UNIVERSIDADE ESTADUAL DE PONTA GROSSA
SETOR DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM
MATEMÁTICA – PROFMAT

RODRIGO DUDA

MATEMÁTICA FINANCEIRA E PLANILHAS ELETRÔNICAS: UMA ABORDAGEM COM A INCORPORAÇÃO DE RECURSOS COMPUTACIONAIS

PONTA GROSSA
2014

RODRIGO DUDA

MATEMÁTICA FINANCEIRA E PLANILHAS ELETRÔNICAS: UMA ABORDAGEM COM A INCORPORAÇÃO DE RECURSOS COMPUTACIONAIS

Dissertação apresentada para obtenção do título de Mestre em Matemática, no Programa de Mestrado Profissional em Matemática em rede nacional, Setor de Ciências Exatas e Naturais, Universidade Estadual de Ponta Grossa.

Orientadora: Prof.ª Dr.ª Luciane Grossi

PONTA GROSSA
2014

Ficha Catalográfica
Elaborada pelo Setor de Tratamento da Informação BICEN/UEPG

Duda, Rodrigo

D844 Matemática financeira e planilhas eletrônicas: uma abordagem com a incorporação de recursos computacionais/ Rodrigo Duda. Ponta Grossa, 2014.
114f.

Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - Área de Concentração: Matemática), Universidade Estadual de Ponta Grossa.
Orientadora: Profª Drª Luciane Grossi.

1.Matemática financeira. 2.Progressões e relações de recorrência. 3.Planilhas eletrônicas. I.Grossi, Luciane. II. Universidade Estadual de Ponta Grossa. Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional. III. T.

CDD: 513.93

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE PONTA GROSSA
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

PROFMAT

TERMO DE APROVAÇÃO

RODRIGO DUDA

"MATEMÁTICA FINANCEIRA E PLANILHAS ELETRÔNICAS: UMA ABORDAGEM COM A INCORPORAÇÃO DE RECURSOS COMPUTACIONAIS"

Dissertação aprovada como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre no Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da Universidade Estadual de Ponta Grossa, pela seguinte banca examinadora.

Orientador: Prof. Dra. Luciane Grossi
Departamento de Matemática, UEPG/PR

Prof. Dra. Sani de Carvalho Rutz da Silva
Departamento de Matemática, UTFPR/PR

Prof. Dr. Marciano Pereira
Departamento de Matemática, UEPG/PR

Ponta Grossa, 24 de Fevereiro de 2014.

Aos meus amados filhos, Ana Paula e Luiz André, e minha esposa, Joelma, por tudo que significam para mim.

AGRADECIMENTOS

Aos meus filhos, Ana Paula e Luiz André, que são a razão da minha vida e motivação para tudo que faço, e que por alguns momentos foram privados da minha atenção durante os longos períodos de estudo e pesquisa para que este sonho de realizasse;

À minha esposa Joelma, por acreditar no meu potencial, pelo constante incentivo, carinho, dedicação e compreensão, principalmente nos momentos em que não pude lhe dar a devida atenção, e por ser meu ombro amigo nos momentos difíceis;

Aos meus pais, Josélia e Oscar, pelo constante incentivo, por acreditarem no meu potencial e, mesmo com dificuldades, terem proporcionado os subsídios para que eu atingisse meus objetivos acadêmicos;

Ao meu irmão Robson, pelo incentivo, paciência e dedicação na elaboração do aplicativo que compõe este trabalho;

Aos colegas de trabalho da UTFPR, em especial aos professores Luiz Alberto Pilatti, Elenise Sauer e Antonio Augusto de Paula Xavier, e minha chefe Silvana Weinhardt de Oliveira, pela compreensão e apoio durante o período deste curso;

À minha orientadora, professora Luciane Grossi, pela amizade, paciência e dedicação na condução desta pesquisa;

Aos membros da banca examinadora, professor Marciano e professora Sani, pelo tempo dedicado à análise deste trabalho e pelas importantes contribuições;

Ao corpo docente do PROFMAT da Universidade Estadual de Ponta Grossa, pela atenção e estímulo durante o curso;

À Sociedade Brasileira de Matemática, que na busca da melhoria do ensino de Matemática na Educação Básica viabilizou a implementação do PROFMAT, possibilitando-me a obtenção do título de mestre.

RESUMO

Este trabalho tem por objetivo propor uma abordagem alternativa para o ensino de progressões e matemática financeira, com a incorporação de recursos tecnológicos. A matemática financeira é um tema de grande relevância, uma vez que é um campo de aplicação direta de vários conceitos matemáticos estudados ao longo da educação escolar. Um dos conceitos utilizados é o estudo de progressões aritméticas e geométricas. Para o estudo destes, propomos a abordagem por meio da resolução de relações de recorrência. Devido à relevância da matemática financeira na formação escolar do aluno, analisamos as diferentes formas e frequência com que a temática é abordada no Exame Nacional do Ensino Médio e nos processos seletivos da Universidade Estadual de Ponta Grossa. Com o objetivo de estimular a manipulação algébrica e a compreensão das variáveis das fórmulas de matemática financeira, propomos a incorporação de recursos tecnológicos, em particular, das planilhas eletrônicas, nas aulas sobre o tema. Por meio dessa ferramenta, propomos a viabilização da construção de simuladores de matemática financeira em sala de aula, visando a diversificação das atividades. Contemplamos também a elaboração de um aplicativo para dispositivos móveis que operam com a plataforma *Android*, visando a portabilidade e compartilhamento dos simuladores que podem ser construídos em sala de aula.

Palavras-chave: matemática financeira, progressões e relações de recorrência, planilhas eletrônicas.

ABSTRACT

This paper has as its goal to propose a new alternative approach to the progressions and financial math teaching, with the incorporation of technological resources. Financial math is a theme of great relevance, since it is a field of direct application of various mathematical concepts studied throughout school education. One of the concepts that used is the study of geometric and arithmetic progressions. In order to study those, an approach based on recurrence relations is proposed. Due to the relevance of financial math in the student's school formation, it is analyzed the ways the frequencies in which the theme is addressed in the High School National Exam and in the selection processes of the Ponta Grossa State University. With the goal of stimulating the algebraic manipulation and understanding of the financial math formulas variables, it is proposed the incorporation of the technological resources, in particular, of electronic spreadsheets, in classes about the theme. Through the tool, it is proposed the viability of financial math simulators in the classroom, seeking the diversification of activities. It is also contemplated the development of an app that operates under the Android Platform, seeking portability and sharing of the simulators that can be built in the classroom.

Keywords: financial math, progressions and recurrence relations, electronic spreadsheets.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

LISTA DE TABELAS

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

EaD	Educação a Distância
ENEF	Estratégia Nacional de Educação Financeira
ENEM	Exame Nacional do Ensino Médio
FIAP	Faculdade de Informação e Administração Paulista
LDB	Lei de Diretrizes e Bases
MEC	Ministério da Educação
MIT	Massachusetts Institute of Technology
PA	Progressão Aritmética
PCNEM	Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio
PG	Progressão Geométrica
PSS	Processo Seletivo Seriado
SAC	Sistema de Amortização Constante
Selic	Sistema Especial de Liquidação e de Custódia
SiSU	Sistema de Seleção Unificada
SOF	Simulador de Operações Financeiras
TI	Tecnologias Informáticas
TR	Taxa Referencial
UEPG	Universidade Estadual de Ponta Grossa
UNICENTRO	Universidade Estadual do Centro-Oeste

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Ensinar matemática nem sempre é uma tarefa fácil. Há diversas variáveis que acabam interferindo na forma de condução das atividades. Dentre os fatores influentes que interferem qualitativamente na prática docente podemos citar as condições estruturais da escola, o domínio do conhecimento acerca de um objeto de estudo e a predisposição para ousar, inovar e contextualizar temas matemáticos com o cotidiano do aluno.

Esses fatores são impactantes não só na forma de trabalho do professor, mas também na forma como os alunos concebem a escola e na percepção de como as disciplinas escolares podem lhes auxiliar, tanto em sua vida acadêmica quanto no trabalho.

Possivelmente, muitos colegas de profissão, no exercício da docência na área de matemática, se depararam ou se depararão com o célebre questionamento "*E para que serve isso*?". A resposta dada para esse questionamento nem sempre poderá convencer o aluno de que o conteúdo estudado é realmente relevante, pois por mais que seja aplicável, pode não fazer parte do seu cotidiano ou, ainda, mesmo sendo de seu interesse, pode não ser explorado adequadamente de forma que seu estudo se torne atrativo ao aluno.

Ao se deparar com isso, podem surgir autoquestionamentos a respeito da forma de estruturar suas aulas, de forma que estas sejam mais atrativas ao aluno e, ao mesmo tempo, permitam a exploração de características essenciais do objeto de estudo, bem como contextualizar a temática com outras áreas do conhecimento, ou mesmo dentro da própria matemática.

Uma alternativa viável para diversificação das estratégias docentes é a utilização de ferramentas tecnológicas em sala de aula, em especial, o uso de computadores. Muitos são os pesquisadores favoráveis ao seu uso no ambiente escolar, pois além de ser uma ferramenta que se torna cada vez mais frequente na vida dos educandos, sua utilização pode englobar tanto a pesquisa acerca da temática estudada, quanto a utilização de *softwares* educacionais ou de execução de cálculos, constituindo-se num grande leque de possibilidades à disposição do professor.

Com esse pressuposto, buscamos propor uma forma alternativa de atividades relacionadas ao estudo de progressões e matemática financeira no

Ensino Médio, aliado ao uso de planilhas eletrônicas na construção de calculadoras e simuladores.

1.1 OBJETIVOS E JUSTIFICATIVA

Buscando relacionar a matemática escolar com a matemática do cotidiano, bem como a diversificação de atividades por meio da utilização de ferramentas tecnológicas, o presente trabalho tem como principais finalidades:

- a abordagem do estudo de progressões aritméticas e geométricas por meio da utilização de relações de recorrência de primeiro grau;
- a aplicação de progressões e relações de recorrência na modelagem e resolução de situações-problema relacionadas à matemática financeira;
- a utilização de planilhas eletrônicas na construção de calculadoras e simuladores de alguns tópicos de matemática financeira.

Tal abordagem se prende aos anseios de apresentar a temática de matemática financeira de forma ampla e diversificada, de forma que seu estudo não seja pautado apenas na abordagem dos sistemas de capitalização simples e composta, tampouco pautado na resolução mecânica de exercícios referentes à temática.

As diretrizes curriculares, tanto nacionais quanto estaduais, colocam a educação escolar como agente transformador do aluno, seja ela no tocante a sua vida acadêmica, à interpretação do mundo que o rodeia, ao mundo do trabalho, ou ainda, ao exercício da cidadania. Desta forma, buscamos uma alternativa para que a aprendizagem deste importante tema da matemática seja efetivamente mais significativa.

1.2 ESTRUTURA DO TRABALHO

O presente trabalho foi estruturado em nove capítulos. Além do capítulo introdutório e do conclusivo, conta com outros sete capítulos referentes ao referencial teórico e desenvolvimento da proposta, conforme detalhamos a seguir.

No segundo capítulo apresentamos o referencial teórico, com a apresentação de revisão bibliográfica acerca das finalidades da disciplina de matemática no currículo escolar e da relevância da compreensão de tópicos de matemática financeira.

No capítulo 3 apresentamos um resumo sobre algumas das justificativas para o uso de recursos computacionais no ambiente escolar, abordando os aspectos positivos de sua utilização e os obstáculos que podem ocasionar efeitos contrários na aprendizagem.

No quarto capítulo listamos o referencial matemático utilizado no trabalho, abordando o estudo de relações de recorrência de primeiro grau e sua possível utilização na introdução do estudo de progressões aritméticas e geométricas. Apresentamos alguns tópicos relevantes de matemática financeira, possíveis de serem inseridos no contexto escolar do Ensino Médio. Também são listadas as utilizações de progressões e relações de recorrência na modelagem e resolução de situações-problema envolvendo matemática financeira, bem como sugestões de formas de exploração da temática.

No quinto capítulo apresentamos a resolução de questões referentes à matemática financeira presentes nas provas do Exame Nacional do Ensino Médio e também nos processos de seleção da Universidade Estadual de Ponta Grossa e da Universidade Estadual do Centro-Oeste nos últimos anos.

No sexto capítulo expomos uma forma de inserção das planilhas eletrônicas no ensino de matemática, com a elaboração de simuladores e calculadoras utilizando os comandos e fórmulas do *software Microsoft Excel* ®.

No sétimo capítulo descrevemos a elaboração de simuladores de matemática financeira utilizando algumas das fórmulas apresentadas no quarto capítulo.

No oitavo capítulo descrevemos a estruturação de um aplicativo para dispositivos móveis que funcionam com a plataforma *Android* ®, reunindo as modalidades de calculadoras e simuladores de operações envolvendo matemática financeira apresentadas no sexto capítulo.

No nono e último capítulo apresentamos as considerações finais a respeito da proposta e perspectiva de temas para eventuais trabalhos futuros.

2 REFERENCIAL TEÓRICO

A seguir apresentamos a revisão bibliográfica e o referencial teórico utilizado na estruturação do presente trabalho, no tocante ao papel da matemática na formação do educando, à importância da matemática financeira para o cidadão e à possibilidade de incorporação de recursos tecnológicos nas aulas de matemática.

2.1 O ENSINO DE MATEMÁTICA FINANCEIRA E SUA FUNÇÃO SOCIAL

Entre as finalidades da Educação Básica descritas no Art. 22º da Lei nº 9394/96 (LDB), que estabelece as diretrizes e bases da Educação Nacional, figura o desenvolvimento do educando, assegurando-lhe formação indispensável para o exercício da cidadania. Especificamente para o Ensino Médio, a LDB estabelece como algumas das finalidades a preparação básica para o trabalho e a cidadania do educando.

Nesse sentido, cabe destacar que o bom entendimento sobre as práticas comerciais efetuadas faz parte do que engloba o conceito de cidadania. Ser cidadão implica estar sujeito a uma série de deveres e direitos. Dentre os últimos, a qualidade de vida do indivíduo está amplamente relacionada, pois o bom uso do dinheiro certamente acarretará uma melhoria de condições, principalmente no que diz respeito ao não endividamento e ao consumo consciente, bem como verificação se os seus direitos fundamentais enquanto consumidor estão sendo respeitados.

Tal preocupação sobre o assunto figura entre as recentes iniciativas políticas. O Governo Federal, por meio do Decreto Nº 7.397, de 22 de dezembro de 2010, instituiu a Estratégia Nacional de Educação Financeira (ENEF), visando à promoção da educação financeira e previdenciária para o fortalecimento da cidadania, a eficiência e solidez do sistema financeiro nacional e a tomada de decisões conscientes por parte dos consumidores.

Neste sentido, é fundamental que a temática seja abordada no ambiente escolar. No atual estágio econômico do Brasil, no qual uma grande parcela da população tem acesso facilitado a diferentes modalidades de crédito, cabe ao ensino básico de matemática oferecer aos alunos uma formação sólida referente à temática financeira (GIRALDO, V; CAETANO, P; MATTOS, F., 2012, p. 45).

Embora as ações relacionadas à educação financeira sejam permeadas de minúcias, dentre as quais podemos citar as diferenças entre as classes sociais, destaca-se o papel que a disciplina de matemática possui nesse contexto. Segundo as Diretrizes Curriculares para a Educação Básica do Estado do Paraná para a disciplina de Matemática (2008, p. 45),

> A aprendizagem da Matemática consiste em criar estratégias que possibilitam ao aluno atribuir sentido e construir significado às ideias matemáticas de modo a tornar-se capaz de estabelecer relações, justificar, analisar, discutir e criar. Desse modo, supera o ensino baseado apenas em desenvolver habilidades, como calcular e resolver problemas ou fixar conceitos pela memorização ou listas de exercícios.

Ainda, segundo as Diretrizes Curriculares para a Educação Básica do Estado do Paraná para a disciplina de Matemática (2008, p.61),

> É importante que o aluno do Ensino Médio compreenda a matemática financeira aplicada aos diversos ramos da atividade humana e sua influência nas decisões de ordem pessoal e social. Tal importância relaciona-se o trato com dívidas, com crediários à interpretação de descontos, à compreensão dos reajustes salariais, à escolha de aplicações financeiras, entre outras.

Um dos objetivos elencados nos Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (PCNEM) para as Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias (2000, p. 42) é a compreensão dos conceitos, procedimentos e estratégias matemáticas e a aplicação do conhecimento matemático em situações diversas no contexto da ciência, da tecnologia e das atividades cotidianas. Desta forma, torna-se óbvio que a necessidade de conhecimento matemático sobre a temática é essencial para guiá-lo na tomada de decisões, que certamente contribuirão para uma melhor compreensão sobre o uso do dinheiro.

Essa visão também é apontada por Giraldo; Caetano e Mattos (2012, p. 45, grifo dos autores):

> A Matemática Financeira **aplicada aos diversos ramos da atividade econômica pode representar importante instrumento para auxiliar em análises e decisões de ordem pessoal e social**. Assim, além de servir como aporte a conceitos de outros campos, o aprendizado de Matemática Financeira instrumentaliza o cidadão a melhor entender, interpretar e escolher adequadamente dívidas, crediários, descontos, reajustes salariais, aplicações financeiras. Dentre essas decisões, destacamos as escolhas de propostas de financiamento a longo, médio e curto prazo, relacionados a experiências do cotidiano.

De acordo com Morgado; Wagner e Zani, (2001, p. 44), “A operação básica da matemática financeira é a operação de empréstimo”. Desta forma, é de se esperar que o enfoque do ensino de matemática financeira no Ensino Médio englobe situações que contemplem tais operações, e não somente o cálculo básico de juros e porcentagens.

Dentre os trabalhos que investigaram a relevância e a forma como a matemática financeira é trabalhada em sala de aula, muitos abordam não só o conhecimento matemático envolvido, mas também o caráter social por trás do entendimento do mundo do dinheiro.

Utilizando modelos de questões extraídas do livro *Progressões e Matemática Financeira*, Cóser Filho (2008) apresentou uma proposta de ensino de matemática financeira a alunos do Ensino Médio utilizando planilhas eletrônicas em laboratório de informática, onde foram abordadas movimentações financeiras de forma recursiva, onde os cálculos foram efetuados com o uso dos comandos do *software* utilizado.

O autor também efetuou a análise de livros didáticos da área de matemática, constatando que apenas em parte das obras analisadas houve contextualização das modalidades de parcelamento e progressões. Também foi constatado que boa parte dos materiais aborda os conteúdos de forma relativamente superficial, se limitando a atividades envolvendo a expressão matemática para o cálculo de juros compostos produzidos por determinada quantia de dinheiro durante certo período de tempo.

Feijó (2007) analisou o uso de planilhas eletrônicas e da calculadora científica como facilitadores da aprendizagem de matemática financeira com turmas do curso de Ciências Contábeis na região sul do Brasil. A abordagem comparativa verificou a eficiência do uso dessas ferramentas em detrimento do uso de calculadoras financeiras e de tabelas financeiras e a atratividade pelos acadêmicos em relação à disciplina.

Como resultado, constatou a importância da inserção das planilhas eletrônicas para cálculos diante da quantidade de tempo utilizado em comparação ao uso da calculadora. Outro fato destacado é o estreitamento na relação aluno-professor, e um maior interesse dos educandos com relação à disciplina.

Fiel (2005) propôs um elo entre cidadania e Educação Matemática, focando no ensino de matemática financeira na perspectiva da etnomatemática, efetuando a abordagem com base em elementos presentes na experiência extraescolar do aluno, valorizando-a e tendo-a como base dos estudos.

Milan (2003) efetuou um estudo acerca do uso da calculadora HP12C e de planilhas eletrônicas para o desenvolvimento de cálculos financeiros, evidenciando a utilidade de recursos tecnológicos em sala de aula. São exploradas as funções do *software Microsoft Excel* ® para obtenção de valores em situações envolvendo análise de investimento.

Nascimento (2004) teve como objeto de estudo a reflexão acerca do conhecimento dos alunos e o pensamento dos professores a respeito da matemática financeira no Ensino Médio. A pesquisa foi motivada pelas percepções do autor enquanto professor de matemática financeira em um curso superior de Administração de Empresas.

O trabalho buscou responder questões relacionadas à forma, quantidade e qualidade das informações sobre matemática financeira recebidas durante o Ensino Médio, para que com elas possa exercer plenamente sua cidadania. No campo docente, buscou a visão dos professores e sua percepção da importância da matemática financeira no currículo escolar.

Como resultado, a pesquisa evidenciou a necessidade de que haja a disseminação de conhecimentos financeiros na cultura dos jovens, proporcionando-lhes um melhor exercício da cidadania, uma vez que os educandos chegam ao final do Ensino Médio sem receber formação suficiente para compreender conceitos elementares.

No que diz respeito à visão dos professores sobre a temática, é constada a percepção de relevância do conteúdo. Porém, uma parcela dos entrevistados relatou não dominar os conceitos de matemática financeira de forma integral.

Novaes (2009) utilizou a abordagem visual através do eixo das setas para trabalhar o conceito de deslocar quantias monetárias no tempo. Tal reflexão visa suprir a necessidade da compreensão de que uma mesma quantia monetária pode ter valores diferentes em determinados instantes temporais.

Citado pela autora como tendo dimensão sócio-político-pedagógica, dois dos aspectos motivadores do trabalho foram a visão de que a matemática financeira é pouco explorada no Ensino Médio e a necessidade de formar um aluno crítico, capaz de fazer uma melhor leitura da sociedade que o cerca. Mais uma vez vemos a preocupação com relação ao exercício da cidadania pelo educando, conforme elencado na LDB.

A sequência didática executada pela autora foi estruturada com base na Engenharia Didática, envolvendo o uso dos fatores de atualização do tipo $1 \pm i$ (onde i representa a taxa de juros) para acréscimos e descontos, a representação das situações-problema no eixo das setas, as relações entre o conteúdo e tópicos de progressões e funções, o uso da calculadora em sala de aula, a diversidade nas formas de resolução e a exploração de problemas práticos, mais próximos do que eventualmente poderia ocorrer no cotidiano dos alunos, objetivando o raciocínio, e não a mera memorização de fórmulas.

Nas atividades elencadas no trabalho, percebe-se a preocupação com o uso do eixo das setas mesmo na representação de cálculos básicos, envolvendo, por exemplo, o cálculo de um simples aumento sobre um determinado valor. Acreditamos que isso favorece a compreensão do conceito da evolução de capitais ao longo do tempo, principalmente pelo fato de relacionar os acréscimos e decréscimos por meio de um fator de multiplicação.

Um aspecto importante relatado na pesquisa de Novaes é a necessidade da capacitação do professor para o trabalho com matemática financeira, a fim de que domine os procedimentos necessários para a construção do conhecimento. Além disso, a autora destaca a evolução do dinheiro no tempo como objeto de estudo da matemática financeira.

Vieira (2010) explorou a articulação entre a matemática financeira e a cidadania, com reflexões a respeito de sua contextualização no cotidiano dos alunos. Por meio de uma pesquisa qualitativa envolvendo alunos e professores do Ensino Médio da cidade de Volta Redonda, no estado do Rio de Janeiro, percebe-se o despreparo dos professores para o ensino deste conteúdo e a falta da elaboração de proposta pedagógica para o ensino de matemática financeira vinculada à cidadania.

Rosetti Júnior (2010) teve como objeto de estudo o significado e a importância do ensino de matemática financeira para alunos e professores de cursos superiores de tecnologia, bem como a visão de empresários da região sobre o assunto. Nas manifestações dos alunos, observou-se que os mesmos possuem dificuldade no entendimento da linguagem financeira básica, não identificando, por exemplo, taxas de juros em propagandas.

Vendo a matemática financeira como uma ferramenta para o exercício da cidadania, Leme (2007) teve como objeto de estudo o impacto da abordagem construcionista de Seymor Papert e das potencialidades das planilhas eletrônicas no ensino de matemática financeira, por meio de um experimento de ensino envolvendo o cálculo de juros simples e compostos. Como resultado, o autor aponta que os modelos computacionais favorecem o *feedback* e a simulação de situações, favorecendo o envolvimento dos alunos acerca de um domínio considerado.

Utilizando a expressão “modelo matemático” como sinônimo de fórmula para planilha eletrônica, o autor coloca o uso do *software Microsoft Excel* ® para o cálculo de valores de juros e montantes como ambiente de aprendizagem, concluindo que o seu uso pode contribuir para a aprendizagem e favorece a formação de conceitos de matemática financeira.

Para Santos, R. (2011, p. 19),

> [...] os conteúdos, estratégias e discussões da Matemática financeira, muito mais que a descrição de algoritmos, fórmulas e cálculos descontextualizados são fundamentais para um ensino de Matemática que estimule a investigação e o espírito crítico do aluno/cidadão.

O autor, com um trabalho consonante com as ideias da Educação Matemática Crítica, expôs os resultados sobre um curso de formação continuada sobre matemática financeira para professores do Ensino Médio no estado do Rio de Janeiro. Evidenciando a utilização de *softwares* educativos no processo de ensino-aprendizagem, o autor apresenta um *software* desenvolvido especificamente para a pesquisa.

