:

### **MOVIMENTO PARABÓLICO**

*Por muito tempo, não se soube ao certo como era a trajetória de um objeto em um lançamento, e não foram poucos os que fizeram suposições incorretas. De acordo com Aristóteles<sup>2</sup>, um objeto lançado horizontalmente descrevia uma trajetória retilínea até o alcance máximo e a partir daí caía verticalmente em direção ao solo. Somente séculos depois, o físico e astrônomo Galileu Galilei (1564 – 1642) observou que um objeto, ao ser lançado, descreve uma trajetória parabólica. Por essas observações, e a semelhança entre o gráfico de uma função quadrática e a trajetória de objetos, não tardou para que tais funções fossem aplicadas no estudo de movimentos de projéteis.*

---

<sup>1</sup>Em Matemática, o termo otimização, refere-se ao estudo de problemas em que se busca minimizar ou maximizar uma função através da escolha sistemática dos valores de variáveis reais ou inteiras dentro de um conjunto viável.

<sup>2</sup>Aristóteles (384 a.C. – 322 a.C.) foi um filósofo grego.

conclui-se o referido capítulo, com o estudo dos movimentos em queda livre, determinando a trajetória de um objeto, através da variação do ângulo  $\theta$ . Portanto, o trabalho aqui apresentado, mostra-se uma alternativa viável para uma possível implementação interdisciplinar e intradisciplinar das funções em questão, além de também poder ser usado na consolidação ou complementação da formação de professores e alunos interessados na ênfase dada às funções no texto.

# Referências Bibliográficas

- [1] Ministério da Educação. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. Parâmetros Curriculares Nacionais: Ensino Médio. Brasília: MEC,1999.
- [2] PENTEADO, Paulo Cesar M.; TORRES, Carlos Magno A. *Física - ciência e tecnologia. São Paulo: Moderna, 2005.*
- [3] BONJORNO, Regina F. S. Azenha; BONJORNO, José Roberto; BONJORNO, Valter; RAMOS, Clinton Márcico. *Temas de Física 1: mecânica. São Paulo: FTD, 1997.*
- [4] SILVA, Claudio Xavier da; FILHO, Benigno Barreto. *Física aula por aula: mecânica.1. ed. São Paulo: FTD, 2010. v.1.*
- [5] SANT'ANNA, Blaidi; REIS, Hugo Carneiro; MARTINI, Glória; SPINELLI, Walter. *Conexões com a Física.1. ed. São Paulo: Moderna, 2010.*
- [6] IEZZI, Gelson; MURAKAMI, Carlos. *Fundamentos de Matemática Elementar, 1: Conjuntos, Funções. 7. ed. São Paulo: Atual, 1993.*
- [7] DANTE, Luiz Roberto. *Matemática: Contexto e Aplicações. 1. ed. São Paulo: Ática, 2010.*
- [8] FAVARRETO, Denise. *Matemática em cena, 7º ano. São Paulo: Escala Educacional, 2008.*
- [9] LIMA, Elon Lages; CARVALHO, Paulo César Pinto; WAGNER, Eduardo; MORGADO, Augusto César. *A Matemática do Ensino Médio. Rio de Janeiro: SBM, 2006.*
- [10] IEZZI, Gelson; DOLCE, Osvaldo; MACHADO, Antonio. *Matemática e Realidade: 9º ano. 6. ed. São Paulo: Atual, 2009.*
- [11] SOUSA, Joamir Roberto de. *Novo olhar Matemática. 1.ed. São Paulo: FTD, 2010.*