Schneider (2008) buscou questionar e analisar a importância da matemática financeira na vida das pessoas, mostrando a necessidade da compreensão de determinados conceitos da área para a tomada de decisões diante das opções de crédito acessíveis atualmente. Por meio de uma pesquisa com alunos do último ano dos ensinos fundamental e médio do sul do Brasil, o trabalho mostrou a formação fragmentada e insuficiente ilustrada pelas dificuldades dos alunos em relembrar conceitos referentes à matemática financeira aprendida na escola. Segundo o autor,

> [...] o desenvolvimento dos conceitos científicos no ambiente escolar de modo organizado, sistematizado, deveria possibilitar a apropriação dos significados dos conceitos de matemática financeira, tão importantes e necessários para que as pessoas possam estabelecer relações mais conscientes em suas atividades humanas, em especial nas de trabalho e de consumo. (p. 44).

Isso é corroborado nos dados coletados, que evidenciaram a falta de sistematização dos principais elementos de matemática financeira estudados na escola pelos alunos, embora os mesmos, em sua totalidade, reconhecem a importância do conhecimento sobre a temática para a sua vida.

Dentre as razões apontadas pelos alunos, temos desde o fato de não ser enganado em uma transação comercial à necessidade desse conhecimento para ser inserido no mundo do trabalho, ilustrando a preocupação, por mais que ainda ingênua, de obter sucesso nessas situações.

Silveira (2007) apresentou uma metodologia construtivista onde se privilegia a elaboração de projetos em sala de aula por meio de planilhas eletrônicas. Com a proposta, o autor coloca o laboratório de informática como um ambiente onde as planilhas eletrônicas são uma ferramenta de aprendizagem e simulação. Segundo Silveira,

> A formação de um aluno crítico, reflexivo e com postura cidadão está associada na ação do professor que necessita estar ciente de sua função como instrutor e mediador do processo de aprendizagem. O conhecimento do professor sobre a Matemática necessária ao desenvolvimento dos projetos é ressaltado, assim como sua atualização profissional no decorrer do exercício do magistério. (p. 3).

Concordamos com a colocação do autor, pois acreditamos que para o ensino de qualidade, é essencial a formação continuada do professor, sendo também necessária a constante revisão da prática docente.

Ainda, segundo Silveira,

> Nesse cenário, a capacitação do professor deve ser voltada para o ensino de conhecimentos matemáticos que sejam significativos, coerentes com a atualidade, acessíveis a todos e despertem o senso crítico e proporcionem a educação cidadã e inclusiva. (p. 27).

Vemos aqui um ponto de vista que coloca o professor, de certa forma, como instrumento de transformação do aluno, proporcionando o desenvolvimento para a cidadania. Partilhamos da mesma visão, por acreditarmos que uma formação integral não deve ser pautada somente na transmissão de conhecimentos, servindo também de ferramenta de inclusão social.

Sousa (2012) analisou as potencialidades e limitações de uma proposta de implementação de atividades de educação financeira no âmbito da Educação Matemática. Baseada na metodologia de resolução de problemas, dentre seus objetivos se encontra a análise da mudança de postura dos alunos no tratamento de questões financeiras, buscando a compreensão da forma como os alunos utilizam a matemática para tal.

Para Sousa, “a Educação Financeira e Econômica se torna necessária na formação de uma consciência ética e social no ganho e uso do dinheiro” (p. 16). Mais uma vez vemos a preocupação de se utilizar da matemática como ferramenta de qualidade na gestão de capital pessoal.

Segundo a autora,

> [...] uma população educada financeiramente pode modificar a realidade financeira de um lugar. Porém, para se compreender o contexto social e econômico em que estamos inseridos, é necessário mais do que saber gerir bem os próprios recursos financeiros: é preciso entender as relações econômicas, que, muitas vezes, não estão visíveis. (p. 21).

Nessa perspectiva, vemos a importância da compreensão dos conceitos básicos envolvidos em operações financeiras, em especial, no universo dos empréstimos e financiamentos disponíveis ao consumidor.

A proposta trabalho de Sousa incorporou recursos tecnológicos de simulação, dentre os quais podemos destacar as planilhas eletrônicas e aplicativos *online* disponíveis em sites de instituições bancárias. A poupança é posta como uma ferramenta para a melhoria social através do hábito de poupar.

Nas atividades desenvolvidas, a autora promoveu discussões sobre o bom uso do dinheiro envolvendo simulações através de planilhas eletrônicas previamente programadas para os cálculos. O mesmo foi feito com o uso de aplicativos dos sites de instituições bancárias. A abordagem de temas como o planejamento financeiro por meio de investimentos e de previdência privada desencadeou uma série de discussões e questionamentos na população escolar envolvida, evidenciando que alunos do Ensino Médio podem ter interesse em relação à temática financeira, principalmente porque, num futuro próximo, esses adolescentes poderão necessitar da matemática para analisar situações similares.

É possível perceber a relevância desse tipo de discussão no ambiente escolar, principalmente no que diz respeito à disciplina de matemática. Porém, possivelmente por ter sido efetuado como atividade extraclasse, as atividades não abordam toda a matemática existente no funcionamento desses simuladores.

Nas palavras da autora,

> “a matemática que surge pela necessidade de uma situação-problema se torna dotada de utilidade e significado. O aprendizado tende a ser mais prazeroso, e o aluno tem maior chance de reconhecer a matemática como uma ciência importante para a sua vida, bem como para a sociedade, melhorando assim o seu interesse e, consequentemente, o seu aprendizado.” (p. 131)

Nesse sentido, verifica-se que o uso da matemática em situações que eventualmente podem ocorrer na vida dos alunos pode representar um caráter mais atrativo do que a resolução mecânica de cálculos envolvendo a temática, mobilizando os alunos para o estudo da matemática.

Herminio (2008) abordou a forma como o conteúdo de matemática financeira é abordado no ensino e como os professores de matemática veem o conteúdo. Por meio de um projeto de ensino envolvendo a resolução de problemas como metodologia, o trabalho envolveu reflexões sociais relacionadas à temática. O objetivo do trabalho foi proporcionar oportunidade dos alunos serem co-construtores de seu conhecimento, envolvendo questões sociais, éticas, políticas, direitos e deveres.

Em resumo, embora as investigações anteriormente citadas possuam enfoques diferentes, as características e conclusões particulares dessas nos conduzem por um caminho onde se torna necessário o uso de ferramentas matemáticas e recursos tecnológicos para melhorar a compreensão sobre conceitos básicos de matemática financeira da população escolar, evidenciando que alunos da educação básica possuem anseios relacionados à gestão pessoal de recursos financeiros.

Além de mediar o contato do aluno com a matemática financeira, não deve ser deixado de lado o aspecto relacionado à cidadania, visando o uso consciente do dinheiro e a aplicação do conhecimento para a tomada de decisões.

3 TECNOLOGIA E ENSINO DE MATEMÁTICA

Muito se discute atualmente sobre o uso de tecnologia em sala de aula. Há os que a defendem e os que a criticam, pondo em xeque o seu caráter formador. Para Penteado (2000, p. 23), “Para explorar o potencial educacional das Tecnologias Informáticas (TI), é preciso haver mudanças na organização da escola e, particularmente, no trabalho do professor.”

Neste sentido, dois fatores que destacamos como relevantes à implementação do uso da tecnologia no ambiente escolar são a resistência do docente à introdução de novas abordagens em sala de aula, bem como sua preparação técnica para tal desafio. Tais mudanças “[...] afetam a zona de conforto da prática do professor e criam uma zona de risco caracterizada por baixo índice de certeza e controle da situação de ensino” (PENTEADO, 2000, p. 23).

Outro fator que podemos destacar é a estrutura que o ambiente escolar oferece. Para que a implementação do uso de tecnologias seja efetivado com sucesso, a escola deve possuir um laboratório de informática que corresponda às necessidades do professor e do quantitativo de alunos por turma, o que eventualmente pode não ser suprido pelos estabelecimentos de ensino, uma vez que isso está relacionado com questões financeiras.

Entre os autores favoráveis à inserção da informática no ambiente escolar, muitas são as justificativas citadas que implicam seu uso em sala. Gravina e Basso (2012, p.12-13) destacam que o desenvolvimento da sociedade e de tecnologias são processos que se realimentam, sendo que temos na tecnologia digital uma ampliação de possibilidades para “experimentos de pensamento”, quando comparadas aos textos e desenho estático, disponibilizando ferramentas que suportam a exteriorização, diversificação e ampliação de pensamentos.

Gravina e Basso (2012, p.34) ainda afirmam que

> [...] as mídias digitais se tornam realmente interessantes quando elas nos ajudam a mudar a dinâmica da sala de aula na direção de valorizar o desenvolvimento de habilidades cognitivas com a concomitante aprendizagem da Matemática.

Para Cox (2003, p.63),

> [...] a informática é um dos meios que pode contribuir mais significativamente com a construção e a vivência da cidadania no ambiente escolar, pois pode ser de grande serventia para o desenvolvimento de projetos de pesquisa que, por sua vez, ao desafiar o aprendiz com problemas exigentes de críticas e criativas soluções, acabam por contribuir com a formação do verdadeiro cidadão.

Entre os requisitos necessários para o sucesso na construção da escola repensada com a inserção de computadores listados por Cox, destaca-se a sensibilização dos agentes escolares, a preparação do professor, equipar o ambiente escolar com a estrutura adequada e o ajuste do funcionamento das atividades escolares. Nessa perspectiva, torna-se evidente a necessidade da preparação do professor voltada para o caráter investigativo.

Esse aspecto de possibilidades de simulação se torna um diferencial da abordagem por meio do uso da tecnologia digital em sala. O fato de poder simular situações pode favorecer a percepção de aspectos que normalmente não são percebidos de forma direta pelos alunos ou que por limitações temporais não seriam exploradas. Nesse contexto, o fato de poder simular acaba se tornando um modo do aluno fazer suas próprias investigações. Caberá ao professor nortear as explorações pertinentes, para que não haja desvio de foco dos objetivos principais do que se está estudando.

Borba e Penteado (2005, pg. 45), destacam que “uma nova mídia, como a informática, abre possibilidades de mudanças dentro do próprio conhecimento.” Os autores ainda apontam a informática como

> [...] uma nova extensão de memória, com diferenças qualitativas em relação às outras tecnologias da inteligência e permite que a linearidade de raciocínios seja desafiada por modos de pensar, baseados na simulação, na experimentação e em uma “nova linguagem” que envolve escrita, oralidade, imagens e comunicação instantânea. (2005, p.48)

Para Santos, A. (2011, p. 46),

> O uso do computador como ambiente de aprendizagem, utilizando diferentes representações de um mesmo conceito pode contribuir para o estabelecimento das relações entre as diferentes representações e ao surgimento de ideias pra uma formação de conceito que podemos chamar de processos de investigação. Neste processo o indivíduo deve manipular e investigar mentalmente os objetos.

Nessa perspectiva, cabe salientar que deve ser dada liberdade para que os alunos possam fazer a análise dos objetos estudados e o estímulo para a investigação.

Gracias (2000, p. 10), ressalta a importância da preparação do professor com relação ao uso das tecnologias e as transformações que essa prática pode ocasionar na função do professor em sala de aula. Segundo a autora,

> O professor é o responsável direto pelo uso do computador na sala de aula e as possibilidades de trabalho dependerão do seu desempenho. Embora a presença do computador na sala de aula possa promover um encantamento inicial e motivação nos alunos, esse clima logo acabará se o professor não desenvolver um plano de atividades que os tire da passividade. Investigar na formação de professores é uma condição necessária para qualquer transformação nas relações educacionais.

No entanto apesar de ser uma alternativa viável e que pode chamar a atenção dos alunos para o estudo e uso da matemática, o uso indiscriminado e não planejado da informática no ambiente escolar pode vir a ser uma ferramenta que de pouco servirá para o ensino-aprendizagem de matemática.

Embora o fascínio pela introdução deste novo elemento no ambiente escolar seja grande, a inserção da informática na sala de aula deve ser feita de maneira planejada e cautelosa pelo professor. Ao optarmos pelo uso da tecnologia da informação na sala de aula deve ser revista a relevância das demais ferramentas disponíveis, pois se corre o risco de deixar de lado o que antes era tido como importante (BORBA; PENTEADO, 2002, p. 64).

Desta forma, vemos que somente a presença da informática no ambiente escolar não é fator suficiente para que haja aprendizagem. É necessário o planejamento cuidadoso do docente envolvido, de forma a delinear a exploração pelos alunos, englobando no processo de aprendizagem o caráter investigativo.

Borba e Penteado (2002, p. 88), sugerem que uma aula expositiva, seguida de exemplos no computador, aparenta ser uma forma de “domesticar” essa mídia, sendo as propostas pedagógicas que enfatizam a experimentação, visualização, simulação, comunicação eletrônica e problemas abertos uma forma de se evitar esta “domesticação”, estando em sinergia com a informática.

Segundo Cox (2003, p. 11), é necessária uma crítica acurada quanto ao uso dos computadores em sala de aula, para que se possa aproveitar o melhor possível dos mesmos sem incorrer ao erro de subestimá-los ou superestimá-los, tornando-se necessário pesquisar. Nesse sentido, o uso das planilhas eletrônicas, por exemplo, deve ser feito com prudência, diante do seu potencial para a realização de cálculos e das inúmeras funções automáticas que possuem.

Como exemplo, podemos tomar o cálculo da média aritmética entre dois números. Utilizando o *software Microsoft Excel* ®, por exemplo, podemos efetuar esse cálculo de pelo menos duas formas distintas: usando a fórmula explícita para o cálculo da média aritmética ou pelo comando do *software*.

Desta forma, para calcular a média aritmética entre os números 15 e 20, podemos optar por fazê-la utilizando o conceito de média ou utilizando os comandos do *software*, conforme indicado a seguir:

OPÇÃO I – Usando a fórmula para o cálculo da média aritmética:

a) Na célula A1 digitamos o número 15;
b) Na célula A2 digitamos o número 20;
c) Na célula A3 digitamos a fórmula =(A1+A2)/2

OPÇÃO II – Usando o comando do software:

a) Na célula A1 digitamos o número 15;
b) Na célula A2 digitamos o número 20;
c) Na célula A3 digitamos o comando =MÉDIA(A1; A2)

Embora nos dois casos se obtenha o mesmo resultado, conforme apresentado na Figura 1, na opção I o aluno é levado a utilizar a definição de média aritmética para efetuar o cálculo. Dessa forma, o conteúdo matemático não é deixado de lado, como ocorre ao se adotar a opção II.

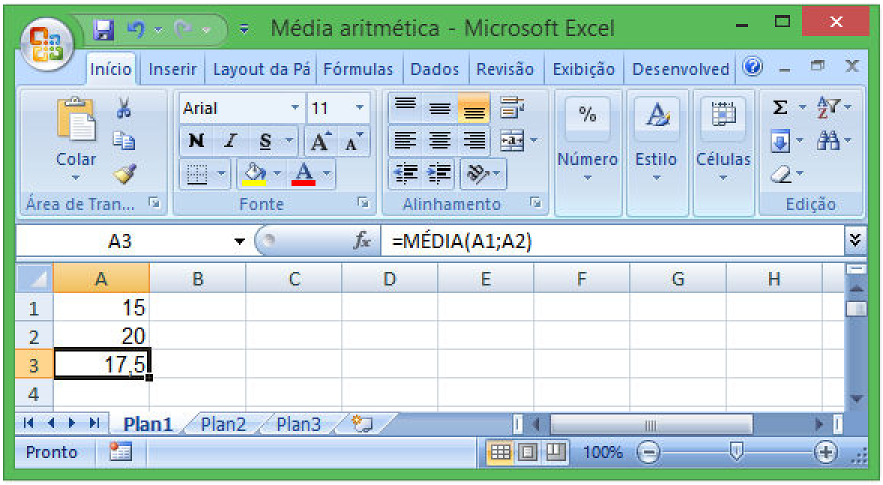


Figura 1 – Cálculo da média aritmética utilizando o software Microsoft Excel ®

Vemos nesse simples exemplo a necessidade de se fazer o uso adequado da ferramenta. Para um número pequeno de dados, o uso da fórmula para o cálculo da média aritmética favorece a internalização do conceito de média aritmética. Já para uma grande quantidade de dados, a opção II seria a melhor alternativa.

Entre as utilidades dos computadores no âmbito do desenvolvimento de projetos de pesquisa listadas por Cox (2003, p. 64), podemos destacar a exposição dos resultados obtidos pelos alunos nos estudos realizados. Essa diversificação pode ser feita utilizando inclusive os recursos computacionais. A valorização do trabalho discente, bem como o fato de disseminar o que foi estudado à comunidade escolar, poderá despertar ainda mais o interesse pela pesquisa.

Conforme citado anteriormente, outro aspecto que deve ser considerado e que pode limitar o uso da informática no ambiente escolar é a estrutura que a escola dispõe para que aulas com o uso do computador sejam possíveis. Nesse âmbito, cada vez mais se tornam frequentes ações governamentais para suprir essa necessidade nas escolas públicas.

Diante dos aspectos aqui apontados, o professor de matemática deve estar preparado para contornar os desafios e aproveitar as oportunidades que a informática pode promover no ambiente escolar, tendo em mente a necessidade do seu constante aprimoramento, no sentido de se capacitar para o uso das tecnologias em sala de aula.

4 MATEMÁTICA FINANCEIRA E PROGRESSÕES NUMÉRICAS

Conforme citado no início do capítulo 2, entre as finalidades da educação básica, estão incluídos o pleno desenvolvimento do educando e o seu preparo para o exercício da cidadania. Desta forma, espera-se que os conteúdos estejam inter-relacionados, de forma que o estudo desses não seja meramente pautado na resolução de situações-problema sem sentido prático.

No entanto, entre os livros didáticos utilizados na rede pública de ensino, poucos são os que englobam aplicações dos conteúdos matemáticos abordados no Ensino Médio. Lima (2007, p. 171), destaca que

> São praticamente inesgotáveis as possibilidades de enriquecer os livros didáticos – e consequentemente as aulas – com uma variedade de situações corretas que requerem, para serem analisadas eficazmente, o emprego de logaritmos, sistemas lineares, análise combinatória, probabilidades, coordenadas no plano ou no espaço, somente para mencionar alguns exemplos de tópicos que são estudados no nível médio. Habitualmente, porém, os exercícios referentes a esses assuntos se limitam a práticas manipulativas, problemas artificiais ou mesmo aplicações que não tem mais cabimento hoje em dia.

Tal preocupação se repete no que diz respeito ao ensino de Progressão Aritmética (PA) e Progressão Geométrica (PG). Sobre estes, Lima et. al. (2006, p. 40-43), apontam como desnecessários os seguintes tópicos:

- Relação entre três termos consecutivos de uma PA ou PG;
- Fórmulas para facilitar o cálculo da razão, número de termos e 1º termo de uma progressão;
- Cálculo do produto dos termos de uma PG;
- Problemas envolvendo soma ou diferenças de dois termos quaisquer de uma PA ou PG.

Também se destaca a importância da relação entre progressões geométricas e a ideia de taxa de crescimento constante, bem como a necessidade do uso da calculadora para a resolução de problemas reais envolvendo progressões geométricas.

A relação entre progressões geométricas e a ideia de taxa de crescimento constante é primordial para o entendimento das noções básicas do cálculo de juros compostos. No entanto, boa parte dos livros didáticos ao alcance do professor é permeada de atividades que englobam o que Lima et. al. apontam como desnecessário ao estudo de progressões.

Diante disso, compartilhamos da ideia do autor no sentido de explorar a relação entre progressões e taxas de crescimento constante, mais especificamente, para a inserção do conceito de juro composto.

Embora a taxa de crescimento possa ser explorada em diversos contextos, a temática monetária talvez seja a que mais chame a atenção do aluno do Ensino Médio, pois estes já possuem anseios referentes ao mundo do trabalho, sendo a situação financeira familiar e as inclinações pessoais fatores influentes no momento de decidir entre a carreira universitária e o ingresso no mercado de trabalho (LIMA, 2007, p. 168).

Em relação às abordagens de matemática financeira em livros didáticos, Coser Filho (2008) constatou a existência de uma lacuna e não unanimidade com relação às formas como a temática foi trabalhada. Embora haja a menção de que em alguns casos seria possível utilizar progressões aritméticas e geométricas para a escrita e resolução das situações-problema, apresenta-se estreitamente a relação entre o estudo de progressões e cálculos de matemática financeira.

Conforme as Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais para as Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias (2000, p. 122), na área de matemática, entre as unidades temáticas do eixo estruturante “Álgebra: números e funções” figura a temática “sequências numéricas: progressões e noção de infinito”. Dentro desse tema, em livros didáticos normalmente são apresentadas somente a PA e PG. No entanto, por estar exposta de forma genérica, há a abertura para uma abordagem diferenciada do estudo de progressões.

Neste sentido, torna-se útil a introdução dos conceitos e cálculos das temáticas de PAs e PGs por meio da resolução de relações de recorrência. Tal abordagem se torna necessária para que os alunos possam modelar situações-problema utilizando equações de diferenças, as quais em sua maioria apresentam maior complexidade em relação às PAs e PGs e, em alguns casos, constituindo-se na maneira mais prática para se modelar determinados problemas.

Posteriormente, as ideias trabalhadas nas atividades serão aproveitadas na elaboração de simuladores de situações envolvendo operações financeiras. As atividades foram estruturadas para um contexto onde o aluno já tenha tido contato anterior com o cálculo de porcentagem, razão pela qual omitiremos a sua abordagem conceitual.

A seguir, apresentamos o referencial teórico-matemático que embasou as atividades estruturadas neste trabalho. Listaremos formas de abordagem do estudo de matemática financeira no Ensino Médio relacionando os conceitos fundamentais da temática com sequências numéricas.

Iniciamos pelo estudo de progressões por meio da resolução de recorrências de primeira ordem que, por fim, resultarão na abordagem de casos especiais de relações de recorrências lineares, as progressões aritméticas e geométricas, e suas aplicações em matemática financeira.

4.1 RECORRÊNCIAS LINEARES DE PRIMEIRA ORDEM

Muitas sequências são definidas recursivamente, ou seja, por meio de uma regra que permite expressar qualquer termo da sequência em função de seus antecessores. Essas regras, ou relações, são chamadas de relações de recorrência ou, simplesmente, recorrências.

Uma recorrência é dita de primeira ordem quando expressa x_{n+1} em função de x_n. Tal recorrência será linear se, e somente se, a função de x_n for do primeiro grau (LIMA et al., 2006).

Desta forma, são exemplos de recorrências lineares:

$$x_{n+1} = 2x_n,$$
$$x_{n+1} = -3x_n + 4,$$
$$x_{n+1} = x_n - 1,$$
$$x_{n+1} = 4x_n + 5.$$

Resolver uma recorrência significa obter uma função de n com a qual seja possível calcular o valor de qualquer x_n sem utilizar a recorrência original. A seguir, apresentamos exemplos de resolução de recorrências lineares e a formalização dos métodos de resolução para alguns casos particulares, incluindo as progressões aritméticas e geométricas.

4.1.1 Solução de uma equação de recorrência linear

A seguir, descrevemos como determinar a expressão que exprime a recorrência linear do tipo $x_{n+1} = k.x_n$, sendo k uma constante, como uma função de n.

EXEMPLO 4.1: Seja $x_{n+1} = 3x_n$ uma relação de recorrência, tal que $x_1 = 3$. Obtenha a função que expressa x_n em função de n.

SOLUÇÃO:

Iniciamos escrevendo a sequência de termos da recorrência, suprimindo parte deles e substituindo por reticências, conforme indicado a seguir:

$$x_2 = 3x_1$$
$$x_3 = 3x_2$$
$$x_4 = 3x_3$$
$$\vdots$$
$$x_{n-1} = 3x_{n-2}$$
$$x_n = 3x_{n-1}$$

Multiplicando ordenadamente os primeiros e segundos membros de cada igualdade, teremos:

$$x_2.x_3.x_4 \ldots x_{n-1}.x_n = 3x_1.3x_2.3x_3 \ldots 3x_{n-2}.3x_{n-1} \tag{4.1}$$

Dividindo os dois membros da Eq. 4.1 por $x_2.x_3.x_4 \ldots x_{n-1}$ e agrupando o produto de base três utilizando a notação de potência, teremos que $x_n = 3^{n-1}.x_1$, já que o número 3 aparece $n-1$ vezes. Uma vez que $x_1 = 3$, obteremos $x_n = 3^n$.

EXEMPLO 4.2: Seja $x_{n+1} = nx_n$, com $x_1 = 2$. Encontre a expressão que exprime x_n em função de n.

SOLUÇÃO:

Temos que:

$$x_2 = x_1$$
$$x_3 = 2x_2$$
$$x_4 = 3x_3$$
$$\vdots$$
$$x_{n-1} = (n-2).x_{n-2}$$
$$x_n = (n-1).x_{n-1}$$

Multiplicando os membros das igualdades, teremos a Eq. 4.2:

$$x_2.x_3.x_4 \ldots x_{n-1}.x_n = x_1.2x_2.3x_3 \ldots (n-2)x_{n-2}.(n-1).x_{n-1} \tag{4.2}$$

Dividindo a Eq. 4.2 por $x_2.x_3.x_4 \ldots x_{n-1}$, Obtemos a Eq. 4.3:

$$x_n = 2.3\ldots(n-2)(n-1).x_1 \tag{4.3}$$

Substituindo $x_1 = 2$ e fazendo $2.3 \ldots (n-2).(n-1) = (n-1)!$ na Eq. 4.3, obteremos a Eq. 4.4, solução da recorrência $x_{n+1} = nx_n$:

$$x_n = 2(n-1)! \tag{4.4}$$

Como se pode perceber, os cálculos acima são bastante simples, bastando para isso o conhecimento acerca de resolução de equações do primeiro grau. É de se estranhar que tal abordagem raramente seja efetuada no Ensino Médio.

4.2 PROGRESSÕES ARITMÉTICAS

Sugerimos a introdução da temática de sequências pela notação de relações de recorrência como elemento desafiador para que os alunos possam escrever a expressão que exprime uma progressão aritmética apenas pela sua definição, em detrimento à apresentação deste tópico pelo professor.

Definição 4.1: Uma progressão aritmética é uma sequência numérica na qual a diferença entre dois termos consecutivos quaisquer é sempre igual a uma constante r, a qual chamamos de razão da progressão (MORGADO; WAGNER, ZANI, 2001, p. 01).

Pela Definição 4.1, podemos escrever uma PA de primeiro termo igual a a_1 e razão igual a r por:

$$
\begin{gathered}
a_2 = a_1 + r \\
a_3 = a_2 + r \\
\vdots \\
a_{n-1} = a_{n-2} + r \\
a_n = a_{n-1} + r
\end{gathered}
$$

Somando os membros das igualdades ordenadamente, obteremos a Eq. 4.5:

$$a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-1} + a_n = a_1 + r + a_2 + r + \ldots a_{n-2} + r + a_{n-1} + r \tag{4.5}$$

Subtraindo $a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1}$ em ambos os membros da Eq. 4.5 e reescrevendo a soma dos fatores iguais a r, obteremos a Eq. 4.6, que permite calcular o n-ésimo termo de uma progressão aritmética em função da razão e do primeiro termo:

$$a_n = a_1 + (n-1)r \tag{4.6}$$

EXEMPLO 4.3: Numa PA de razão 15 e primeiro termo igual a 2, qual o 13º termo?

SOLUÇÃO:

Devemos calcular a_{13}, que nesse caso é dado por $a_{13} = a_1 + 12r = 182.$

A abordagem de progressões por meio de relações de recorrência pode ser facilitadora do entendimento de outras relações entre os termos da progressão. O raciocínio utilizado para calcular a expressão que determina o termo geral de uma PA pode ser utilizado não necessariamente escrevendo a PA iniciando por a_1.

EXEMPLO 4.4: Sem perda de generalidade, podemos começar a escrever a sequência a partir de um a_k qualquer e obter a relação que permite calcular um termo de uma PA a partir de qualquer outro.
SOLUÇÃO:

Temos que:

$$a_k = a_{k-1} + r$$
$$a_{k+1} = a_k + r$$
$$\vdots$$
$$a_{n-1} = a_{n-2} + r$$
$$a_n = a_{n-1} + r$$

Somando os membros das igualdades ordenadamente, teremos:

$$a_k + a_{k+1} + \ldots + a_n = a_{k-1} + r + a_k + r + \ldots + a_{n-2} + r + a_{n-1} + r \tag{4.7}$$

Subtraindo $a_k + a_{k+1} + \cdots + a_{n-1}$ em ambos os membros da Eq. 4.7 e reescrevendo a soma dos fatores iguais a r, obteremos a Eq. 4.8:

$$a_n = a_{k-1} + (n - k + 1)r \tag{4.8}$$

Ou ainda, fazendo $q = k - 1$, temos $a_n = a_q + (n - q)r$.

Desta forma, é fácil perceber que em qualquer PA de razão r, valem, por exemplo, as igualdades a seguir:

$$a_5 = a_3 + 2r,$$
$$a_{13} = a_9 + 4r,$$
$$a_{152} = a_{124} + 28r.$$

4.2.1 Soma dos termos de uma progressão aritmética finita

Um fato histórico bastante peculiar acerca de progressões aritméticas é a fórmula que expressa a soma dos termos de uma PA. Carl Friedrich Gauss, aos sete anos de idade, surpreendeu seu professor ao apresentar a soma dos números naturais de 1 a 100 em poucos minutos. Seu professor, esperando que o trabalho levasse pelo menos uma hora, surpreendeu-se quando o jovem Gauss apresentou a soma, que tem como resultado 5050.

Gauss explicou que para tal feito efetuou as somas $1 + 100$, $2 + 99$, $3 + 98$, e assim por diante, de forma que obteve 50 respostas iguais a 101. Desta forma, o resultado da soma é igual a 50×101, ou seja, 5050 (MORGADO; WAGNER, ZANI, 2001, p. 04).

O raciocínio utilizado por Gauss consiste em escrever a soma dos n primeiros termos da PA de forma inversa. Sendo S_n a soma procurada, podemos escrevê-la de duas formas, isto é:

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \ldots + a_{n-3} + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n, \tag{4.9}$$

$$S_n = a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + a_{n-3} + \ldots + a_4 + a_3 + a_2 + a_1. \tag{4.10}$$

Somando ordenadamente os termos das Eq. 4.9 e 4.10, obteremos a Eq. 4.11:

$$2S_n = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + \ldots + (a_2 + a_{n-1}) + (a_1 + a_n) \tag{4.11}$$

É fácil perceber que as somas dos termos acima é constante e igual a $a_1 + a_n$, aparecendo n vezes no segundo membro da igualdade. Com isso, obtemos a Eq. 4.12:

$$2S_n = (a_1 + a_n)n \tag{4.12}$$

Desta forma, a soma dos n primeiros termos de uma PA é dada pela Eq. 4.13:

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2} \tag{4.13}$$

Por exemplo, para a soma dos números naturais de 1 a 100, teremos uma PA de razão igual a 1, com $a_1 = 1$ e $a_{100} = 100$. Logo, para esta PA, $S_{100} = \frac{(1+100)100}{2} = 5050$, tal qual Gauss encontrou.

4.3 PROGRESSÕES GEOMÉTRICAS

Assim como para a determinação da expressão que exprime uma PA, as recorrências podem ser utilizadas para a determinação da expressão que exprime os termos de uma PG.

Definição 4.2: Uma progressão geométrica é uma sequência numérica na qual o quociente entre dois termos consecutivos quaisquer é sempre igual a uma constante real q, a qual chamamos de razão da progressão.

Consideremos uma PG $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ de razão q. Pela Definição 4.2, podemos afirmar que os termos da progressão se relacionam da seguinte forma:

$$\frac{a_2}{a_1} = q$$
$$\frac{a_3}{a_2} = q$$
$$\vdots$$
$$\frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} = q$$
$$\frac{a_n}{a_{n-1}} = q$$

Portanto, trata-se de uma recorrência na qual cada termo é definido pela igualdade $a_n = a_{n-1}.q$. Reescrevendo as igualdades acima utilizando essa notação, teremos:

$$a_2 = a_1.q$$
$$a_3 = a_2.q$$
$$\vdots$$
$$a_{n-1} = a_{n-2}.q$$
$$a_n = a_{n-1}.q$$

Multiplicando os membros das igualdades ordenadamente, obteremos a Eq. 4.14:

$$a_2.a_3 \dots a_{n-1}.a_n = a_1.q.a_2.q \dots a_{n-2}.q.a_{n-1}.q \tag{4.14}$$

Dividindo ambos os membros da Eq. 4.14 por $a_2.a_3 \dots a_{n-1}$ e escrevendo o produto dos fatores iguais a q na forma de potência, obtemos a Eq. 4.15:

$$a_n = a_1.q^{n-1} \tag{4.15}$$

Tal qual em uma PA, conhecendo-se o primeiro termo e a razão da PG, podemos escrever qualquer termo da sequência. De forma análoga ao visto para a PA, podemos calcular um termo de uma PG a partir de qualquer outro, mediante a relação $a_n = a_m.q^{n-m}$.

4.3.1 Soma dos termos de uma progressão geométrica finita

A soma S_n dos n primeiros termos de uma progressão geométrica finita $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ de razão q pode ser escrita conforme a Eq. 4.16:

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n \tag{4.16}$$

Multiplicando ambos os membros da Eq. 4.16 pela razão q, obteremos a Eq. 4.17:

$$S_n.q = a_1.q + a_2.q + a_3.q + \ldots + a_{n-2}.q + a_{n-1}.q + a_n.q \quad (4.17)$$

Pela definição de PG, temos que $a_{n-1}.q = a_n$. Desta forma, a Eq. 4.17 pode ser reescrita como a Eq. 4.18:

$$S_n.q = a_2 + a_3 + a_4 + \ldots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n \quad (4.18)$$

Subtraindo ordenadamente os termos da Eq. 4.16 dos termos da Eq. 4.18, teremos a Eq. 4.19:

$$S_n.q - S_n = a_2 - a_1 + a_3 - a_2 + \ldots + a_n - a_{n-1} + a_n.q - a_n \quad (4.19)$$

Simplificando, a igualdade se reduz a $S_n(q-1) = a_n q - a_1$, que pode ser reescrita conforme a Eq. 4.20:

$$S_n = \frac{a_n q - a_1}{q-1} \quad (4.20)$$

Note-se que a soma dos n primeiros termos de uma PG depende da razão, do primeiro e do último termo. No entanto, substituindo a Eq. 4.15 na Eq. 4.20, podemos reescrevê-la conforme indicado na Eq. 4.21:

$$S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q-1} \quad (4.21)$$

Assim, a soma dos n primeiros termos de uma PG também pode ser calculada conhecendo-se a razão e o primeiro termo.

4.4 RELAÇÕES DE RECORRÊNCIA LINEARES DO TIPO $x_{n+1} = A.x_n + B$

Para a resolução de relações de recorrência do tipo $x_{n+1} = A.x_n + B$, com A e B reais e $x_0 = c$, utilizaremos o seguinte teorema:

Teorema 4.1: Sendo a_n uma solução não nula da relação de recorrência $x_{n+1} = A.x_n$, então a substituição $x_n = a_n.y_n$ transforma a relação de recorrência $x_{n+1} = A.x_n + B$ em $y_{n+1} = y_n + B(A.a_n)^{-1}$ (adaptado de LIMA et al., 2006, p.71).

Demonstração: Sendo a_n uma solução não nula da recorrência $x_{n+1} = A.x_n$, teremos que $a_{n+1} = A.a_n$. Substituindo $x_n = a_n.y_n$ na relação de recorrência $x_{n+1} = A.x_n + B$, teremos a Eq. 4.22:

$$a_{n+1}.y_{n+1} = A.a_n.y_n + B \tag{4.22}$$

Substituindo $A.a_n$ por a_{n+1} na Eq. 4.22, obtemos a Eq. 4.23:

$$a_{n+1}.y_{n+1} = a_{n+1}.y_n + B \tag{4.23}$$

Finalmente, dividindo ambos os membros da Eq. 4.23 por a_{n+1}, a recorrência se reduz a $y_{n+1} = y_n + B(a_{n+1})^{-1}$, ou seja, sua solução é dada pela Eq. 4.24:

$$y_{n+1} = y_n + B(A.a_n)^{-1} \tag{4.24}$$

■

Assim, utilizando o Teorema 4.1, para resolver a relação de recorrência $x_{n+1} = A.x_n + B$, primeiramente necessitaremos de uma solução particular da relação de recorrência $x_{n+1} = A.x_n$. Escrevendo os termos da relação de recorrência $x_{n+1} = A.x_n$, teremos que:

$$\begin{gathered} x_2 = A.x_1 \\ x_3 = A.x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} = A.x_{n-2} \\ x_n = A.x_{n-1} \end{gathered}$$

Multiplicando os membros das igualdades ordenadamente, obteremos a Eq. 4.25:

$$x_2.x_3 \dots x_{n-1}.x_n = A.x_1.A.x_2 \dots A.x_{n-2}.A.x_{n-1} \tag{4.25}$$

Dividindo ambos os membros da Eq. 4.25 por $x_2.x_3 \dots x_{n-1}$, obtemos a Eq. 4.26:

$$x_n = A^{n-1}.x_1 \tag{4.26}$$

Tomando $x_1 = 1$, temos $x_n = A^{n-1}$ como uma solução particular da recorrência $x_{n+1} = A.x_n$. Usando $x_n = A^{n-1}.y_n$ na relação de recorrência inicial, obteremos a Eq. 4.27:

$$A^n y_{n+1} = A^n.y_n + B\,. \tag{4.27}$$

Dividindo ambos os membros por A^n, a recorrência acima se resume à Eq. 4.28:

$$y_{n+1} = y_n + B.A^{-n} \tag{4.28}$$

Escrevendo os termos desta relação de recorrência, teremos:

$$y_2 = y_1 + B.A^{-1}$$
$$y_3 = y_2 + B.A^{-2}$$
$$\vdots$$
$$y_{n-1} = y_{n-2} + B.A^{-(n-2)}$$
$$y_n = y_{n-1} + B.A^{-(n-1)}$$

Somando os membros das igualdades ordenadamente, obtemos a Eq. 4.29:

$$y_2 + \ldots + y_n = y_1 + B.A^{-1} + \ldots + y_{n-1} + B.A^{-(n-1)} \tag{4.29}$$

Subtraindo $y_2 + y_3 + y_4 + \cdots + y_{n-1}$ em ambos os membros da Eq. 4.29 e utilizando a notação de somatório, a igualdade pode ser reescrita como a Eq. 4.30:

$$y_n = y_1 + \sum_{j=1}^{n-1} BA^{-n} \tag{4.30}$$

Pelas propriedades de somatório, a Eq. 4.30 pode ser reescrita como apresentado na Eq. 4.31:

$$y_n = y_1 + B\sum_{j=1}^{n-1} A^{-n} \tag{4.31}$$

Note-se que o somatório se trata da soma dos $n-2$ primeiros termos de uma progressão geométrica com $a_1 = A^{-2}$ e $q = A^{-1}$. Utilizando a Eq. 4.21 para calcular $\sum_{j=2}^{n-1} A^{-n}$, teremos a Eq. 4.32:

$$\sum_{j=1}^{n-1} A^{-n} = \frac{A^{-n} - A^{-1}}{A^{-1} - 1} \tag{4.32}$$

Desenvolvendo a expressão reescrevendo as potências de expoente negativo, podemos escrever a Eq. 4.32 como apresentado na Eq. 4.33:

$$\sum_{j=1}^{n-1} A^{-n} = \frac{1 - A^{1-n}}{A - 1} \tag{4.33}$$

Portanto, $y_n = y_1 + B\dfrac{1 - A^{1-n}}{A - 1}$. Como $x_n = A^{n-1}.y_n$, substituindo na Eq. 4.33, obtemos a Eq. 4.34:

$$x_n = A^{n-1}.y_1 + B\frac{A^{n-1} - 1}{A - 1} \tag{4.34}$$

Como $x_1 = y_1$, e $x_1 = A.c + B$, então a solução da relação de recorrência é dada pela Eq. 4.35:

$$x_n = A^n.c + A^{n-1}.B + B\frac{A^{n-1}-1}{A-1} \tag{4.35}$$

4.5 REGIME DE CAPITALIZAÇÃO SIMPLES

Iezzi; Hazzan e Degenszajn (2004, p. 44) definem o regime de capitalização simples como sendo o regime no qual os juros de cada período são constantes e dados pelo produto do capital emprestado pela taxa mensal de juros. Desta forma, podemos dizer que se um capital C é emprestado à taxa mensal i, os juros $J(n)$ devidos após n meses após o empréstimo são dados pela Eq. 4.36:

$$J(n) = Cin \tag{4.36}$$

Desta forma, o montante da dívida, ou seja, a soma dos juros com o capital emprestado, é dado pela Eq. 4.37:

$$M(n) = C(1+in) \tag{4.37}$$

Utilizando a notação de sequências, podemos reescrever as Eq. 4.36 e 4.37 como $J_n = C.i.n$ e $M_n = C(1+i.n)$. Com isso, fazendo a diferença entre dois termos consecutivos da sequência formada pelos juros e a diferença entre dois termos consecutivos da sequência formada pelos montantes, verificamos que as sequências numéricas formadas pelos juros são duas PAs de razão igual a Ci, conforme indicado nas Eq. 4.38 e 4.39:

$$J_{k+1} - J_k = Ci(k+1) - Cik = Cik + Ci - Cik = Ci \tag{4.38}$$

$$M_{k+1} - M_k = C[1+i(k+1)] - C(1+ik) = C + Cik + Ci - C - Cik = Ci \tag{4.39}$$

É importante destacar que Morgado; Wagner e Zani (2001, p. 56-57) não dão ênfase ao conceito de juros simples no livro *Progressões e Matemática Financeira*. No entanto, é mencionado o importante fato de que os juros simples são tipicamente utilizados no cálculo dos juros de mora, ou seja, nos juros cobrados em pequenos atrasos de pagamento.

4.6 REGIME DE CAPITALIZAÇÃO COMPOSTA

No regime de capitalização composta, o montante num período qualquer k é obtido aplicando a taxa periódica i sobre o montante do período imediatamente anterior. Desta forma, podemos definir o regime de capitalização composta pelo teorema a seguir.

Teorema 4.2: No regime de capitalização composta, cuja taxa periódica é i, o valor inicial C_o se transforma no montante $M_n = C_o.(1+i)^n$ após decorridos n períodos de tempo (MORGADO; WAGNER, ZANI, 2001, p. 45).

Demonstração: Seja M_k o montante após decorridos k períodos de tempo. Após decorridos $k+1$ períodos de tempo, o montante M_{k+1} é tal que $M_{k+1} = M_k + i.M_k$, ou seja, $M_{k+1} = M_k.(1+i)$.

A expressão que gera os montantes é uma recorrência linear. Assim, temos que:

$$M_1 = C_o.(1+i)$$
$$M_2 = M_1.(1+i)$$
$$M_3 = M_2.(1+i)$$
$$\vdots$$
$$M_{n-1} = M_{n-2}.(1+i)$$
$$M_n = M_{n-1}.(1+i)$$

Multiplicando os membros de cada igualdade ordenadamente, obtemos a Eq. 4.40:

$$M_1.M_2.M_3\ldots M_{n-1}.M_n = C_0(1+i).M_1(1+i).M_2(1+i)\ldots M_{n-2}(1+i)M_{n-1}(1+i) \tag{4.40}$$

Dividindo ambos os membros da Eq. 4.40 por $M_1.M_2.M_3 \ldots M_{n-1}$ e escrevendo o produto dos fatores $(1+i)$ na forma de potência, a expressão que fornece o montante após decorridos n períodos será dado pela Eq. 4.41:

$$M_n = C_0(1+i)^n \tag{4.41}$$

Desta forma, a sequência numérica dos montantes em cada período será uma progressão geométrica de razão $1+i$, podendo ainda ser escrita na forma de função conforme indicado na Eq. 4.42:

$$M(n) = C_0(1+i)^n \tag{4.42}$$

■

4.6.1 O valor do dinheiro ao longo do tempo

Segundo Morgado; Wagner e Zani (2001, p. 44-45), são exemplos de erros comuns em raciocínios financeiros:

a) Achar que quantias monetárias maiores valem mais que menores;
b) Achar que uma determinada quantia possui sempre o mesmo valor;

c) Somar quantias referidas a épocas diferentes.

A seguir, apresentamos exemplos para cada um dos erros de raciocínio anteriormente elencados.

EXEMPLO 4.5 – Item a): O valor de R$ 110,00 pode valer mais, menos ou o mesmo que R$ 100,00. Podemos tomar como exemplo a aplicação de R$ 100,00 na caderneta de poupança, na qual renderia juros e após um determinado período poderia valer mais que R$ 110,00.

EXEMPLO 4.6 – Item b): A quantia de R$ 100,00 pode ter valor superior ou inferior. Podemos tomar como exemplo um cenário econômico com inflação, onde o valor de R$ 100,00 na data de hoje terá poder aquisitivo menor após determinado período de tempo.

EXEMPLO 4.7 – Item c): A compra de um bem em 6 prestações iguais de R$ 51,00 pode ser mais vantajosa do que comprar o bem em 3 prestações de R$ 100,00. Isso porque tendo o valor para pagamento à vista, o valor pode ser aplicado em algum investimento e render juros.

Nas três situações, o fator primordial para entender onde está o erro é considerar o valor do dinheiro ao longo do tempo, ou seja, sua equivalência em épocas (ou datas focais) diferentes. Morgado; Wagner e Zani (2001, p. 46) definem a Eq. 4.43 como sendo a fórmula fundamental para a equivalência de capitais, onde A é o valor atual, i a taxa de juros e n o período de tempo:

$$F = A(1+i)^n \tag{4.43}$$

Isso se deve ao fato de que para obtermos o valor atual de um quantia antes de transcorridos n períodos de tempo, basta dividir o valor futuro por $(1+i)^n$ (ou multiplicar por $(1+i)^{-n}$). O inverso é feito para se calcular o valor futuro: multiplica-se o valor atual por $(1+i)^n$. A seguir, apresentamos um exemplo de aplicação deste conceito.

EXEMPLO 4.8: Retomando a situação apresentada no Exemplo 4.7, considerando o valor do dinheiro como 0,5% ao mês, e tomando o vencimento da primeira prestação como sendo 30 dias após a compra, vamos analisar qual a opção mais vantajosa.

SOLUÇÃO:

- O valor atual para a compra em 6 prestações de R$ 51,00 será:

$$\frac{51}{1{,}005^1}+\frac{51}{1{,}005^2}+\frac{51}{1{,}005^3}+\frac{51}{1{,}005^4}+\frac{51}{1{,}005^5}+\frac{51}{1{,}005^6}=R\$\ 292{,}26$$

- O valor atual para a compra em 3 prestações de R$ 100,00 será:

$$\frac{100}{1{,}005^1}+\frac{100}{1{,}005^2}+\frac{100}{1{,}005^3}=R\$\ 295{,}07$$

Desta forma, seria mais vantajoso comprar o bem parcelado em 6 vezes.

Com relação à análise sobre o método mais vantajoso de se efetuar uma compra (à vista ou parcelado), os cálculos, embora simples, são um tanto trabalhosos se efetuados à mão, sendo necessário recorrer a uma calculadora científica. Além disso, sobre sua resolução podemos considerar os seguintes questionamentos:

- E se fosse necessário decidir de forma rápida sobre qual a melhor proposta, como fazer?
- E se o parcelamento fosse em mais vezes, digamos 12 prestações?
- E se houver desconto para pagamento à vista, ainda assim vale a pena comprar parcelado?

Podemos obter as respostas para esses questionamentos utilizando, mais uma vez, progressões geométricas. O cálculo do valor atual de um bem parcelado em n parcelas de P reais, com a primeira parcela vencendo 30 dias após a compra, com o dinheiro valendo i ao mês, é dado pela Eq. 4.44:

$$A=\frac{P}{(1+i)^1}+\frac{P}{(1+i)^2}+\ldots+\frac{P}{(1+i)^{n-1}}+\frac{P}{(1+i)^n} \tag{4.44}$$

Observa-se que a Eq. 4.44 corresponde à soma dos termos de uma PG de razão $(1+i)^{-1}$, de primeiro termo igual a $\frac{P}{1+i}$, cujo valor é dado pela Eq. 4.45:

$$\sum_{j=1}^{n}\frac{P}{(1+i)^j}=\frac{P}{1+i}.\frac{[(1+i)^{-1}]^n-1}{(1+i)^{-1}-1} \tag{4.45}$$

Simplificando a expressão, o valor de A é dado pela Eq. 4.46:

$$A=P\frac{1-(1+i)^{-n}}{i} \tag{4.46}$$

No caso de haver desconto para a compra à vista, essa análise também pode ser utilizada, conforme apresentado no exemplo a seguir.

EXEMPLO 4.9: Um aparelho de televisão custa R$ 500,00, valor que pode ser parcelado em até 4 prestações iguais e mensais, com a primeira vencendo 30 dias após a compra. No caso de compra à vista, é dado o desconto de 5% sobre o valor do bem. Considerando que o dinheiro vale 0,5% ao mês, qual a opção mais vantajosa: comprar à vista ou parcelado?

SOLUÇÃO:

Nesse caso, o desconto dado é de 5% sobre R$ 500,00, sendo o preço para compra à vista igual a R$ 475,00. Calculando o valor atual do aparelho de televisão na época 0, usando a Eq. 4.46 teremos que $A = 100\dfrac{1-1{,}005^{-5}}{0{,}005}$, ou seja, R$ 492,59. Desta forma, é mais vantajoso comprar à vista.

Dependendo da taxa do valor mensal do dinheiro, a análise pode ter resultado diferente. No exemplo 4.9, caso o valor mensal do dinheiro fosse 2% ao mês, o valor atual na época 0 seria dado por $A = 100\dfrac{1-(1{,}02)^{-5}}{0{,}02}$, ou seja, R$ 471,35. Neste caso, seria mais vantajoso comprar a prazo. Abordaremos uma forma prática de se fazer tal análise no capítulo sobre a elaboração de simuladores.

4.7 INVESTIMENTOS E PROGRESSÕES

As situações a seguir, apresentadas por Morgado; Wagner e Zani (2001, p. 67), estão relacionadas à utilização da fórmula para o cálculo de juros compostos envolvendo montantes distintos:

SITUAÇÃO 4.1 - Determine o montante de uma série de 60 depósitos mensais de R$ 150,00 cada a juros de 0,5% ao mês.

SITUAÇÃO 4.2 - Supondo juros de 1% ao mês, quanto Ana deve investir mensalmente, durante 10 anos, para obter ao fim desse prazo, por 30 anos, uma renda mensal de R$ 1000,00?

SITUAÇÃO 4.3 - Supondo juros de 1% ao mês, quanto Gil deve investir mensalmente, durante 15 anos, para obter, ao fim desse prazo, uma renda perpétua de R$ 400,00?

Em comum, as três situações podem ser solucionadas por meio do uso de progressões geométricas, conforme apresentaremos a seguir.

4.7.1 Montante gerado por depósitos periódicos constantes

Se mensalmente um quantia P for depositada e sobre essa parcela incidir à taxa mensal i, após decorridos n períodos de tempo, o montante gerado pelo depósito inicial será $M_n = P.(1+i)^n$, o montante gerado pelo depósito do mês seguinte será $M_{n-1} = P.(1+i)^{n-1}$, e assim sucessivamente. Sobre o último depósito não incidirão juros, já que tomamos o número de depósitos como sendo igual a n.

Desta forma, a sequência dos montantes será uma progressão geométrica de razão $(1+i)^{-1}$. Para calcular a soma do montante total, efetuamos a soma dos montantes parciais, utilizando a fórmula da soma dos termos de uma progressão geométrica finita. Neste caso, teremos n termos, dos quais o primeiro é igual a $P(1+i)^n$ e o último é igual a P, sendo a soma dos n dada pela Eq. 4.47:

$$S_n = P(1+i)^n + P(1+i)^{n-1} + \ldots + P(1+i) + P \tag{4.47}$$

Pelo fato da soma de números reais ser comutativa, podemos calcular a soma acima como sendo a soma de uma PG de razão $(1+i)$. O uso de tal artifício, além de não interferir no resultado final, facilita as manipulações algébricas decorrentes da resolução.

Desta forma, utilizando a Eq. 4.21, a soma da Eq. 4.47 é dada pela Eq. 4.48:

$$S_n = P\frac{(1+i)^n - 1}{i} \tag{4.48}$$

Com isso, podemos resolver a Situação 4.1.

SOLUÇÃO:

Dados:

$P = R\$\ 150{,}00$

$i = 0{,}5\%$ ao mês

$n = 60$

Utilizando a Eq. 4.46, teremos:

$$S_{60} = 150\frac{(1{,}005)^{60} - 1}{0{,}05} \cong 10465{,}50$$

Logo, o montante gerado após serem efetuados 60 depósitos mensais de R$ 150,00 cada, a juros de 0,5% ao mês, é de aproximadamente R$ 10465,50.

4.7.2 Cálculo de Rendas Periódicas Finitas

Para se obter uma renda mensal futura, fixa e igual a R, a partir de uma aplicação financeira, é necessário que durante determinado período de tempo seja acumulado o montante M necessário para gerar tal renda.

Considerando que para tal sejam efetuados n depósitos mensais iguais a P, o rendimento mensal da aplicação seja igual a i e m seja o número de meses nos quais acontecerá o recebimento da renda, e que ao final dos n meses nenhuma outra quantia seja depositada (ou seja, acumulem-se somente os juros sobre o montante remanescente após cada retirada da quantia R), escrevendo os montantes mensais posteriores na forma de uma sequência numérica, teremos que:

$$\begin{gathered}
x_0 = M \\
x_1 = x_0.(1+i) - \mathrm{R} \\
x_2 = x_1.(1+i) - \mathrm{R} \\
\vdots \\
x_{n-1} = x_{n-2}.(1+i) - \mathrm{R} \\
x_n = x_{n-1}.(1+i) - \mathrm{R}
\end{gathered}$$

Embora a situação possa ser modelada utilizando a resolução de uma recorrência de primeira ordem, podemos analisá-la de outra forma, utilizando o cálculo do valor de M com datas focais diferentes, relacionando os períodos n e m.

Podemos calcular o valor de M no momento do primeiro saque em função de R, utilizando a Eq. 4.46, conforme apresentado na Eq. 4.49:

$$M = R\frac{1-(1+i)^{-m}}{i} \tag{4.49}$$

Para o cálculo da parcela mensal P a ser depositada para gerar M, calculamos o valor de M na época do primeiro depósito, utilizando novamente a Eq. 4.46. Assim, considerando que o valor de M na época zero será capitalizado ao longo de n meses, M pode ser calculado como apresentado na Eq. 4.50:

$$M = P\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}.(1+i)^{n} \tag{4.50}$$

Desta forma, considerando as Eq. 4.49 e 4.50, a situação é descrita pela Eq. 4.51:

$$P\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}.(1+i)^{n} = R\frac{1-(1+i)^{-m}}{i} \tag{4.51}$$

Isolando P, obtemos que o valor da parcela que deve ser depositada mensalmente para gerar a renda futura R será dado pela Eq. 4.52:

$$P = R\frac{1-(1+i)^{-m}}{(1+i)^{n}-1} \tag{4.52}$$

Com isso, podemos resolver a Situação 4.2.

SOLUÇÃO:

Dados:

$R = R\$\ 1000{,}00$
$i = 1\% = 0{,}01$
$n = 120$
$m = 360$

Usando a Eq. 4.52, teremos que $P = 1000\frac{1-(1{,}01)^{-360}}{(1{,}01)^{120}-1}$. Efetuando os cálculos, obtemos $P = \text{R\$ } 422{,}62$.

4.7.3 Cálculo de Rendas Perpétuas

Analogamente ao cálculo de rendas certas, para o cálculo de rendas perpétuas devemos efetuar o cálculo do montante M necessário para gerar a renda R. Considerando que para tal sejam efetuados n depósitos mensais iguais a P e o rendimento mensal da aplicação seja igual a i, inicialmente calculamos o valor de M na época da retirada da primeira parcela igual a R. Para isso, basta utilizar a Eq. 4.46, com n tendendo para o infinito. Desta forma, teremos a Eq. 4.53:

$$M = \lim_{n\to\infty} R\frac{1-(1+i)^{-n}}{i} \tag{4.53}$$

Assim, a fórmula que relaciona a renda perpétua R e o montante M a ser acumulado é dado pela Eq. 4.54:

$$M = \frac{R}{i} \tag{4.54}$$

Para o cálculo da parcela P que deve ser depositada mensalmente para obter M, utilizamos a Eq. 4.46 para calcular o valor de M na época do primeiro depósito, e consideramos a capitalização deste valor ao longo dos n meses seguintes, conforme descrito na Eq. 4.55:

$$M = P\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}.(1+i)^{n} \tag{4.55}$$

Das Eq. 4.54 e 4.55, obtemos a Eq. 4.56:

$$\frac{R}{i} = P\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}.(1+i)^{n} \tag{4.56}$$

Efetuando os cálculos e isolando P na Eq. 4.56, obtemos a Eq. 4.57:

$$P = \frac{R}{(1+i)^{n}-1} \tag{4.57}$$

Com isso, podemos resolver a Situação 4.3.

SOLUÇÃO:

Dados:

$R = R\$\ 400,00$

$i = 1\% = 0,01$

$n = 180$

Utilizando a Eq. 4.57, teremos $P = \frac{400}{(1,01)^{180}-1} \cong 80,07$. Desta forma, o valor do depósito mensal necessário é de aproximadamente R$ 80,07.

4.7.4 Considerações a respeito das resoluções

As resoluções apresentadas nas seções 4.7.1 a 4.7.3 podem ser utilizadas como mobilizadoras para situações envolvendo o bom uso do dinheiro. Desta forma, não é posto em prática somente a habilidade matemática nos cálculos financeiros, mas também discussões de temas influentes no cotidiano de qualquer pessoa: o planejamento e a gestão financeira pessoal.

Além disso, tais situações se tornam um momento oportuno para a inserção de temas transversais, como o princípio de cidadania, envolvendo o consumo consciente. Também é oportuno o resgate histórico e a compreensão, por mais que de forma singela, de algumas das regras que regem o sistema monetário brasileiro.

A Eq. 4.48 pode ser utilizada para explorar uma série de situações bastante interessantes. A seguir, listamos duas que podem gerar discussões acerca do tema “poupar”.

EXEMPLO 4.10: Depositando mensalmente a quantia de R$ 1,00 na poupança durante 30 anos, qual o montante acumulado?

O cálculo a ser efetuado é bastante simples, bastando calcular o valor da expressão $\frac{(1+i)^{360}-1}{i}$ utilizando a taxa média de rendimento da poupança. Essa taxa é variável, e depende da taxa de juros básicos do Brasil e da taxa referencial (TR).

Para depósitos efetuados até 03 de maio de 2012, a taxa de rendimento da poupança era de 0,5% ao mês mais a variação da TR. A partir de 04 de maio de 2012, o rendimento da poupança passou a ser igual a 70% da taxa Selic, mais a variação da TR, quando a Selic for inferior ou igual a 8,5% ao ano. Mais informações sobre o tema podem ser acessadas em http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/_Ato2011-2014/2012/Lei/L12703.htm.

As discussões e pesquisas acerca dessa temática favorecem a inserção dos alunos no entendimento de alguns aspectos do cenário econômico brasileiro. A taxa de juros básica, além de interferir diretamente na economia brasileira, acaba interferindo no rendimento da poupança, aplicação bancária existente desde o tempo do império no Brasil.

Esse momento também pode ser aproveitado para fazer um resgate histórico da evolução da caderneta de poupança. A caderneta de poupança foi criada juntamente com a Caixa Econômica Federal, por meio do Decreto nº 2.723, de 12 de Janeiro de 1861. Seu objetivo inicial era de receber, à taxa de 6% ao mês, as economias das classes menos abastadas da população.

Esse resgate histórico é bastante importante, pois remete às origens das instituições bancárias em nosso país, sendo possível também fazer comparativos de rendimento nas diferentes fixações das taxas de rendimento mensal ocorridas desde a criação da caderneta de poupança até os dias de hoje.

Voltando à resolução do Exemplo 4.10, utilizando o valor 0,5% como taxa mensal, que é a remuneração básica garantida quando a taxa Selic é maior ou igual a 8,5% ao ano, teremos que o montante acumulado é igual a $\frac{1{,}005^{360}-1}{0{,}005}$. Com o auxílio de uma calculadora científica, obtemos o valor R$ 1004,52.

A resposta encontrada pode ser aproveitada para introduzir outro tema importante na sociedade atual, o bom uso dos recursos disponíveis. Segundo o cálculo efetuado, cada R$ 1,00 economizado mensalmente ao longo de 30 anos gera o montante aproximado de R$ 1004,52. Aumentando a proporção de reais por meio de economia, pode se chegar a valores maiores. Por exemplo, ao se economizar R$ 50,00 mensais, e investindo-os na poupança, ao longo de 30 anos o montante da aplicação será de 50 vezes o valor R$ 1004,52, ou seja, igual a R$ 50226,00.

A ideia de economia pode ser praticada em simples atos, como ir de carona ou optar por um meio de transporte alternativo para ir à escola, optar por um lanche mais barato na escola, utilizar melhor os recursos provenientes da natureza, como a água, e até mesmo evitar, ou ao menos reduzir, o desperdício de alimentos.

EXEMPLO 4.11: É possível acumular um milhão de reais ao longo da vida investindo na poupança?

Obviamente, a resposta para esse questionamento depende do prazo pelo qual se pretende investir, da taxa de rendimento da poupança e do valor aplicado. Quanto maior o tempo de investimento, maior o montante gerado. Esse momento pode ser aproveitado para se discutir de que forma se relacionam as variáveis da expressão Eq. 4.48.

Por exemplo, fixando o tempo, o que acontece se for dobrada a quantia mensal depositada? E se o tempo for o dobro? E se a taxa for o dobro? Manualmente não é uma tarefa rápida, mas com a elaboração dos simuladores para cálculos financeiros, que apresentaremos adiante, isso poderá ser facilmente respondido pelos alunos.

Com relação ao uso das Eq. 4.52 e 4.57, podem ser abordadas questões referentes à previdência privada e planejamento financeiro. Outro contexto no qual a utilização da Eq. 4.52 é bastante útil é o planejamento de futuras despesas, como gastos previstos para a faculdade ou acumular o montante para comprar um veículo ou um imóvel.

4.8 ANÁLISE DE PARCELAMENTOS

Com relação à análise do método mais vantajoso de se efetuar uma compra (à vista ou a prazo), conforme apresentado nos exemplos 4.8 e 4.9, levando em conta que se disponha do valor para o pagamento do bem à vista, podemos considerar que a quantia necessária para a compra à vista possa ser investida numa aplicação financeira, rendendo juros mensalmente, sendo o valor necessário para quitar as parcelas da compra a prazo retiradas no dia do seu vencimento.

Desta forma, podemos calcular a diferença entre o valor pago a prazo e o valor pago à vista em unidades monetárias. Para isso, sendo C o valor do bem à vista e p o valor da parcela mensal a ser paga, escrevemos os montantes no momento de cada quitação das parcelas utilizando a seguinte sequência numérica:

$$\begin{gathered} x_0 = C \\ x_1 = x_0.(1+i) - p \\ x_2 = x_1.(1+i) - p \\ \vdots \\ x_{n-1} = x_{n-2}.(1+i) - p \\ x_n = x_{n-1}.(1+i) - p \end{gathered}$$

Essa relação de recorrência é do tipo $x_{n+1} = A.x_n + B$, cuja solução é dada pela Eq. 4.35, com $A = 1 + i$, $B = -p$ e $x_0 = C$. Logo, o cálculo do saldo acumulado na poupança no momento em que é paga a parcela de ordem n é dado pela Eq. 4.58:

$$x_n = C(1+i)^n - p(1+i)^{n-1} - p\frac{(1+i)^{n-1}-1}{i} \tag{4.58}$$

Retomando o Exemplo 4.9, sabemos que o desconto dado para a compra à vista é de 5%, ou seja, o aparelho de televisão custaria R$ 475,00. Caso fosse optado pela compra a prazo em 4 parcelas, usando a Eq. 4.58, o saldo remanescente na poupança após os pagamentos seria igual a:

$$x_n = 500.1{,}005^4 - 125.1{,}005^3 - 125\frac{1{,}005^3 - 1}{0{,}005} \cong 6{,}31$$

Corrobora-se o resultado obtido anteriormente, no qual foi constatado de que vale a pena comprar o aparelho à vista. O desconto dado é de R$ 25,00, enquanto o valor acumulado na poupança é de R$ 6,31.

4.9 SISTEMA DE AMORTIZAÇÃO CONSTANTE

O Sistema de Amortização Constante (SAC), como a própria denominação aponta, possui como característica principal a amortização constante da dívida referente ao valor financiado, sendo os juros de cada período calculados sobre o saldo devedor do mês anterior. A amortização mensal é calculada pelo quociente entre o valor financiado e o período de tempo do financiamento, que equivale ao número de parcelas a serem pagas.

Desta forma, sendo F o valor financiado, e n o número de parcelas, o valor da amortização mensal A será igual a $\frac{F}{n}$. Indicando por P_k o valor da parcela a ser paga no k-ésimo mês, J_k os juros a serem pagos junto com P_k e i a taxa mensal de juros do financiamento, teremos que $P_k = A + J_k$.

As séries que descrevem o valor dos juros e o saldo devedor são apresentadas na Tabela 1.

Tabela 1 – Evolução de amortização e saldo devedor no SAC

Parcela	Amortização mensal	Saldo devedor	Juros
1	$\frac{F}{n}$	$F-\frac{F}{n}=\frac{Fn-F}{n}=\frac{F(n-1)}{n}$	Fi
2	$\frac{F}{n}$	$\frac{F(n-1)}{n}-\frac{F}{n}=\frac{Fn-2F}{n}=\frac{F(n-2)}{n}$	$\frac{F(n-1)}{n}i$
⋮	⋮	⋮	⋮
k	$\frac{F}{n}$	$\frac{F[n-(k-1)]}{n}-\frac{F}{n}=\frac{Fn-kF}{n}=\frac{F(n-k)}{n}$	$\frac{F[n-(k-1)]}{n}i$
⋮	⋮	⋮	⋮
n	$\frac{F}{n}$	$\frac{F[n-(n-1)]}{n}-\frac{F}{n}=\frac{F-F}{n}=0$	$\frac{F[n-(n-1)]}{n}i=\frac{Fi}{n}$

Fonte: O autor

Analisando a Tabela 1, observamos que a sequência do saldo devedor é uma PA de razão $r_1 = -\frac{F}{n}$. Devido a isso, a sequência dos juros mensais também é uma PA, porém, de razão $r_2 = -\frac{Fi}{n}$. Temos também que o saldo devedor no k-ésimo mês é igual a $\frac{F(n-k)}{n}$.

Desta forma, podemos facilmente calcular o total de juros pagos no financiamento de duas formas. A mais simples consiste em efetuar a soma dos termos da PA dos juros mensais. Sendo J o total de juros pagos durante o financiamento, utilizando a equação 4.13, obtemos a Eq. 4.59:

$$J = \frac{Fin + Fi}{2} \tag{4.59}$$

EXEMPLO 4.12: Calcular o valor dos juros a serem pagos no financiamento de R$ 1000,00 em 5 parcelas pelo SAC, à taxa de 1% ao mês.

SOLUÇÃO:

Os juros a serem pagos são dados por $J = \frac{1000.0{,}01.5 + 1000.0{,}01}{2}$, ou seja, aproximadamente R$ 30,00.

O sistema de amortização constante consiste numa importante aplicação de progressões aritméticas, podendo ser utilizado, inclusive, como mobilização para a introdução do conceito de PA no Ensino Médio.

O entendimento sobre tal modalidade de financiamento é relevante no sentido de que essa modalidade é a comumente utilizada para o financiamento de imóveis. Desta forma, é possível desenvolver atividades com situações que eventualmente possam ocorrer no cotidiano dos alunos ou de suas famílias.

4.10 SISTEMA DE AMORTIZAÇÃO FRANCÊS (SISTEMA PRICE)

No sistema de amortização francês, ou sistema Price, as parcelas referentes ao financiamento de uma determinada quantia são constantes e iguais a um valor P. A ideia utilizada para se determinar os valores das parcelas está atrelada à ideia de equivalência de capitais, conforme visto na seção sobre o valor do dinheiro ao longo do tempo.

Seja F o valor financiado, P o valor da parcela mensal do financiamento e i a taxa mensal de juros. Como todas as parcelas serão iguais, o valor atual da quantia financiada é igual à equivalência das parcelas na data focal zero, considerando o pagamento da primeira parcela um mês após a contratação do financiamento, conforme a Eq. 4.60:

$$F = \frac{P}{1+i} + \frac{P}{(1+i)^2} + \ldots + \frac{P}{(1+i)^{n-1}} + \frac{P}{(1+i)^n} \tag{4.60}$$

Conforme visto no tópico sobre equivalência de capitais, F é equivalente à soma dos n primeiros termos de uma progressão geométrica de razão $\frac{1}{1+i}$ e $a_1 = \frac{P}{1+i}$. Desta forma, utilizando a Eq. 4.46, F pode ser calculado pela Eq. 4.61:

$$F = P\frac{1-(1+i)^{-n}}{i} \tag{4.61}$$

Assim, o valor de P é dado pela Eq. 4.62:

$$P = F\frac{i}{1-(1+i)^{-n}} \tag{4.62}$$

EXEMPLO 4.13: Se o valor de R$ 1000,00 for financiado em 5 parcelas pelo sistema francês de amortização, à taxa de 1% ao mês, calcule o valor da parcela a ser paga.

SOLUÇÃO:

O valor da parcela será dado por $P = 1000\dfrac{0{,}01}{1-(1{,}01)^{-5}} \cong \text{R\$ } 206{,}04$.

Facilmente podemos calcular o valor dos juros pagos no decorrer do financiamento. Para isso, basta efetuar a diferença entre o total pago e o valor financiado. Para o exemplo em questão, o valor total a ser pago é de R$ 1030,20. Assim, são pagos R$ 30,20 referente a juros.

4.11 COMPARATIVO ENTRE OS SISTEMAS SAC E PRICE

Em relação ao financiamento de uma determinada quantia, facilmente se percebe que os juros pagos no método SAC são inferiores aos juros pagos no financiamento pelo método Price. Entretanto, isso não é devido ao fato de uma modalidade de financiamento ser mais vantajosa em relação à outra, mas sim à amortização da dívida que é efetuada mensalmente.

Comparando os resultados obtidos nas soluções dos exemplos 4.12 e 4.13, embora o número de parcelas seja igual, no primeiro mês temos amortizações distintas nas duas modalidades de financiamento:

a) Pelo SAC, a amortização mensal é constante e igual a R$ 200,00;
b) Pelo método Price, a amortização no primeiro mês é $\text{R\$}\dfrac{206{,}04}{1{,}01^5} = \text{R\$ } 196{,}04$.

Assim, o valor dos juros pagos no primeiro mês são superiores no método Price, o que acaba se repetindo até a terceira parcela, na qual a amortização mensal é $\text{R\$}\dfrac{206{,}04}{1{,}01^3} = \text{R\$ } 199{,}98$. Na quarta parcela a amortização mensal é $\text{R\$}\dfrac{206{,}04}{1{,}01^2} = \text{R\$ } 201{,}98$ e na quinta será $\text{R\$}\dfrac{206{,}04}{1{,}01} = \text{R\$ } 204{,}00$.

Devido a isso, o SAC normalmente é utilizado para o financiamento de imóveis, pois a amortização da dívida se dará de forma mais rápida. O método Price é utilizado para financiamentos a curto prazo, como parcelamento de veículos, eletrodomésticos, móveis, e em empréstimos pessoais e consignados.

5 MATEMÁTICA FINANCEIRA EM AVALIAÇÕES OFICIAIS

Com o intuito de verificar a forma como a matemática financeira é abordada em avaliações oficiais, apresentamos a seguir a resolução de questões sobre a temática, presentes em avaliações de vestibulares de universidades da região dos Campos Gerais, no Paraná, e em avaliações do Exame Nacional do Ensino Médio, devido à sua importância regional e nacional, respectivamente.

5.1 QUESTÕES DO EXAME NACIONAL DO ENSINO MÉDIO

Embora sejam muitos os tópicos de matemática financeira com possibilidade de exploração no Ensino Médio, os mesmos normalmente não são frequentemente incluídos nas avaliações do Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM), cuja finalidade é a avaliação do desempenho escolar e acadêmico na fase final da educação básica. O exame também permite a certificação de conclusão do Ensino Médio e fundamental para os candidatos com idade igual ou superior a 18 anos, conforme critérios definidos pelo MEC.

Atualmente, também é utilizado como critério único na seleção de candidatos a cursos de graduação em algumas instituições de ensino superior, por meio do Sistema de Seleção Unificada (SiSU), ou com aproveitamento parcial do desempenho do ENEM para composição da nota em outras instituições.

Mesmo sendo um exame relevante no cenário educacional brasileiro, ainda não contempla as questões mais complexas referentes à temática financeira. Analisando as avaliações do ENEM desde sua primeira edição, em 1998, constata-se que somente em quatro dos dezesseis anos de sua existência o assunto foi abordado, ainda assim, de maneira esporádica. Nesse período, as questões sobre matemática financeira foram distribuídas conforme indicado na Tabela 2.

Tabela 2 – Ocorrência de questões de matemática financeira nas edições do ENEM – 1998 a 2012

Ano de realização	Número de questões
2000	1
2009	1
2011	3
2012	1
Total	**6**

Fonte: Avaliações ENEM

Conforme se pode verificar pela Tabela 2, a primeira ocorrência da temática foi na terceira edição do exame, voltando a ser abordada somente nove anos depois, sendo mais frequente nas últimas cinco edições. Entretanto, apesar de uma ocorrência maior nas avaliações dos últimos anos, a abordagem engloba apenas o cálculo de porcentagem, juros simples e compostos.

Considerando a relevância da temática, estranha-se a baixa frequência da abordagem de tal tópico na composição das provas. Um dos fatores que pode ter ocasionado sua baixa frequência nas avaliações seja o tempo necessário para a resolução manual, devido à complexidade dos cálculos envolvendo potências.

Entretanto, tal fato não é fator impeditivo, podendo ser contornado por meio da disponibilização dos resultados de determinadas potências no enunciado das questões, conforme veremos em uma das questões presentes na avaliação do ano de 2011.

A seguir, apresentamos as questões presentes nas edições do ENEM, com suas respectivas resoluções.

(*ENEM 2000*) João deseja comprar um carro cujo preço à vista, com todos os descontos possíveis, é de R$ 21.000,00, e esse valor não será reajustado nos próximos meses. Ele tem R$ 20.000,00, que podem ser aplicados a uma taxa de juros compostos de 2% ao mês, e escolhe deixar todo o seu dinheiro aplicado até que o montante atinja o valor do carro. Para ter o carro, João deverá esperar:

A) dois meses, e terá a quantia exata.
B) três meses, e terá a quantia exata.
C) três meses, e ainda sobrarão, aproximadamente, R$ 225,00.
D) quatro meses, e terá a quantia exata.
E) quatro meses, e ainda sobrarão, aproximadamente, R$ 430,00.

SOLUÇÃO:

A questão possui fácil resolução, constituindo-se na aplicação da Eq. 4.42. O montante gerado pela aplicação de R$ 20000,00 à taxa mensal de rendimento de 2%, após decorridos n meses é dada por $M(n) = 20000(1{,}02)^n$. Efetuando os cálculos para $n = 2$ e $n = 3$, teremos:

$M(2) = 20000(1{,}02)^2 = 20000.1{,}0404 = R\$\ 20808$, ou seja, inferior a R$ 21000,00;

$M(3) = 20000(1{,}02)^3 = 20000.1{,}061208 = R\$\ 21224{,}16$, ou seja, restando R$ 224,16;

Note-se que não há a necessidade de se efetuar o cálculo do montante para $n = 4$, pois como a função $M(n)$ é crescente, certamente o montante será superior a $M(3)$. Além disso, após 3 meses João já terá acumulado o valor necessário para a compra do veículo, sendo desnecessário aguardar mais um mês. Portanto, a resposta correta é a alternativa C.

(*ENEM 2009*) João deve 12 parcelas de R$ 150,00 referentes ao cheque especial de seu banco e cinco parcelas de R$ 80,00 referentes ao cartão de crédito. O gerente do banco lhe ofereceu duas parcelas de desconto no cheque especial, caso João quitasse esta dívida imediatamente ou, na mesma condição, isto é, quitação imediata, com 25% de desconto na dívida do cartão. João também poderia renegociar suas dívidas em 18 parcelas mensais de R$ 125,00. Sabendo desses termos, José, amigo de João, ofereceu-lhe emprestar o dinheiro que julgasse necessário pelo tempo de 18 meses, com juros de 25% sobre o total emprestado, a opção que dá a João o menor gasto seria:

A) renegociar suas dívidas com o banco.
B) pegar emprestado de José o dinheiro referente à quitação das duas dívidas.
C) recusar o empréstimo de José e pagar todas as parcelas pendentes nos devidos prazos.
D) pegar emprestado de José o dinheiro referente à quitação do cheque especial e pagar as parcelas do cartão de crédito.
E) pegar emprestado de José o dinheiro referente à quitação do cartão de crédito e pagar as parcelas do cheque especial.

SOLUÇÃO:

Para a solução é necessário o uso de cálculos aritméticos simples. Do enunciado, temos os seguintes dados:

- João deve R$ 1800,00 no cheque especial e R$ 400,00 no cartão de crédito, tendo dívida total de R$ 2200,00;
- O gerente do banco apresenta para João duas propostas para a quitação imediata da dívida:

a) Duas parcelas de desconto no cheque especial, ou seja, desconto de R$ 300,00, pagando o total de R$ 1900,00;
b) 25% de desconto na dívida do cartão de crédito, ou seja, desconto de R$ 100,00, pagando o total de R$ 2100,00;

- João pode renegociar a dívida, pagando 18 parcelas de R$ 125,00, ou seja, pagando o total de R$ 2250,00;

- Emprestar de José o valor necessário para quitar a dívida, pagando 25% sobre o valor emprestado após 18 meses do ato do empréstimo.

Caso João opte por pagar a dívida imediatamente, obviamente a proposta de desconto de duas parcelas na dívida do cheque especial é mais vantajosa em relação ao desconto na dívida do cartão de crédito.

No entanto, João terá que emprestar o valor de R$ 1900,00 para quitar a dívida, e após 18 meses deverá pagar R$ 2375,00 a José. Desta forma, João pagará R$ 475,00 de juros a José, e a dívida seria R$ 125,00 mais cara do que se renegociasse as dívidas com o banco. Portanto, a opção mais vantajosa é renegociar a dívida, e a resposta correta é a alternativa A.

A resolução consiste mais na análise da situação do que na aplicação de conhecimentos relativos à matemática financeira. Entretanto, é uma situação que induz o aluno a analisar qual a proposta mais vantajosa para tomar uma decisão, e não somente efetuar o cálculo direto de juros.

(*ENEM 2011 - 2ª APLICAÇÃO*) Um jovem investidor precisa escolher qual investimento lhe trará maior retorno financeiro em uma aplicação de R$ 500,00. Para isso, pesquisa o rendimento e o imposto a ser pago em dois investimentos: poupança e CDB (certificado de depósito bancário). As informações obtidas estão resumidas no quadro:

	Rendimento mensal (%)	IR (imposto de renda)
POUPANÇA	0,560	ISENTO
CDB	0,876	4% (sobre o ganho)

Para o jovem investidor, ao final de um mês, a aplicação mais vantajosa é:

A) a poupança, pois totalizará um montante de R$ 502,80.
B) a poupança, pois totalizará um montante de R$ 500,56.
C) o CDB, pois totalizará um montante de R$ 504,38.
D) o CDB, pois totalizará um montante de R$ 504,21.
E) o CDB, pois totalizará um montante de R$ 500,87.

SOLUÇÃO:

A questão consiste no simples cálculo da porcentagem sobre um determinado valor, não apresentando complexidade na resolução. Pelos dados do quadro, temos as seguintes possibilidades:

- Na poupança, o montante ao final do mês será igual a R$ 500,00.1,0056=R$ 502,80, ou seja, ganho de R$ 2,80;
- No CDB, o montante ao final do mês será igual a R$ 500,00.1,00876=R$ 504,38, ou seja, ganho de R$ 4,38. Do ganho devem ser descontados 4% a título de imposto de renda, sendo descontado 0,04 x R$ 4,38 ≅R$ 0,18. Desta forma, o ganho se reduz a R$ 4,20.

Comparando as respostas, é mais vantajoso optar pelo CDB, pois o montante ao final do mês será de R$ 504,20. Portanto, a resposta correta é a alternativa D. É importante ressaltar que no cálculo do valor descontado do ganho no CDB houve diferença de R$ 0,01, devido ao uso errôneo da regra de arredondamento na elaboração das alternativas da questão. O correto seria adotar a regra de arredondamento conforme o exposto na Norma ABNT NBR 5891.

(*ENEM 2011 - 2ª APLICAÇÃO*) Uma pessoa aplicou certa quantia em ações. No primeiro mês, ela perdeu 30% do total do investimento e, no segundo mês, recuperou 20% do que havia perdido. Depois desses dois meses, resolveu tirar o montante de R$ 3 800,00 gerado pela aplicação.

A quantia inicial que essa pessoa aplicou em ações corresponde ao valor de:

A) R$ 4222,22.

B) R$ 4523,80.

C) R$ 5000,00.

D) R$ 13300,00.

E) R$ 17100,00.

SOLUÇÃO:

Sendo Q a quantia aplicada, no primeiro mês a pessoa perdeu $0{,}3Q$. Logo, ficou com $0{,}7Q$. No segundo mês, recuperou 20% de $0{,}3Q$, ou seja, $0{,}06Q$. Desta forma, ficou com $0{,}76Q$.

Considerando que o montante ao final dos dois meses foi de R$ 3800,00, temos que:

$$0{,}76\text{Q} = 3800$$

$$\text{Q} = \frac{3800}{0{,}76} = \text{R\$ } 5000{,}00$$

Portanto, a resposta da questão é a alternativa C.

(*ENEM 2011 - 2ª APLICAÇÃO*) Considere que uma pessoa decida investir uma determinada quantia e que lhe sejam apresentadas três possibilidades de investimento, com rentabilidades líquidas garantidas pelo período de um ano, conforme descritas:

Investimento A: 3% ao mês

Investimento B: 36% ao ano

Investimento C: 18% ao semestre

As rentabilidades, para esses investimentos, incidem sobre o valor do período anterior. O quadro fornece algumas aproximações para a análise das rentabilidades:

$\boldsymbol{n}$	$\mathbf{1,03^{n}}$
3	1,093
6	1,194
9	1,305
12	1,426

A) escolher qualquer um dos investimentos A, B ou C, pois as suas rentabilidades anuais são iguais a 36%.

B) escolher os investimentos A ou C, pois suas rentabilidades anuais são iguais a 39%.

C) escolher o investimento A, pois a sua rentabilidade anual é maior que as rentabilidades anuais dos investimentos B e C.

D) escolher o investimento B, pois sua rentabilidade de 36% é maior que as rentabilidades de 3% do investimento A e de 18% do investimento C.

E) escolher o investimento C, pois sua rentabilidade de 39% ao ano é maior que a rentabilidade de 36% ao ano dos investimentos A e B.

SOLUÇÃO:

Sendo Q a quantia investida, teremos que:

- No investimento A, o montante anual será dado pela capitalização composta de Q considerando 12 meses, ou seja, será igual a $\mathrm{Q}(1{,}03)^{12}$. Utilizando os dados do quadro, obtemos que o ganho aproximado é de 42,6% sobre Q;
- No investimento B, o montante após um ano será dado por $1{,}36\mathrm{Q}$. Desta forma, o rendimento será de 36% sobre Q;

- No investimento C, o montante anual será dado pela capitalização de Q considerando dois semestres, sendo igual a $Q(1{,}18)^2$, ou seja, $1{,}3924Q$. Desta forma, o rendimento será de 39,24% sobre Q.

Analisando os resultados obtidos, verifica-se que o investimento A é o mais rentável. A alternativa correta é a C.

Aos olhos de um leigo sobre o assunto, os três investimentos teriam o mesmo rendimento anual. No entanto, pelo fato do rendimento incidir sobre o montante do período anterior, a capitalização não é a simples, mas a composta.

Esta questão apresenta um grau de complexidade maior que o das questões anteriores. Além de envolver o cálculo do montante em juros compostos, insere-se a compreensão a respeito de taxa nominal e taxa efetiva, um conceito bastante importante para a compreensão de empréstimos e aplicações bancárias.

Outro fator que deve ser destacado é a disponibilização dos resultados de algumas das potências de base 1,03 no enunciado da questão. Sem isso, a resolução seria mais árdua, caindo mérito da efetuação de cálculo manual.

(*ENEM 2012*) - Arthur deseja comprar um terreno de Cléber, que lhe oferece as seguintes possibilidades de pagamento:

- Opção 1: Pagar à vista, por R$ 55 000,00;
- Opção 2: Pagar a prazo, dando uma entrada de R$ 30000,00, e mais uma prestação de R$ 26 000,00 para dali a 6 meses;
- Opção 3: Pagar a prazo, dando uma entrada de R$ 20 000,00, mais uma prestação de R$ 20 000,00, para dali a 6 meses e outra de R$ 18 000,00 para dali a 12 meses da data da compra;
- Opção 4: Pagar a prazo dando uma entrada de R$ 15 000,00 e o restante em 1 ano da data da compra, pagando R$ 39 000,00;
- Opção 5: pagar a prazo, dali a um ano, o valor de R$ 60 000,00.

Arthur tem o dinheiro para pagar à vista, mas avalia se não seria melhor aplicar o dinheiro do valor à vista (ou até um valor menor) em um investimento, com rentabilidade de 10% ao semestre, resgatando os valores à medida que as prestações da opção escolhida fossem vencendo. Após avaliar a situação do ponto de vista financeiro e das condições apresentadas, Arthur concluiu que era mais vantajoso financeiramente escolher a opção:

A) 1.
B) 2.
C) 3.
D) 4.
E) 5.

SOLUÇÃO:

Caso opte por investir o dinheiro à taxa de rendimento de 10% ao semestre, teremos que:

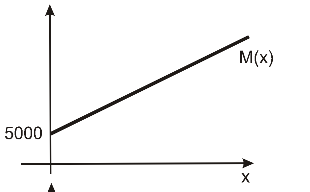
- Caso escolha a opção 2, pagará R$ 30000,00 de entrada, restando R$ 25000,00 para aplicar à taxa semestral de 10%. Desta forma, a capitalização desta quantia após 6 meses gerará um montante de $25000.1{,}1$, ou seja, igual a R$ 27500,00. Pagando a parcela de R$ 26000,00, restarão R$ 1500,00.
- Caso escolha a opção 3, pagará R$ 20000,00 de entrada, restando R$ 35000,00 para aplicar à taxa semestral de 10%. Desta forma, após 6 meses terá o montante de $35000.1{,}1$, ou seja, igual a R$ 38500,00. Desse valor, serão utilizados R$ 20000,00 para pagamento da segunda parcela, restando R$ 18500,00 na aplicação financeira. Decorridos mais um semestre, o montante acumulado será de $18500.1{,}1$, ou seja, igual a R$ 20350,00. Pagando a última parcela de R$ 18000,00, restarão R$ 2350,00.
- Caso escolha a opção 4, pagará R$ 15000,00 de entrada, restando R$ 40000,00 para aplicar à taxa de 10% ao semestre. O montante acumulado após decorrido um ano será igual a $40000.1{,}1^2$, ou seja, igual a R$ 48400,00. Pagando a última parcela de R$ 39000,00, restarão R$ 9400,00.
- Caso escolha a opção 5, poderá investir os R$ 55000,00 durante um ano, obtendo ao final desse período o montante de $55000.1{,}1^2$, ou seja, igual a R$ 66550,00. Pagando os R$ 60000,00 referentes à divida, restarão R$ 6550,00.

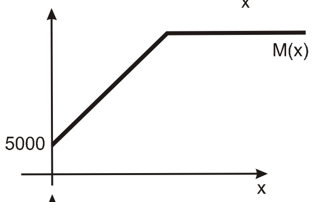
Logo, a opção mais vantajosa para Arthur é a 4, e a alternativa correta é a D.

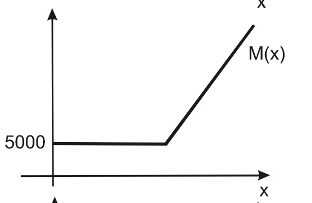
Esta questão, apesar de possuir longa resolução, não apresenta um alto grau de complexidade, sendo necessário apenas calcular os montantes para aplicações de quantias diferentes.

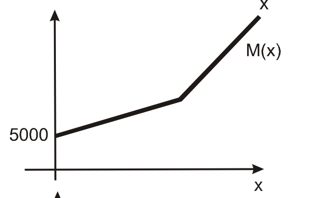
Na primeira aplicação do exame no ano de 2009, a prova foi cancelada após o vazamento de informações a respeito da prova. A prova cancelada também possuía uma questão de matemática financeira, disposta a seguir:

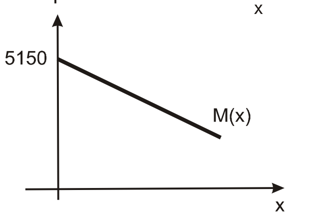
(*ENEM 2009 - prova cancelada*) Paulo emprestou R$ 5.000,00 a um amigo, a uma taxa de juros simples de 3% ao mês. Considere x o número de meses do empréstimo e M(x) o montante a ser devolvido para Paulo no final de meses. Nessas condições, a representação gráfica correta para M(x) é:

A) 

B) 

C) 

D) 

E) 

SOLUÇÃO:

Apesar da pouca complexidade da resolução, que pode ser feita sem ser efetuado qualquer cálculo, está envolvido o reconhecimento do crescimento linear dos juros simples. A função que expressa o montante gerado pelo capital de R$ 5000,00 no sistema de capitalização simples após n meses, considerando a taxa mensal de 3% é dado por $M(n) = 5000(1 + 0{,}03n) = 150n + 5000$. Essa função é do primeiro grau, cujo gráfico é uma reta crescente. Desta forma, a resposta correta á a alternativa A.

5.2 QUESTÕES DO VESTIBULAR E PROCESSO SELETIVO SERIADO DA UNIVERSIDADE ESTADUAL DE PONTA GROSSA

A Universidade Estadual de Ponta Grossa (UEPG) realiza dois vestibulares anuais para os cursos presenciais, e um vestibular para os cursos na modalidade EaD. A instituição realiza ainda, desde o ano 2001, o Processo Seletivo Seriado (PSS), que consiste num exame de seleção aplicado ao final de cada uma das séries do Ensino Médio.

Para as provas dos vestibulares, as respostas das questões são dadas pelo somatório dos números das alternativas corretas. Já para o PSS, na prova referente ao primeiro ano do Ensino Médio as respostas possuem alternativas de a) a e), sendo a método do somatório utilizado somente nas provas das séries posteriores.

A seguir, apresentamos as questões sobre matemática financeira presentes nos exames de seleção dos últimos cinco anos. No caso da UEPG, no vestibular as questões sobre a temática figuram na prova de conhecimentos gerais. No PSS, figuram nas provas do terceiro ano do Ensino Médio. Os arquivos e gabaritos das provas estão disponíveis no endereço eletrônico http://www.cps.uepg.br.

(*VESTIBULAR DE INVERNO 2009*) Três sócios A, B e C aplicaram a quantia de R$ 12.000,00, a juros simples, e após 6 meses retiraram o montante de R$ 15.600,00. Sabendo que esses sócios aplicaram quantias diretamente proporcionais aos números 2, 3 e 5, respectivamente, e que o total de juros foi dividido entre eles na mesma proporção, assinale o que for correto.

01) O sócio A recebeu mais de R$ 800,00 de juros.
02) O sócio C aplicou R$ 2.400,00 a mais que o sócio B.
04) A taxa mensal de juros da aplicação foi de 5%.
08) A aplicação rendeu R$ 3.000,00 de juros.

SOLUÇÃO:
Os juros gerados pela aplicação são de R$ 3600,00, dados pela expressão $J = 12000.6i$, onde J é o valor dos juros gerados e i é a taxa mensal da aplicação. Desta forma, temos que $12000.6i = 3600$, ou seja, $i = 0{,}05$ ao mês.

Os sócios aplicaram quantias proporcionais a 2, 3 e 5. Desta forma, podemos dizer que o sócio A investiu a quantia 2x, o sócio B investiu a quantia 3x e o sócio C investiu a quantia 5x. Desta forma, obteremos a equação $2x + 3x + 5x =$

12000, cuja solução é x=1200. Assim, o sócio A investiu R$ 2400,00, o sócio B investiu R$ 3600,00 e o sócio C investiu R$ 6000,00.

Sendo os juros divididos na mesma proporção, podemos dizer que os sócios A, B e C receberam as quantias2y, 3y e 5y respectivamente. Desta forma obteremos a equação $2y + 3y + 5y = 3600$, cuja solução é y=360. Assim, o sócio A recebeu R$ 720,00 de juros, o sócio B recebeu R$ 1080,00 e o sócio C recebeu R$ 1800,00.

Com base nos resultados acima, teremos as seguintes respostas para os itens do somatório:

01) Falso, pois o sócio A recebeu R$ 720,00.
02) Verdadeiro, pois R$ 6000,00 -R$ 3600,00 =R$ 2400,00.
04) Verdadeiro, pois $i = 0{,}05 = 5\%$ mensais.
08) Falso, pois os juros foram de R$ 3600,00.

Portanto, o somatório das alternativas corretas é igual a 06.

(*VESTIBULAR DE INVERNO 2010*) Marcelo tinha um capital de R$ 5.000,00. Parte desse capital ele aplicou no banco A, por um ano, à taxa de juros simples de 2% ao mês, obtendo R$ 360,00 de juros. O restante aplicou no banco B, também pelo período de 1 ano, à taxa de juros simples de 20% ao ano. Com base nesses dados, assinale o que for correto.

01) No banco B ele aplicou menos de R$ 3.000,00.
02) Marcelo obteve um montante de R$ 6.060,00 referente às duas aplicações.
04) A aplicação no banco B rendeu R$ 700,00 de juros.
08) Ele aplicou no banco A 20% de seu capital.

SOLUÇÃO:

Sendo x a quantidade aplicada no banco A, o montante gerado por esse valor ao longo de um ano, à taxa de rendimento simples de 2% ao mês, é dado pelo produto $0{,}02.12.x = 360$. Isolando x, obtemos que a quantia aplicada no banco A é igual a R$ 1500,00.

Desta forma, o valor aplicado no banco B foi de R$ 3500,00, à taxa de rendimento simples de 20% ao ano. Assim, os juros gerados por essa quantia são dados pelo produto $3500.0{,}2.1$, ou seja, R$ 700,00. Com esses dados, analisemos as alternativas:

01) Falso, pois foram aplicados R$ 3500,00.

02) Verdadeiro, pois o montante total corresponde à soma dos R$ 5000,00 investidos e os valores dos juros obtidos, ou seja, R$ 5000,00+R$ 360,00+R$ 700,00.

04) Verdadeiro.

08) Falso, pois 20% de R$ 5000,00 correspondem a R$ 1000,00.

Portanto, o somatório das alternativas corretas é igual a 06.

(*VESTIBULAR DE INVERNO 2011*) Considere a seguinte situação: Inácio contrai um empréstimo de R$ 5.000,00 a juros simples de 2% ao mês. Em determinada data liquida esse empréstimo pelo montante de R$ 6.200,00 e contrai uma nova dívida no valor de R$ 2.500,00, também a juros simples. Este último empréstimo é liquidado 8 meses depois pelo montante de R$ 3.300,00. Nesse contexto, assinale o que for correto.

01) O prazo do primeiro empréstimo foi de um ano.

02) No segundo empréstimo a taxa de juros foi de 48% ao ano.

04) A taxa de juros mensal do segundo empréstimo foi menor que a do primeiro empréstimo.

08) O valor dos juros pagos no primeiro empréstimo foi de R$ 1.500,00.

SOLUÇÃO:

O montante M da primeira dívida é dado por $M = 5000(1 + 0{,}02n)$, onde n é o número de meses. Desta forma, obteremos a igualdade $5000(1 + 0{,}02n) = 6200$, cuja solução é $n = 12$.

O montante M da segunda dívida é dado por $M = 2500(1 + 8i)$, onde i é a taxa mensal da aplicação. Desta forma, obteremos a igualdade $2500(1 + 8i) = 3300$, cuja solução é $i = 0{,}04$.

Com isso, analisamos as alternativas:

01) Verdadeiro, pois o valor de n encontrado foi 12.

02) Verdadeiro, pois a taxa anual é igual ao produto da taxa $i = 0{,}04 = 4\%$ pelo números de meses do ano, ou seja, igual a 48%.

04) Falso, pois no primeiro empréstimo a taxa mensal foi a metade da taxa no segundo empréstimo.

08) Falso, pois no primeiro empréstimo temos $M = 5000(1 + 0{,}02.12) = R\$\ 1200{,}00$.

Logo, o somatório das alternativas corretas é igual a 03.

(*PSS 2008*) Pedro e Paulo aplicaram R$ 500,00 cada um em uma instituição financeira, a juros simples. Pedro aplicou seu dinheiro a uma taxa de 21% ao ano, durante 18 meses, e Paulo aplicou seu dinheiro a uma taxa de 1,5% ao mês, durante dois anos. Com base nestes dados, assinale o que for correto.

01) Paulo recebeu, em juros, 30% do capital investido.

02) Paulo recebeu mais de R$ 175,00 em juros.

04) Pedro recebeu o montante de R$ 657,50.

08) Pedro recebeu, em juros, 31,5% do capital investido.

SOLUÇÃO:

O montante obtido por Pedro é igual a $500(1 + 0{,}21.1{,}5)$, ou seja, R$ 657,50. Já Paulo obteve o montante igual a $500(1 + 0{,}015.24)$, ou seja, R$ 680,00.

Analisando as alternativas, teremos:

01) Falso, pois 30% de R$ 500,00 são iguais a R$ 150,00.

02) Verdadeiro, pois Paulo recebeu R$ 180,00 de juros.

04) Verdadeiro.

08) Verdadeiro, pois a taxa de rendimento simples foi de 21% ao ano, durante um ano e meio, totalizando 31,5%.

Portanto, o somatório das alternativas corretas é igual a 14.

(*PSS 2011*) Assinale o que for correto.

01) A quantia de R$ 1.500,00 aplicada a juros simples ao final de 2 anos produz um montante de R$ 2.580,00. A taxa correspondente a essa aplicação é de 1% ao dia.

02) Um certo capital é aplicado a juros simples a uma taxa mensal de 5%. Após 1 ano e 8 meses esse capital estará duplicado.

04) Um capital aplicado a 12% ao ano rendeu em 1 ano, 4 meses e 15 dias, juros simples de R$ 660,00. O capital aplicado foi de R$ 4.000,00.

08) Um capital de R$ 2.000,00 é aplicado a juros compostos a uma taxa de 2% ao mês. Após 2 meses esse capital produz mais de R$ 80,00 em juros.

SOLUÇÃO:

Para essa questão analisaremos cada alternativa separadamente, pois não há um contexto comum às mesmas:

01) Falso. Os juros J gerados pela quantia R$ 1500,00 aplicadas à taxa mensal simples i, durante 24 meses é dado por $J = 1500.24i$. Desta forma, obtemos a

equação $36000i = 1080$, cuja solução é $i = 0{,}03$. Considerando o mês comercial, ou seja, com 30 dias, a taxa diária da aplicação é igual a $\frac{0{,}03}{30} = 0{,}001 = 0{,}1\%$.

02) Verdadeiro. Aplicando a quantia C a juros simples de 5% ao mês durante 20 meses, os juros J obtidos são dados por $J = C.0{,}05.20 = C$. Logo, o montante M acumulado será dado por $M = C + C = 2C$, ou seja, o capital duplicará.

04) Falso. Considerando o mês comercial, os juros J obtidos pela aplicação da quantia C à taxa de 12% ao ano são dados por $J = C.0{,}12.\left(1 + \frac{4}{12} + \frac{15}{30}\right)$, ou seja, $J = 0{,}22C$. Desta forma, obteremos a equação $0{,}22C = 660$, cuja solução é $C = 3000$.

08) Verdadeiro. O montante M após 2 meses é dado por $M = 2000.(1{,}02)^2$, ou seja, $M = 2080{,}80$, sendo os juros obtidos iguais a R$ 80,80. Outra forma de se verificar isso seria considerando que os juros simples obtidos nesse período gerariam R$ 80,00. Como os juros composto são superiores aos simples após o primeiro mês decorrido, obviamente a quantia seria maior que R$ 80,00.

Portanto, o somatório das alternativas corretas é igual a 10.

(*PSS 2012*) Uma pessoa fez um empréstimo de R$ 10.000,00 a uma taxa de juros compostos de 10% ao mês e saldou sua dívida em três pagamentos, da maneira abaixo descrita.

- 3 meses após ter contraído a dívida, pagou R$ 5.310,00;
- 2 meses após o primeiro pagamento, pagou mais R$ 3.680,00;
- 1 mês após o segundo pagamento, quitou a dívida.

Nessas condições, assinale o que for correto.

01) Logo após o segundo pagamento, a dívida corresponde a 60% do valor do empréstimo.

02) No momento em que a pessoa quitou o empréstimo, a dívida corresponde a R$ 6.600,00.

04) Depois do primeiro pagamento, a pessoa ficou devendo R$ 7.690,00.

08) O montante pago pelo empréstimo foi igual a R$ 17.715,10.

SOLUÇÃO: Considerando os dados do enunciado e usando a Eq. 4.42, os pagamentos foram efetuados conforme a seguir:

- Após decorridos 3 meses do empréstimo, a dívida é igual a $10000(1,1)^3$, ou seja, R$ 13310,00. Como são pagos R$ 5310,00, restam ainda R$ 8000,00 a serem pagos.
- 2 meses após o primeiro pagamento, o valor da dívida será $8000(1,1)^2$, ou seja, R$ 9680,00. Como são pagos R$ 3680,00, restam R$ 6000,00 a serem pagos.
- Um mês após o segundo pagamento, a dívida é liquidada. O valor a ser pago corresponde a $6000.1,1$, ou seja, R$ 6600,00.

Pelos resultados encontrados, analisamos as alternativas:

01) Verdadeiro, pois 60% de R$ 10000,00 é igual a R$ 6000,00, valor da dívida após o segundo pagamento.

02) Verdadeiro.

04) Falso, pois após o primeiro pagamento o valor da dívida é de R$ 8000,00.

08) Falso, pois o montante da dívida é igual à soma dos pagamentos efetuados, ou seja, igual a R$ 15590,00.

Portanto, o somatório das alternativas corretas é igual a 03.

Nota-se que nos últimos 5 exames vestibulares aplicados, em três edições as questões contemplaram a temática financeira, ainda assim, constando apenas o cálculo de juros simples em empréstimos. É importante destacar que na prática, no caso de empréstimos em instituições financeiras a capitalização utilizada é a composta, e não a simples.

No caso do PSS, a temática esteve menos frequente do que no vestibular, considerando que em 10 das 12 edições do exame havia a prova para o 3º ano do Ensino Médio. Da mesma forma que nas questões do vestibular, foram abordados apenas o cálculo de juros e montantes nos regimes de capitalização simples e composta.

5.3 QUESTÕES DO VESTIBULAR DA UNIVERSIDADE ESTADUAL DO CENTRO-OESTE (UNICENTRO)

No endereço eletrônico da UNICENTRO (www2.unicentro.br/vestibular/anteriores) estão disponibilizadas as provas dos vestibulares realizados nos anos de 2004 a 2013. Foi constatado que a temática de matemática financeira não esteve presente nas avaliações destes anos.

5.4 CONSIDERAÇÕES A RESPEITO DAS AVALIAÇÕES

A inserção da temática financeira efetuada nas questões de alguns dos vestibulares das universidades estaduais é bastante similar à apresentada no ENEM. Em algumas instituições, a temática sequer consta no rol de conteúdos programáticos abordados nos exames de seleção.

Nota-se que embora as diretrizes e parâmetros curriculares apontem a necessidade da abordagem da temática financeira no currículo escolar, sua inserção nas avaliações ainda é mínima, se comparada à frequência com que outros conteúdos são abordados. Possivelmente isso se deva à falta de proposta pedagógica específica para o ensino de matemática financeira.

Tamanha a importância deste tema e a variedade de situações-problema que poderiam ser abordadas, cabe às instituições responsáveis pela elaboração das avaliações a inclusão do tema com mais frequência e em diferentes contextos, contemplando não somente a execução de cálculos simples, mas também a análise e comparação de situações mais complexas.

6 PLANILHAS ELETRÔNICAS NO ENSINO DE MATEMÁTICA

Entre as diversas possibilidades tecnológicas disponíveis, optamos por estruturar uma proposta de atividades por meio da utilização de planilhas eletrônicas, em particular, com o uso do *software Microsoft Excel* ®. Tal escolha se justifica pelo fato de ser um programa de fácil acesso e manipulação, tanto pelos alunos quanto pelo professor.

Cox (2003, p.45) define a planilha eletrônica como “uma tabela composta por linhas e colunas. Nela, as linhas são identificadas por números e as colunas por letras. A interseção entre uma linha e uma coluna é chamada célula”. Tal definição é bastante clara, pois a localização de uma célula na planilha é similar à localização de um ponto no plano cartesiano: por meio das localizações horizontal e vertical. A célula B4, por exemplo, é a célula localizada na coluna B, na quarta linha.

Vale ressaltar que nas células podem ser inseridos caracteres alfanuméricos e fórmulas, por meio das quais é possível efetuar vários cálculos que analiticamente seriam bastante trabalhosos e demandariam um intervalo de tempo relativamente grande para a solução. No intuito de direcionar o texto para a elaboração de calculadoras, omitiremos maiores detalhes sobre as funções básicas do funcionamento das planilhas eletrônicas.

Um dos possíveis usos dessa ferramenta é a construção de calculadoras, por meio da qual podem ser utilizadas situações-problema para sua elaboração. Como exemplo, tomaremos aqui a resolução de uma equação do segundo grau.

EXEMPLO 6.1: As raízes de uma equação do segundo grau do tipo $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$, podem ser obtidas por meio da fórmula:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \tag{6.1}$$

Podemos utilizar as funcionalidades da planilha para elaborar uma calculadora das raízes por meio da simples indicação dos coeficientes a, b e c da equação, conforme descrito a seguir.

PROCEDIMENTO:

a) Na célula A1, digitamos “a”. Na célula B1 será digitado o valor do coeficiente a;
b) O mesmo será feito nas células A2, B2, A3 e B3, onde em A2 e A3 digitamos b e c, respectivamente, e nas células B2 e B3 os valores de b e c na equação;
c) Na célula B4, podemos calcular o valor do discriminante, digitando =B2^2-4*B1*B3;

d) Na célula A6, digitamos “**x’**”, e na célula B6 digitamos a fórmula =(-B2+RAIZ(B4))/2*B1;

e) Na célula A7 digitamos “**x’’**”, e na célula B6 digitamos a fórmula =(-B2-RAIZ(B4))/2*B1.

Utilizando a formatação textual do *Microsoft Excel* ® e colocando bordas nas células envolvidas, obtemos a visualização da calculadora apresentada na Figura 2.

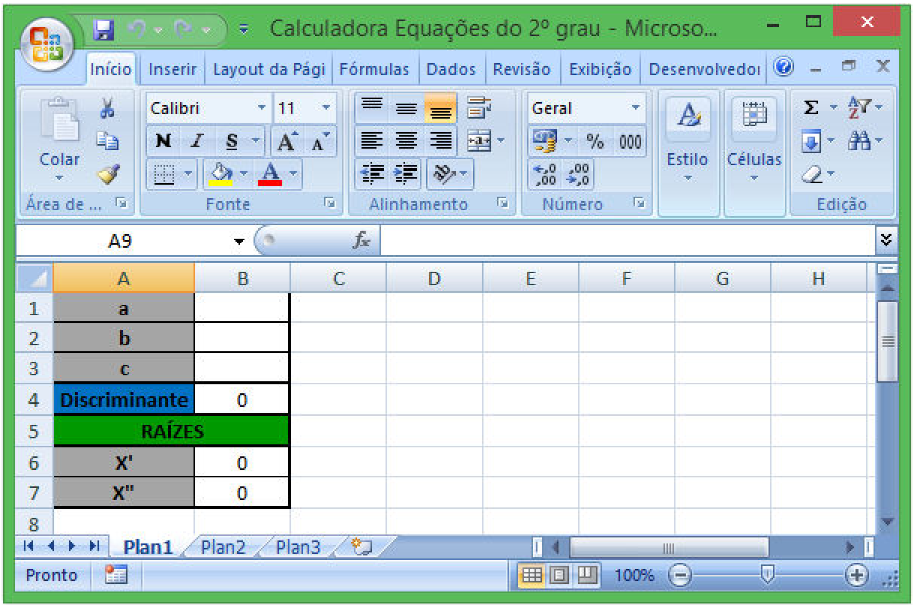


Figura 2 – Calculadora para as raízes de uma equação do segundo grau

Como teste da calculadora, tomemos a equação $x^2 - 5x + 6 = 0$, que possui como raízes $x' = 2$ e $x' = 3$. Informando os valores $a = 1, b = -5$ e $c = 6$, a calculadora apresentará a resposta conforme a Figura 3.

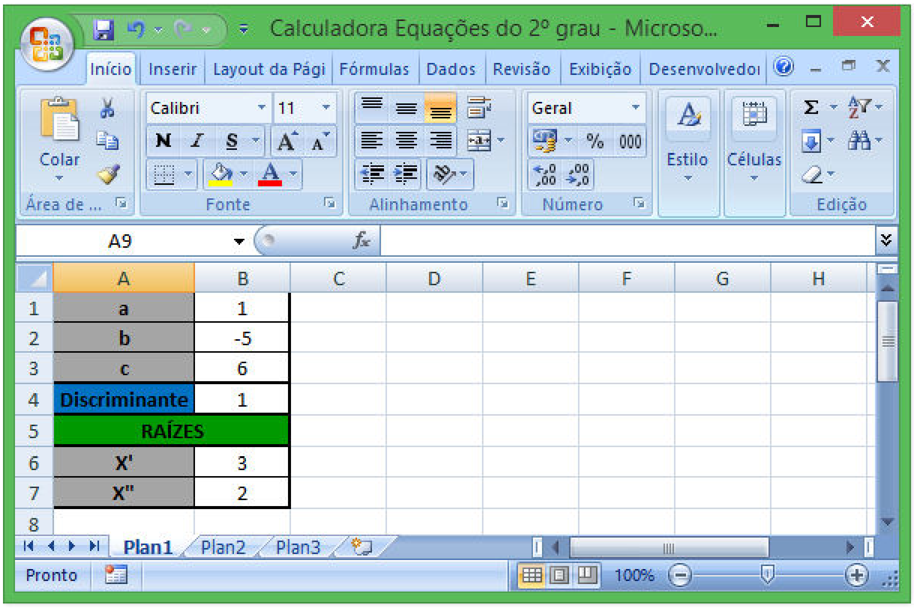


Figura 3 – Cálculo das raízes da equação $x^2 - 5x + 6 = 0$ usando planilhas eletrônicas

Obviamente, o uso de tal calculadora não seria viável num contexto de aprendizagem da forma resolutiva das equações do segundo grau, mas bastante útil no cálculo de raízes em situações onde o cálculo da solução não seja o foco do estudo.

Nesse aspecto, vale ressaltar que a funcionalidade da calculadora aqui exemplificada é similar à funcionalidade da calculadora convencional, utilizada para efetuar cálculos com números de vários algarismos significativos. Ao usarmos uma calculadora convencional para calcularmos o produto de 125454 por 4587 não indica que não sabemos efetuar isso manualmente. A máquina exerce o papel de facilitadora no sentido de poupar tempo para o cálculo, e como citado anteriormente, seu uso é viável dependendo do contexto.

Desta forma, situações-problema, como as que apresentamos no capítulo 4, podem ser traduzidas em modelos matemáticos, os quais podem ser transcritos nas planilhas eletrônicas, podendo ser utilizados para a simulação de situações, funcionando como calculadoras específicas. Essa abordagem favorece também a exploração de operações algébricas na manipulação das fórmulas obtidas na modelagem das soluções das situações-problema.

Ilustraremos essa abordagem com a resolução de um problema bastante frequente na literatura, referente ao estudo de máximos e mínimos de uma função quadrática.

EXEMPLO 6.2: Um fazendeiro pretende construir um cercado com formato retangular, aproveitando para isso um muro já existente como uma das dimensões do cercado. Sabendo que o fazendeiro dispõe de 40 metros lineares de tela para construí-lo, incluindo o portão, qual será a área máxima desse cercado?

SOLUÇÃO:

A Figura 4 ilustra o cercado a ser construído:

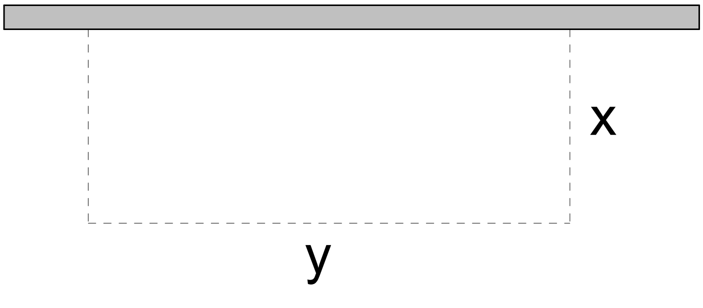


Figura 4 – Representação do cercado a ser construído

Na Figura 4, x e y representam as dimensões do cercado. Desta forma, a área do cercado em função de x e y é dado pela Eq. 6.2:

$$A(x, y) = xy \tag{6.2}$$

Uma vez que se dispõe de 40 metros lineares de tela, a relação entre o perímetro do cercado e a quantidade de tela é dada pela Eq. 6.3:

$$y + 2x = 40 \tag{6.3}$$

Isolando y e substituindo na Eq. 6.2, obtemos uma função apenas de x, ou seja:

$$A(x) = -2x^2 + 40x \tag{6.4}$$

A coordenada da abscissa do vértice do gráfico de uma função quadrática do tipo $ax^2 + bx + c = 0$ é dado por $x = \frac{-b}{2a}$. Logo, a função da Eq. 6.4 assume seu valor máximo quando $x = 10$. Assim, a área máxima será de 200 m^2, que ocorre quando $x = 10$ m e $y = 20$ m.

O desenvolvimento de uma calculadora para o cálculo das dimensões do retângulo pode ser feita baseando-se na quantidade de tela disponível. Primeiramente, exploraremos a resolução de uma situação similar, porém considerando um perímetro qualquer P.

EXEMPLO 6.3: Um fazendeiro pretende construir um cercado com formato retangular, aproveitando para isso um muro já existente como uma das dimensões do cercado. Sabendo que o fazendeiro dispõe de P metros lineares de tela para construí-lo, incluindo o portão, qual será a área máxima desse cercado?

SOLUÇÃO:

Na resolução do Exemplo 6.2, vimos que a área do retângulo do cercado pode ser calculado pela Eq. 6.2, sendo x e y as dimensões do cercado. Com P metros lineares de tela, teremos que $y + 2x = P$, ou seja, $y = P - 2x$.

Substituindo y na Eq. 6.2, obteremos a Eq. 6.5:

$$A(x) = -2x^2 + Px \tag{6.5}$$

A função da Eq. 6.5 assume seu valor máximo quando $x = \frac{P}{4}$. Assim, obteremos que $y = \frac{P}{2}$, ou seja, o cercado deverá ter largura de $x = \frac{P}{4}$ metros e comprimento de $y = \frac{P}{2}$ metros.

Usando o resultado algébrico obtido, elabora-se a calculadora referente à situação, conforme os passos descritos a seguir.

PROCEDIMENTO:

1) Na célula A1, digita-se Quantidade de tela;
2) Na célula A2, digita-se Comprimento;
3) Na célula A3, digita-se Largura;
4) Na célula A4, digita-se Área Máxima.

Na coluna B, ao lado de cada célula indicada acima, serão inseridos a quantidade de tela disponível e as fórmulas para o cálculo das dimensões, conforme indicado abaixo:

5) Na célula B1, digita-se o valor numérico que representa a quantidade de tela;
6) Na célula B2, digita-se =B1/2;
7) Na célula B3, digita-se =B1/4;
8) Na célula B4, digita-se =B2*B3.

Na coluna B, a célula B1 será um campo de entrada de dados, enquanto que as células B2 a B4 serão campo de saída de dados, ou seja, onde serão registrados os valores calculados em função do valor de entrada digitado na célula B1.

Formatando a parte gráfica das células utilizadas, pode-se obter a visualização apresentada na Figura 5.

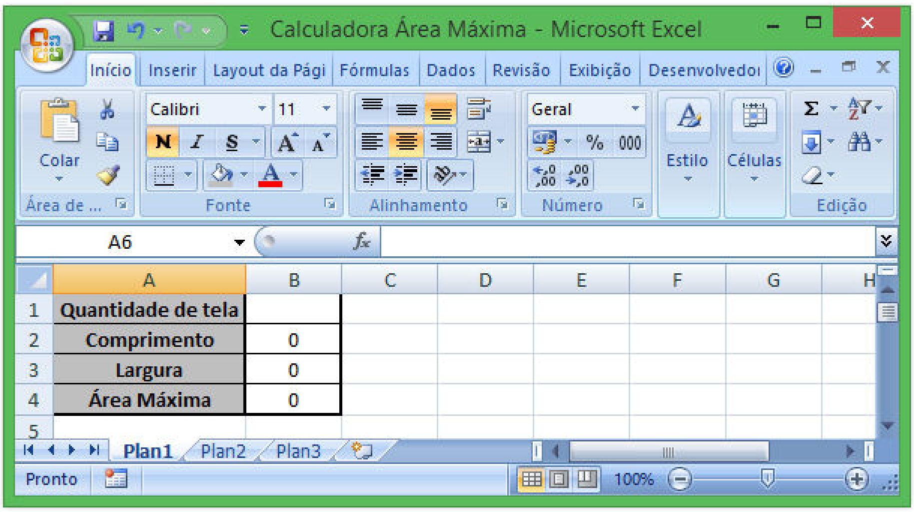


Figura 5 – Calculadora das dimensões do cercado de área máxima

Voltando à resolução do Exemplo 6.2, inserindo o perímetro igual a 40 na célula B2, obteremos a solução que foi encontrada analiticamente, conforme indicado na Figura 6.

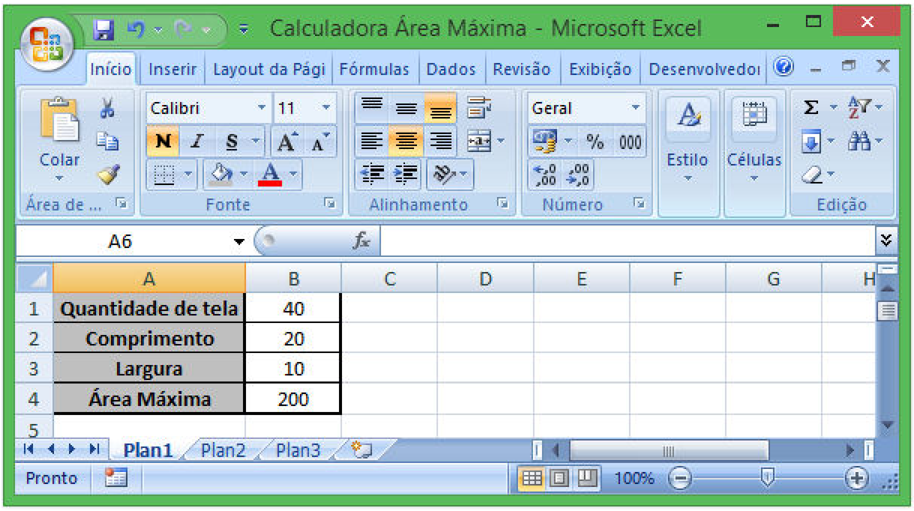


Figura 6 – Cálculo das dimensões para a área máxima do cercado

Obviamente, é possível que na elaboração da calculadora em questão o aluno perceba que não é necessário utilizá-la para calcular a área máxima. A manipulação algébrica indica claramente que o valor máximo da área do cercado será dado quando o comprimento é igual à metade da quantidade de tela disponível. Diante disso, cabe ao professor explorar a eventualidade dessa percepção em problemas similares, sem o uso da calculadora aqui indicada.

Conforme descreveremos adiante sobre a construção de simuladores de matemática financeira, as planilhas eletrônicas permitem mesclar fórmulas e resultados com funções lógicas, o que pode abrilhantar ainda mais o seu uso em sala de aula.

7 PROPOSTA DE ATIVIDADES: PLANILHAS ELETRÔNICAS E SIMULADORES DE MATEMÁTICA FINANCEIRA

Giraldo; Caetano e Mattos (2012, p.26), afirmam que dentre os recursos disponíveis nas planilhas eletrônicas se destacam:

a) A manipulação e operações com grandes quantidades de dados numéricos;
b) A articulação entre diferentes formas de representação;
c) As ferramentas lógicas;
d) As ferramentas estatísticas.

Dentre os recursos citados pelos autores, os três primeiros exercem papel fundamental como facilitadores no estudo de matemática financeira, pois em muitas situações envolvendo a temática, os cálculos envolvem potências numéricas, incógnitas na forma de expoente, e análise de situações.

Podemos ver isso nas resoluções das questões a seguir, do livro *Progressões e Matemática Financeira* (MORGADO; WAGNER, ZANI, 2001):

EXEMPLO 7.1: Cristina toma um empréstimo de R$ 150,00 a juros de 12% ao mês. Qual será a dívida de Cristina três meses depois?

SOLUÇÃO:

A função C que determina o montante após n meses é dado por $C(n)=150.1{,}12^n$. Após 3 meses, o montante da dívida será dado por $C(3)$, isto é:

$$C(3)=150.1{,}12^3 \cong 210{,}74 \tag{7.1}$$

EXEMPLO 7.2: Investindo a juros mensais de 8%, em quanto tempo seu capital dobrará?

SOLUÇÃO:

A função C que determina o montante após n meses é dado por $C(n)=C_0.1{,}08^n$, onde C_0 é o capital inicialmente aplicado. Para que o capital inicial dobre, devemos ter $C(k)=2C_0$. Com isso, obtemos a Eq. 7.2:

$$C_0.1{,}08^k = 2C_0 \tag{7.2}$$

Dividindo ambos os membros da Eq. 7.2 por C_0, obtemos a Eq. 7.3:

$$1{,}08^k = 2 \tag{7.3}$$

Usando logaritmos em ambos os membros, e isolando k, obteremos $k = \dfrac{\ln 2}{\ln 1{,}08} \cong 9$.

Assim, são necessários aproximadamente 9 meses para que o valor aplicado inicialmente dobre.

Nota-se que para a resolução é indispensável o uso da calculadora para se efetuar o cálculo da potência (exemplo 7.1) e para a obtenção dos logaritmos (exemplo 7.2).

Conforme citado anteriormente, é importante explorar a resolução algébrica das situações-problema. Por possuírem simples resoluções, são uma opção viável para iniciar os alunos no contexto da construção dos simuladores.

Consideremos a seguinte situação-problema, similar ao Exemplo 7.2.

EXEMPLO 7.3: Investindo uma quantia a taxa de juros igual a i ao mês, qual o tempo necessário para que a quantia aumente m vezes?

SOLUÇÃO:

A função C que fornece o montante após n meses é dada pela Eq. 7.4:

$$C(n) = C_0(1+i)^n \tag{7.4}$$

Devemos descobrir o valor de n tal que $C(k) = mC_0$, ou seja, devemos resolver a Eq. 7.5:

$$C_0(1+i)^k = mC_0 \tag{7.5}$$

Dividindo a Eq. 7.5 por C_0, resumimos a resolução para a equação exponencial indicada na Eq. 7.6:

$$(1+i)^k = m \tag{7.6}$$

Usando logaritmos nos dois membros, obteremos $k = \dfrac{\ln m}{\ln (1+i)}$.

Assim, vemos que k depende do coeficiente de crescimento m e da taxa mensal i, ou seja, independente do capital inicial investido, o tempo necessário para que aumente m vezes será o mesmo.

Quando os alunos do Ensino Médio tem os contatos inicias com a simbologia algébrica, é comum a dificuldade com relação ao significado dos símbolos. Nesse aspecto, a experiência de codificação e manipulação da simbologia utilizada nas planilhas eletrônicas, em especial a verificação de erros de codificação, podem auxiliar os alunos a entenderem o significado e regras dos símbolos (GIRALDO; CAETANO E MATTOS, 2012, p.26).

Remetendo-nos a isso, podemos aproveitar as soluções de situações-problema representadas na forma algébrica para a elaboração de calculadoras e simuladores com as planilhas eletrônicas. Para o Exemplo 7.3, basta efetuar o procedimento indicado a seguir.

PROCEDIMENTO:

1) Nas células A1, A2 e A3 digita-se Coeficiente de aumento, Taxa mensal de rendimento e Tempo necessário, respectivamente;
2) Na célula B1 digita-se o valor do coeficiente m, e na célula B2 o valor da taxa de rendimento mensal da aplicação;
3) Na célula A3 digita-se a fórmula =ln(B1)/ln(1+B2).

As células B2 e B3 servirão como campo de entrada de dados, e a célula B3 como saída, onde será registrado o crescimento percentual. Formatando as células utilizadas, a visualização do simulador está indicada na Figura 7.

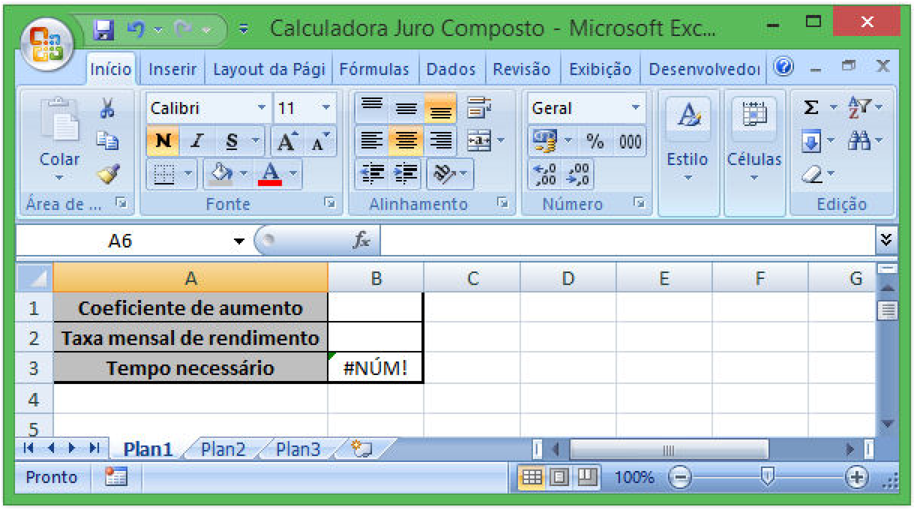


Figura 7 – Simulador de crescimento de montante

Note-se que ao digitar as fórmulas sem inserir valores nas células B1 e B2, aparece a mensagem #NÚM! na célula B3. Esse fato pode ser aproveitado para questionar os alunos sobre a razão disto acontecer, que obviamente é o fato do *software* considerar o valor de cada célula como sendo igual a zero. Como a resolução é em termos de logaritmos, o erro acontece devido ao fato de não existir o logaritmo para o número zero, independente da base logarítmica utilizada.

Inserindo os dados do Exemplo 7.2 no simulador, obteremos a solução encontrada analiticamente, conforme a Figura 8.

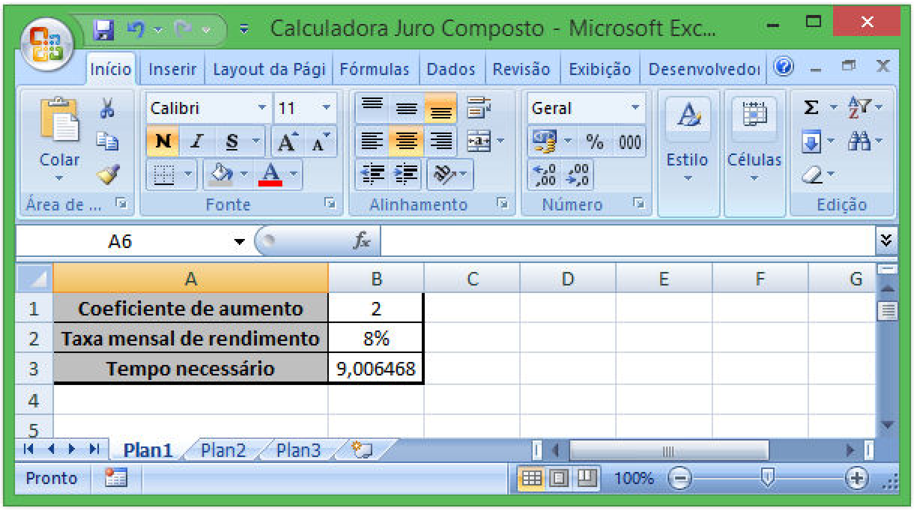


Figura 8 – Resolução do Exemplo 7.2 com o uso do simulador

Outro fato importante a ser ressaltado na resolução desta situação-problema é a relação entre a solução apresentada e a operação de mudança de base em sistemas de logaritmos. Essa operação é descrita a seguir.

Dado $log_a b = x$, com $a \neq 1$, $a > 0$ e $b > 0$, teremos:

$$log_a b = x \rightarrow a^x = b$$

Utilizando a base logarítmica c em ambos os membros, teremos:

$$log_c a^x = log_c b \rightarrow x. log_c a = log_c b$$

Desta forma, $x = \dfrac{\log_c b}{\log_c a}$.

Para a resolução da situação-problema, o valor de k é equivalente ao logaritmo do coeficiente de aumento m na base $1 + i$.

É importante destacar que o intuito da proposta da construção dos simuladores não é substituir o cálculo manual a ser feito em sala de aula, mas sim servir como motivação para a exploração das fórmulas de matemática financeira. Como será detalhado a seguir, veremos que cada situação possuirá suas particularidades, e que o conhecimento sobre as formas de resolução de cada situação-problema poderão gerar modalidades diferentes de simuladores.

Em cada situação-problema tratada será relevante que o aluno esteja apto a resolver equações na forma algébrica, de forma que não seja o professor o responsável por sintetizar as respostas para cada simulador, mas o aluno estimulado para tal feito. Espera-se que com isso, o aluno seja instigado a explorar e conhecer outras relações entre as diferentes variáveis que compõe as soluções das situações-problema analisadas.

7.1 SIMULADORES ENVOLVENDO A FÓRMULA $C(n) = C_0(1+i)^n$

Conforme vimos anteriormente, se um capital C_0 é aplicado à taxa mensal i no regime de juros compostos, a função que exprime o montante após n meses é dado pela Eq. 4.42. Considerando as resoluções algébricas de situações-problema que envolvem esta função, descreveremos a seguir a elaboração de dois simuladores.

7.1.1 Simulador 1 – Cálculo do montante após n meses

Dados o capital inicial, a taxa mensal de remuneração e o número de depósitos a serem efetuados, o simulador calculará o montante gerado após ser efetuado o último depósito. Este simulador é baseado na utilização direta da Eq. 4.42.

PROCEDIMENTO:

1) Na célula A1, digita-se Capital inicial;
2) Na célula A2, digita-se Taxa mensal;
3) Na célula A3, digita-se Número de meses;
4) Na célula A4, digita-se Montante;
5) Na célula B4, digita-se a fórmula =B1*(1+B2)^B3.

As células B1, B2 e B3 servirão como campo de entrada para os valores das variáveis da coluna A. Ao serem preenchidas, o montante será apresentado na célula B4. Formatando adequadamente as células, o simulador apresentará a disposição apresentada na Figura 9.

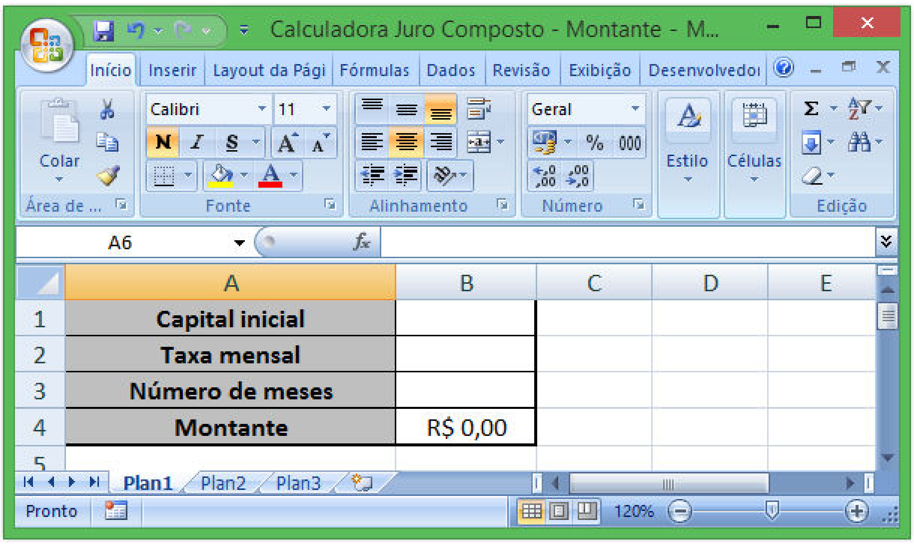


Figura 9 – *Layout* do Simulador 1

Inserindo os dados do Exemplo 7.1, obtemos a solução encontrada analiticamente, conforme exposto na Figura 10.

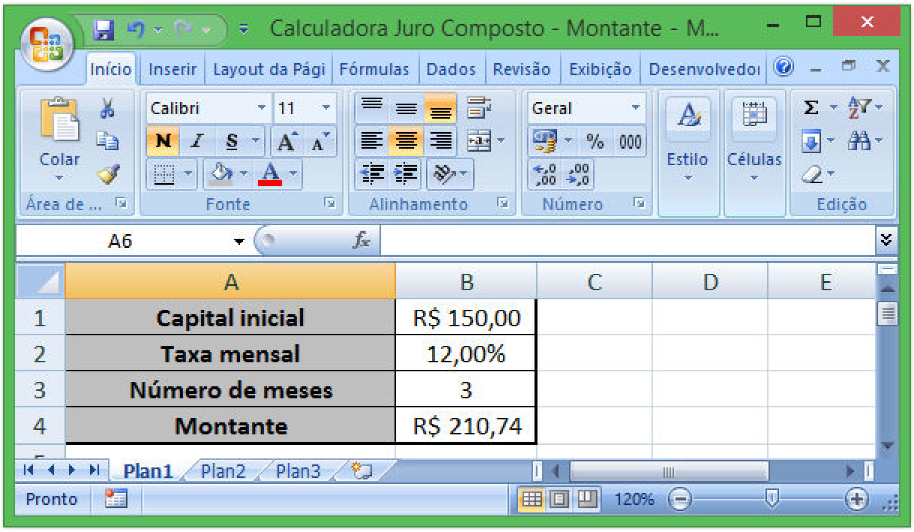


Figura 10 – Solução do Exemplo 7.1 com o Simulador 1

7.1.2 Simulador 2 - Tempo para evolução do capital inicial

Efetuando as manipulações algébricas na Eq. 4.42, podemos calcular o tempo necessário para se atingir determinado montante. Seja M o valor do montante para o qual o capital inicial C_0 deva evoluir, se aplicado à taxa mensal igual a i. Calculando o tempo t necessário para que isso ocorra, teremos a Eq. 7.7:

$$C_0(1+i)^t = M \tag{7.7}$$

Dividimos ambos os membros por C_0, obtemos a Eq. 7.8:

$$(1+i)^t = \frac{M}{C_0} \tag{7.8}$$

Utilizando logaritmos em ambos os membros, e isolando t, temos o resultado apresentado na Eq. 7.9:

$$t = \frac{\ln \dfrac{M}{C_0}}{\ln\,(1+i)} \tag{7.9}$$

Utilizando a Eq. 7.9, podemos elaborar o simulador para o cálculo do tempo.

PROCEDIMENTO:

1) Na célula A1, digita-se Capital inicial;
2) Na célula A2, digita-se Montante;
3) Na célula A3, digita-se Taxa mensal;

4) Na célula A4, digita-se Número de meses;
5) Na célula B4, digita-se a fórmula =ln(B2/B1)/ln(1+B3).

Assim como no simulador 1, as células B1, B2 e B3 serão os campos de entrada para os valores das variáveis da coluna A. A célula B4 será o campo de saída, onde será registrado o número de meses. Formatando as células, chegamos à visualização indicada na Figura 11.

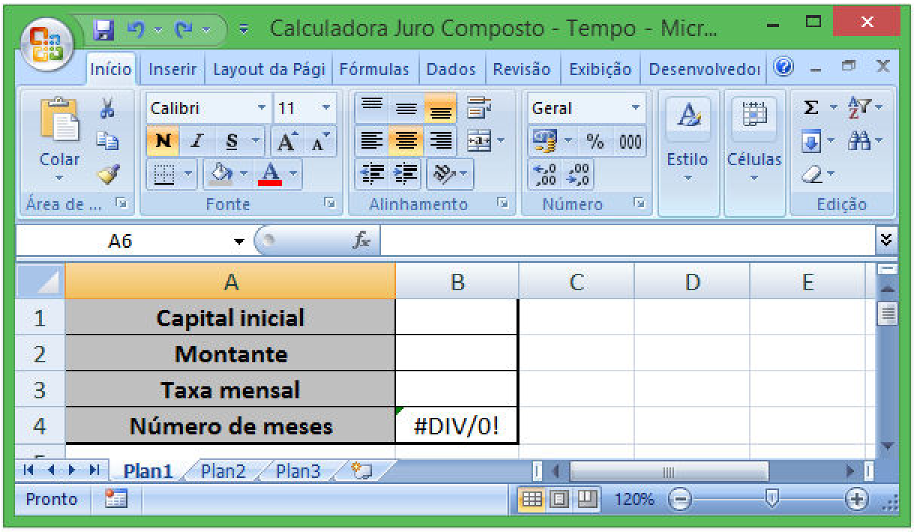


Figura 11 – *Layout* do Simulador 2

Note-se que com esse simulador podemos efetuar o cálculo do Exemplo 7.2 de forma empírica, bastando para isso inserir um valor qualquer como capital inicial e o seu dobro no campo de entrada do valor do montante a ser atingido. Por exemplo, podemos utilizar capital inicial igual a R$ 100,00 e montante igual a R$ 200,00, obtendo a solução encontrada anteriormente, conforme indicado na Figura 12.

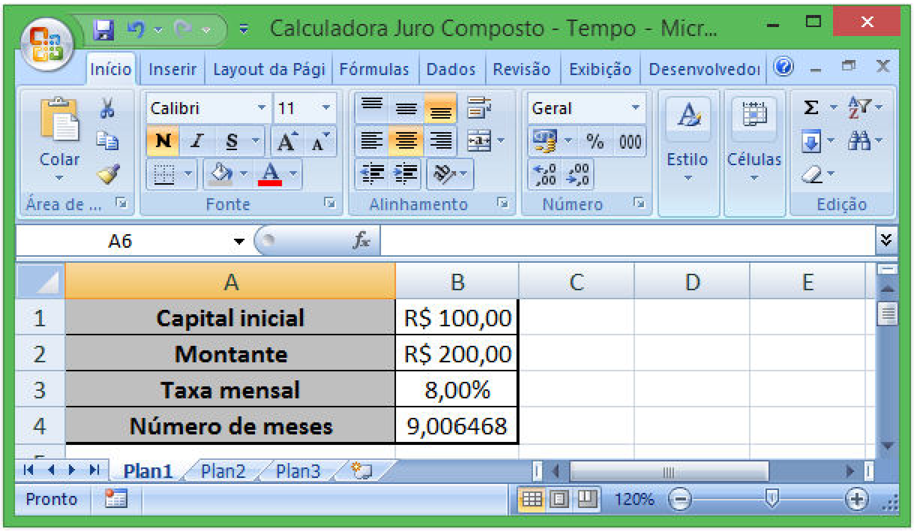


Figura 12 – Solução do Exemplo 7.2 com o Simulador 2

7.2 SIMULADORES DE FINANCIAMENTO

Embora não seja complicada a elaboração de um simulador que calcula todas as parcelas de um financiamento, optamos por sintetizar as informações das modalidades SAC e Price em dois pequenos simuladores, conforme descrições adiante.

7.2.1 Simulador 3 – Financiamento pelo Sistema de Amortização Constante (SAC)

Para elaboração do simulador, utilizaremos as seguintes informações:

i) O juro mensal a ser pago é calculado sobre o saldo devedor no momento do pagamento da parcela;

ii) A amortização mensal da dívida (A) é igual à divisão do valor financiado pelo número de parcelas do financiamento;

iii) Os valores das parcelas do financiamento são decrescentes, na forma de uma progressão aritmética de razão $-A.i$

Pela informação i), expressamos a parcela inicial por $C\left(1+\frac{i}{12}\right)$, onde C é o valor financiado e i é a taxa anual de juros cobrada. Da mesma forma, a parcela final será igual a $A\left(1+\frac{i}{12}\right)$, pois no momento da última parcela a dívida é igual à amortização mensal.

Pela informação ii), expressamos o valor da amortização mensal da dívida como sendo $\frac{C}{n}$, onde n é o número de parcelas do financiamento.

Pela informação iii), conseguimos expressar o total de juros do financiamento como a soma de uma PA com n termos, na qual o primeiro termo é igual a $C\left(1+\frac{i}{12}\right)$ e o último é igual a $A\left(1+\frac{i}{12}\right)$, utilizando a Eq. 4.13.

Os passos necessários para a elaboração do simulador são descritos a seguir.

PROCEDIMENTO:

1) Na célula A1, digitamos Valor financiado;
2) Na célula A2, digitamos Número de parcelas;
3) Na célula A3 digitamos Taxa anual de juros anual;
4) Na célula A4 digitamos Amortização mensal;

5) Na célula A5 digitamos Parcela inicial;
6) Na célula A6 digitamos Parcela final;
7) Na célula A7 digitamos Total de juros;
8) Na célula A8 digitamos Total do financiamento;

Na coluna B, teremos as células B1, B2 e B3 como campos de entrada. Nas demais digitamos as fórmulas:

9) Na célula B4, digitamos a fórmula =B1/B2;
10)Na célula B5, digitamos a fórmula =B1*(1+B3/12);
11)Na célula B6, digitamos a fórmula =B4+B1*(1+B3/12);
12)Na célula B7, digitamos a fórmula =(B5+B6)*B2/2-B1;
13)Na célula B8, digitamos a fórmula =B1+B7.

Formatando as células, teremos o *layout* apresentado na Figura 13.

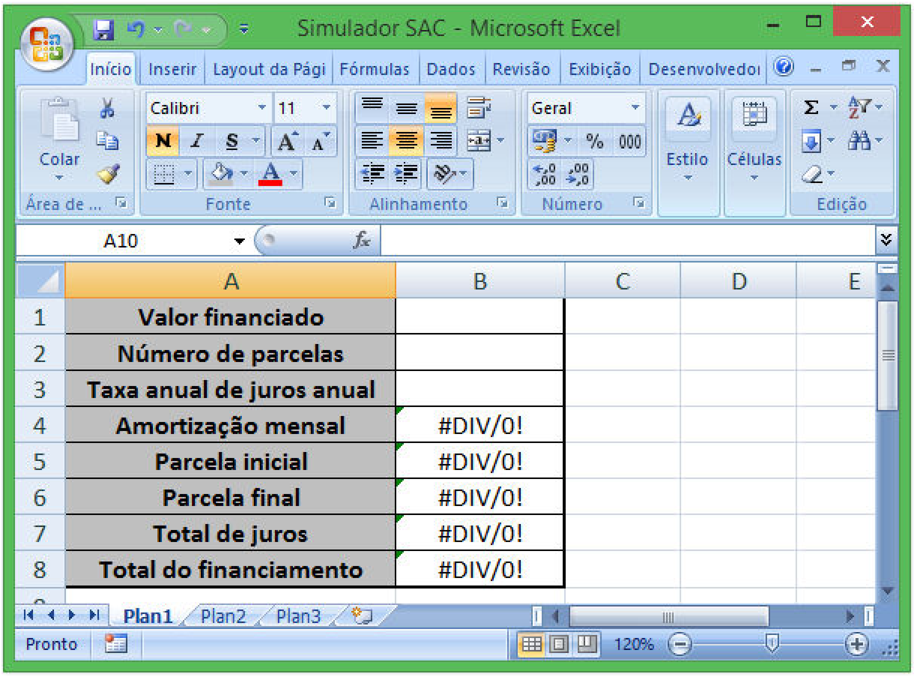
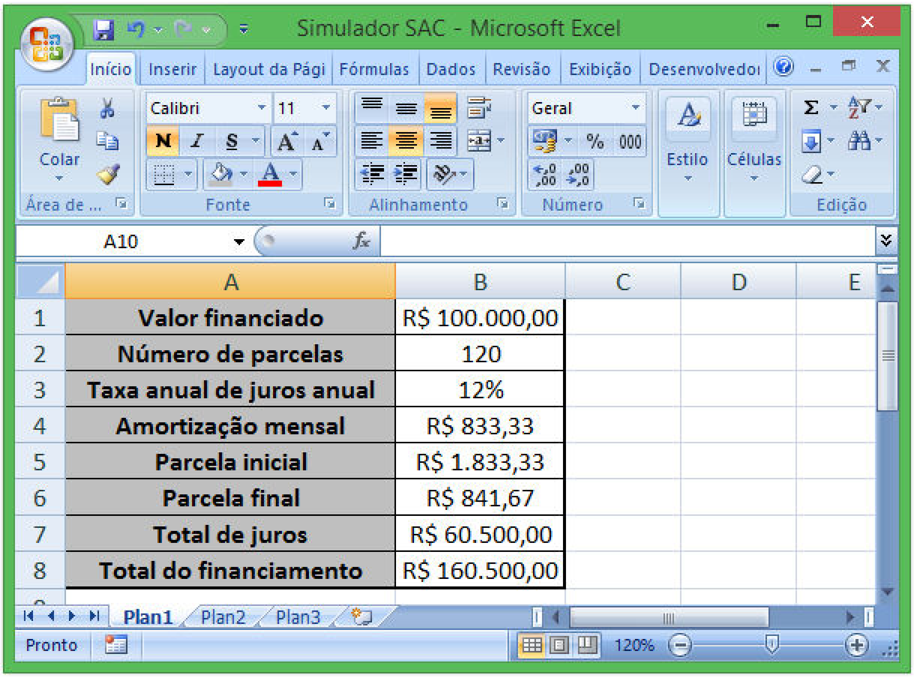


Figura 13 – *Layout* do Simulador 3

Tomemos os dados do exemplo a seguir para teste das funções do simulador.

EXEMPLO 7.4: Calcular o valor das parcelas final e inicial, a amortização mensal e o total de juros a serem pagos no financiamento de R$ 100000,00 no SAC em 10 anos, com taxa de 12% ao ano.

Inserindo os dados do Exemplo 7.4 no simulador, teremos os resultados apontados na Figura 14.



	A	B
1	**Valor financiado**	R$ 100.000,00
2	**Número de parcelas**	120
3	**Taxa anual de juros anual**	12%
4	**Amortização mensal**	R$ 833,33
5	**Parcela inicial**	R$ 1.833,33
6	**Parcela final**	R$ 841,67
7	**Total de juros**	R$ 60.500,00
8	**Total do financiamento**	R$ 160.500,00

Figura 14 – Solução do Exemplo 7.4 com o Simulador 3

Com a recente expansão e facilidade na obtenção de crédito habitacional, muitas famílias têm a oportunidade de adquirir ou construir um imóvel, deixando de pagar aluguel e investindo o dinheiro num imóvel próprio. Essa temática permite a exploração de diversas situações-problema.

No Exemplo 7.4 é importante notar que na parcela inicial são pagos exatamente R$ 1000,00 de juros, valor superior à amortização mensal. Aproveitando essa observação, podem ser exploradas situações onde é necessário decidir se é mais vantajoso financiar um imóvel ou se é mais atrativo continuar a pagar aluguel e comprar um imóvel à vista. Para isso, torna-se necessário o uso de mais de um simulador. Sem isso, a análise feita com a execução manual dos cálculos pode se tornar pouco atrativa, e até mesmo cansativa, para os alunos.

Como exemplo, consideremos a seguinte situação-problema.

EXEMPLO 7.5: Marcelo paga mensalmente o valor de R$ 700,00 a título de aluguel da casa onde mora. Ao procurar um imóvel para comprar, ficou interessado em um imóvel que custa R$ 90000,00 à vista. Diante disso, Marcelo tem duas opções:

a) Financiar o imóvel em até 360 parcelas pelo SAC, à taxa anual de 8%, com entrada de 10% do valor do imóvel. Para isso, Marcelo dispõe de até R$ 1200,00 mensais, com a possibilidade de investir a diferença entre a parcela do financiamento e os R$ 1200,00 à taxa de 1% ao mês;

b) Acumular o montante necessário para comprar um imóvel à vista. Para isso, o valor referente ao aluguel seria descontado dos R$ 1200,00, e esta diferença seria investida à taxa de 1% ao mês.

Qual a opção mais vantajosa: acumular o dinheiro ou financiar o imóvel?

CONSIDERAÇÕES A RESPEITO DA RESOLUÇÃO:

Esta questão não possui uma resposta direta, levando em conta o fator inflação. A discussão a respeito disso é pertinente no sentido de relacionar a passagem do tempo com as alterações no poder aquisitivo do dinheiro, que pode oscilar bastante em um curto espaço de tempo, ou ainda permanecer sem variações significativas. Para a questão proposta, uma alternativa viável seria estimular os alunos a pesquisar qual a valorização dos imóveis e aumento médio dos aluguéis nos últimos anos.

Além disso, deve ser considerado que a escolha pelo financiamento se torna uma forma de analisar o impacto da utilização do valor pago no aluguel para o pagamento das parcelas do financiamento.

Obviamente, a solução acima é mais complexa do que um simples cálculo de parcelas, envolvendo diferentes cálculos de matemática financeira. Possivelmente seria inviável sua inclusão numa abordagem resolutiva manual, mesmo com a utilização da calculadora, devido à complexidade dos cálculos e ao tempo necessário para seu desenvolvimento. No entanto, numa abordagem aliada à utilização de planilhas eletrônicas, isso poderia ser facilitado, pois parte dos cálculos poderiam ser feitos de forma recursiva ou ainda utilizando os simuladores de maneira adequada.

7.2.2 Simulador 4 - Financiamento pelo método Price

Utilizando a Eq. 4.62 podemos elaborar um simulador para o sistema de financiamento pelo método Price, no qual são calculados a parcela mensal e o total de juros a serem pagos durante o financiamento.

PROCEDIMENTOS:

1) Na célula A1, digitamos Valor financiado;
2) Na célula A2, digitamos Taxa de juros mensal;
3) Na célula A3, digitamos Número de parcelas;
4) Na célula A4, digitamos Valor da parcela;

5) Na célula A5, digitamos Total de juros;
6) Na célula A6, digitamos Total do financiamento;
7) Na célula B4, digitamos a fórmula =B1*B2/(1-(1+B2)^-B3);
8) Na célula B5, digitamos a fórmula =B3*B4-B1;
9) Na célula B6, digitamos a fórmula =B3*B4.

As células B1 a B3 serão campos de entrada dos valores das variáveis relacionadas na coluna A, e as células B4 a B6 os campos de saída. Formatando as células utilizadas, obtemos o *layout* apresentado na Figura 15.

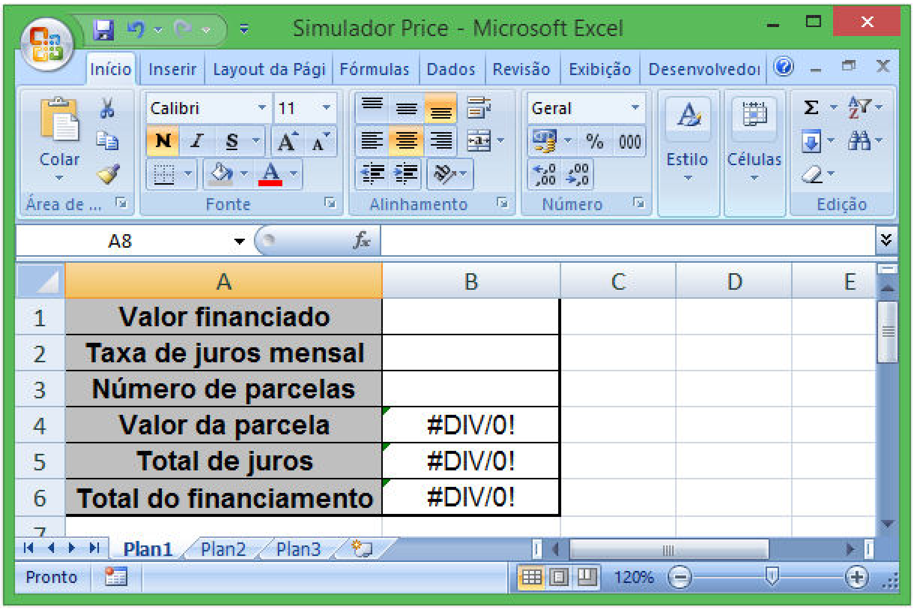


Figura 15 – *Layout* do Simulador 4

Inserindo os dados do exemplo 4.13, obtemos os valores encontrados apresentados na Figura 16.

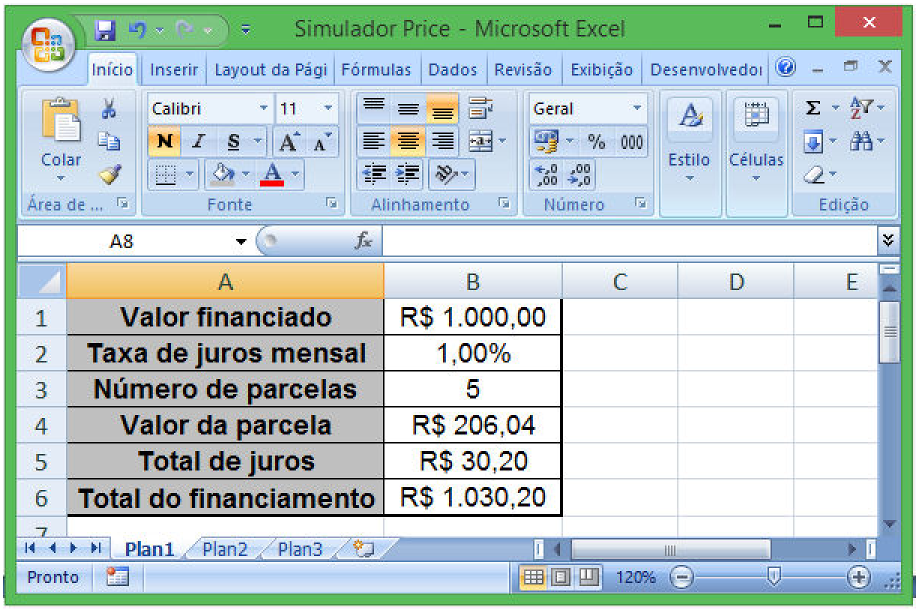


Figura 16 – Solução do Exemplo 4.13 com o Simulador 4

7.3 SIMULADOR 5 – ANÁLISE DE COMPRAS PARCELADAS

Utilizando a Eq. 4.58, elaboramos um simulador para a análise da viabilidade de se efetuar uma compra a prazo ou à vista. Dos simuladores aqui propostos, certamente este é o mais útil, pois os cálculos são bastante trabalhosos de se efetuar manualmente.

Para a elaboração deste simulador, além da utilização da fórmula 4.58, utilizaremos a função "teste lógico" do *Microsoft Excel* ®. Esta função consiste em atribuir um valor lógico para determinado resultado, baseando-se em critérios pré-definidos. Utilizaremos essa função para a comparação entre o valor do desconto dado para a compra à vista e o valor ganho em uma aplicação financeira se a quantia necessária para a compra à vista for aplicada para posteriores saques dos pagamentos das parcelas.

Os passos necessários para a elaboração do simulador são descritos a seguir.

PROCEDIMENTOS:

1) Na célula A1, digitamos Valor a parcelar;
2) Na célula A2, digitamos Número de parcelas;
3) Na célula A3, digitamos Desconto à vista;
4) Na célula A4, digitamos Rendimento da aplicação;
5) Na célula A5, digitamos Valor da parcela;
6) Na célula A6, digitamos Desconto;
7) Na célula A7, digitamos Ganho na aplicação;
8) Método mais vantajoso;
9) Na célula B5, digitamos a fórmula =B1/B2;
10) Na célula B6, digitamos a fórmula =B1*B3;
11) Na célula B7, digitamos a fórmula =B1*(1+B4)^B2-B5*(1+B4)^(B2-1)-B5*((1+B4)^(B2-1)-1)/B4;
12) Na célula B8, utilizamos a função teste lógico, digitando a fórmula =SE(B3*B1>B7;"À vista";SE(B4*B1=B7;"Indiferente";"Parcelado")).

As células B1 a B4 serão campos de entrada para os valores relacionados na coluna A, e as células B5 a B8 os campos de saída, onde serão registrados os cálculos e a análise da função teste lógico. Formatando as células utilizadas, o simulador terá o *layout* apresentado na Figura 17.

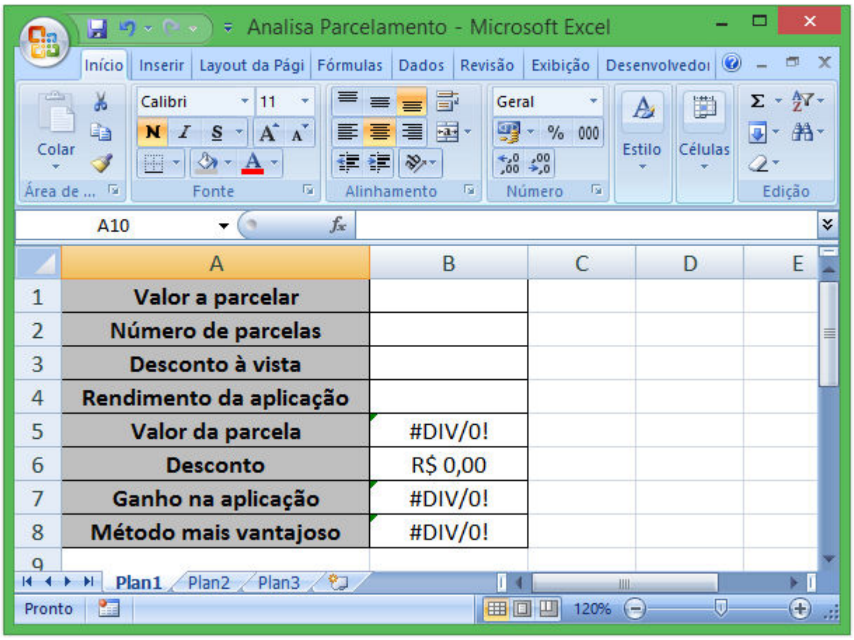


Figura 17 – Layout do Simulador 5

Retomando o Exemplo 4.9, utilizando o simulador, teremos a resposta apresentada na Figura 18.

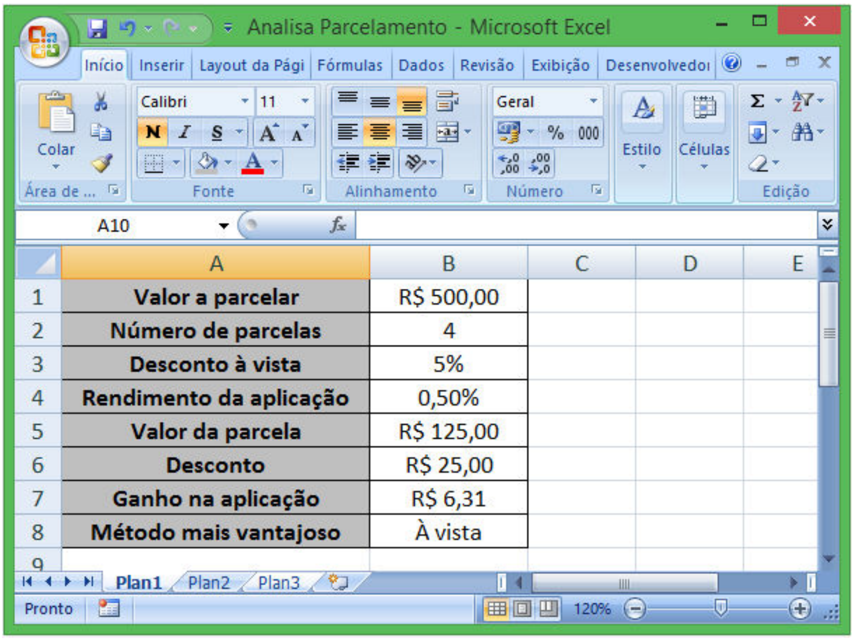


Figura 18 – Solução do Exemplo 4.9 utilizando o Simulador 5

Como a decisão no teste lógico é baseada no comparativo entre o valor do desconto e no saldo acumulado na aplicação financeira após a quitação de todas as parcelas, dependendo da taxa de rendimento da aplicação poderemos ter resultados desfavoráveis à compra à vista.

Por exemplo, caso o rendimento da aplicação seja de 2% ao mês, é verificado que é mais vantajoso parcelar o aparelho de televisão, conforme indicado na Figura 19.

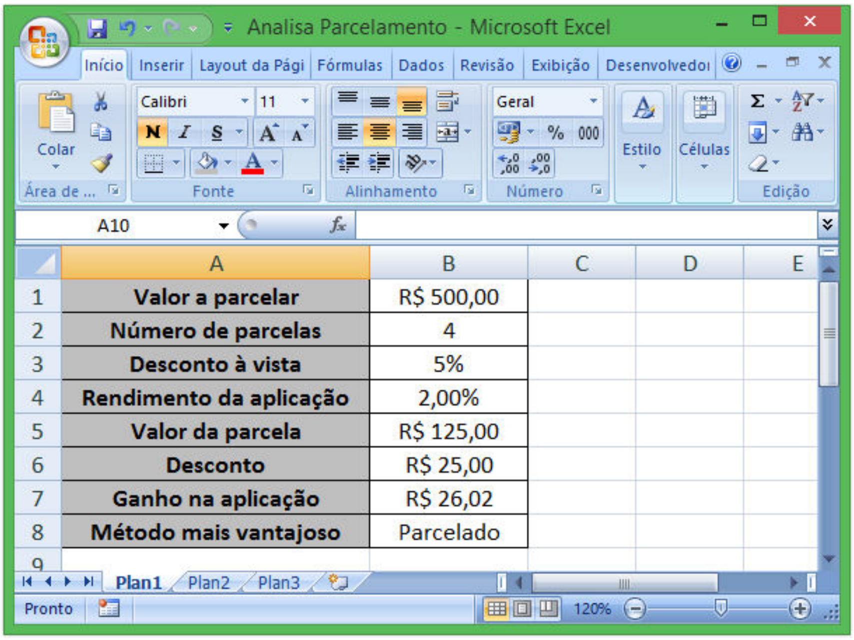


Figura 19 – Resolução do Exemplo 4.9 com rendimento mensal de 2%

7.4 SIMULADORES DE RENDAS CERTAS

É bastante comum as instituições bancárias oferecem planos de previdência privada a seus clientes. Em alguns desses planos, um determinado valor é pago mensalmente durante um determinado período de tempo para que futuramente se desfrute de um benefício mensal.

Essas rendas podem ser temporárias ou perpétuas, como visto nas subseções 4.7.2 e 4.7.3. Os simuladores a seguir são baseados nas Eq. 4.52 e 4.57.

7.4.1 Simulador 6 - Renda Periódica Finita

Para simular o valor da parcela a ser paga mensalmente em função do benefício que se pretende receber e do número de meses pelo qual se pretende receber a renda utilizaremos a Eq. 4.52, conforme passos a seguir.

PROCEDIMENTOS:

1) Na célula A1, digitamos Renda mensal esperada;
2) Na célula A2, digitamos Tempo de contribuição;
3) Na célula A3, digitamos Meses de recebimento da renda;
4) Na célula A4, digitamos Rendimento mensal;
5) Na célula A5, digitamos Montante a ser acumulado;

6) Na célula A6, digitamos Depósito mensal necessário;

7) Na célula B5, digitamos a fórmula =B1*(1-(1+B4)^-B3)/B4;

8) Na célula B6, digitamos a fórmula =B1*(1-(1+B4)^-B3)/((1+B4)^B2-1).

As células B1 a B4 serão os campos de entrada para as variáveis relacionadas na coluna A, e as células B5 e B6 serão os campos de saída.

Formatando as células, o simulador terá o *layout* apresentado na Figura 20.

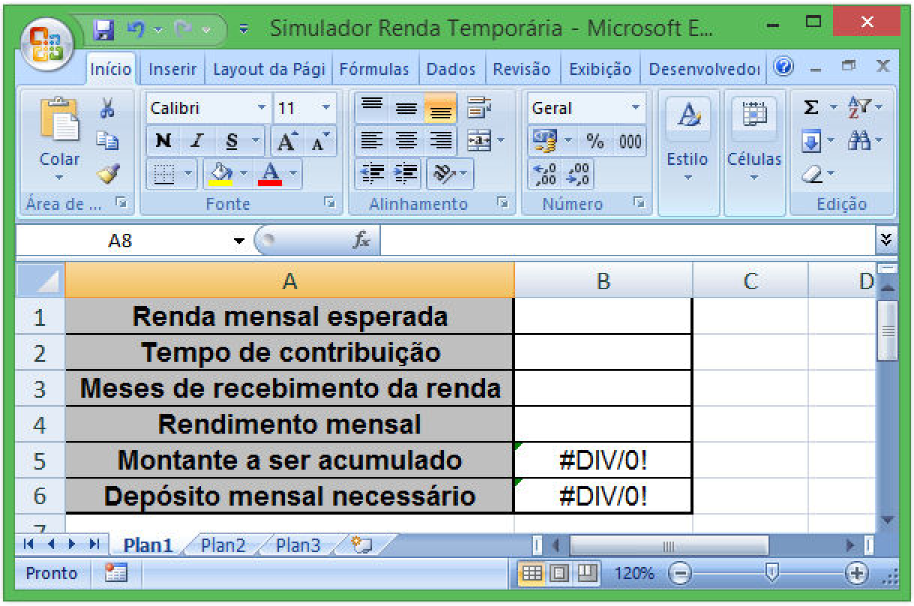


Figura 20 – *Layout* do Simulador 6

Inserindo os dados da Situação 4.2, o resultado confere com o encontrado analiticamente, conforme indicado na Figura 21.

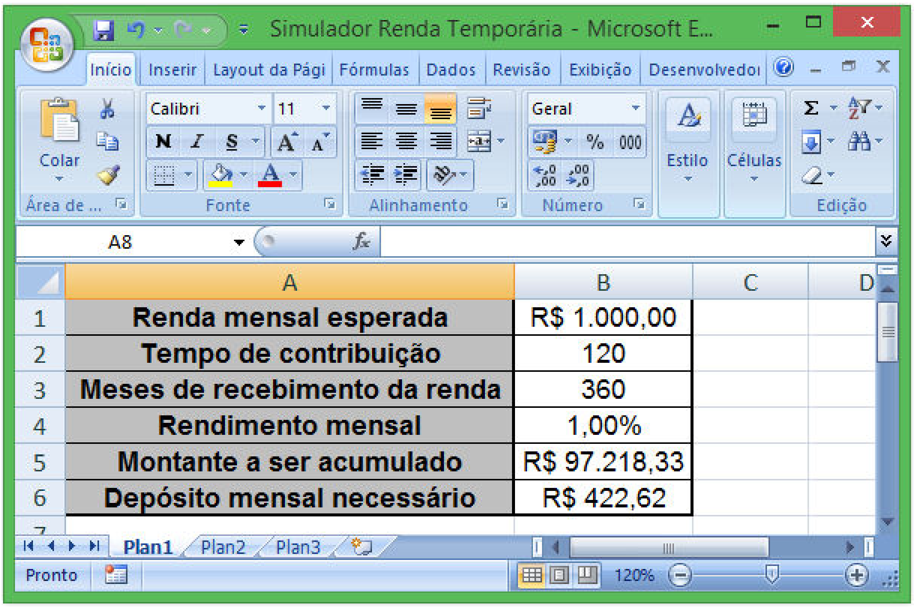


Figura 21 – Solução da Situação 4.2 utilizando o Simulador 6

7.4.2 Simulador 7 - Renda Perpétua

Utilizando a Eq. 4.57, elaboramos um simulador para o cálculo de rendas perpétuas. Os passos para sua elaboração são descritos a seguir.

PROCEDIMENTOS:

1) Na célula A1, digitamos Renda mensal esperada;
2) Na célula A2, digitamos Tempo de contribuição;
3) Na célula A3, digitamos Rendimento mensal;
4) Na célula A4, digitamos Montante a ser acumulado;
5) Na célula A5, digitamos Depósito mensal necessário;
6) Na célula B4, digitamos a fórmula =B1/B3;
7) Na célula B5, digitamos =B1/((1+B3)^B2-1).

O layout e a solução da Situação 4.3 são indicados, respectivamente, nas figuras 22 e 23.

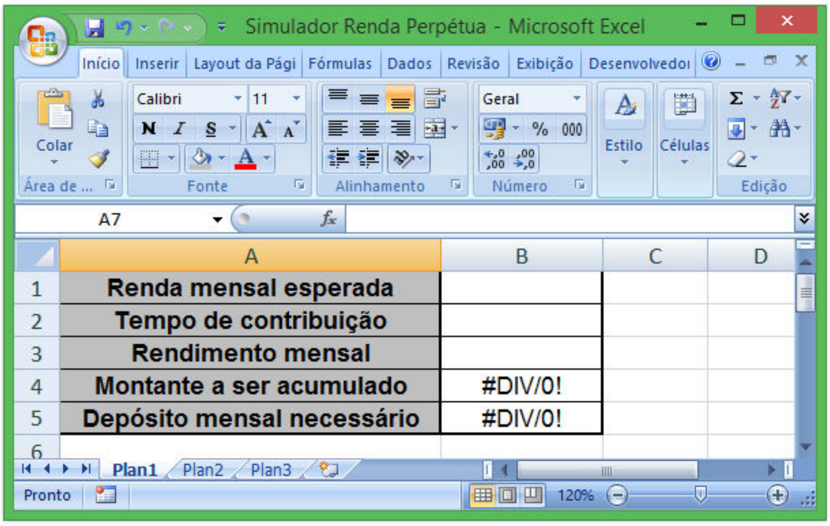


Figura 22 – Layout do Simulador 7

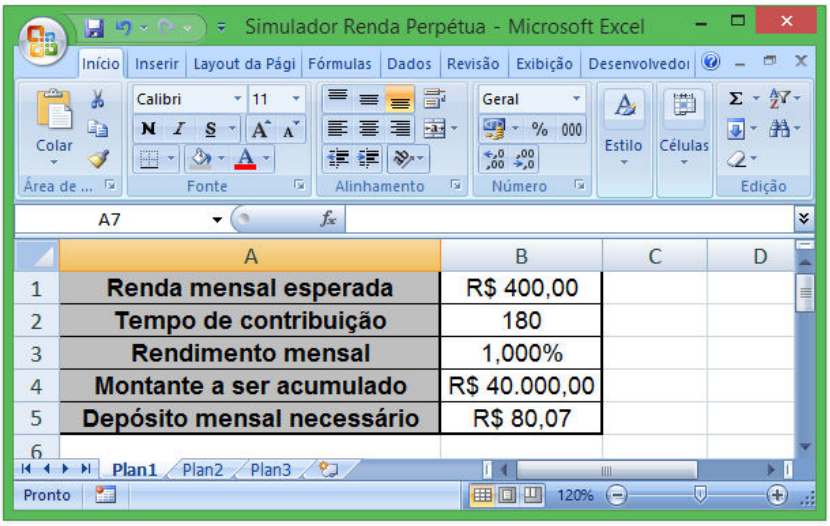


Figura 23 – Solução da Situação 4.3 usando o Simulador 7

8 ELABORAÇÃO DO APLICATIVO SOF APP

Conforme citamos anteriormente, a proposta de atividades aqui exposta emerge da necessidade de um ambiente de investigação onde os alunos sejam motivados a analisar e simular operações financeiras que eventualmente podem ocorrer futuramente em seu cotidiano.

No entanto, embora os simuladores gerados por meio de planilhas eletrônicas apresentem as resoluções modeladas pelas situações-problema, nem sempre é possível dispor de um computador no momento em que tais cálculos se tornam efetivamente necessários, como em um estabelecimento comercial durante uma pesquisa de preço ou no momento da compra, o que tiraria o caráter prático de tais simuladores com o *Microsoft Excel* ®.

Com o intuito de suprir essa lacuna, reunimos os simuladores desenvolvidos com as planilhas eletrônicas em um aplicativo para dispositivos móveis. Neste capítulo, apresentamos a estruturação e funcionamento deste aplicativo.

8.1 JUSTIFICATIVA

Com o aumento da utilização de dispositivos móveis como *tablets* e *smartphones*, cada vez mais o uso de aplicativos é disseminado, ganhando espaço como ferramenta auxiliar em diferentes áreas.

Acompanhando essa crescente expansão, desenvolvemos o *SOF App* (Simulador de Operações Financeiras), visando à disponibilização das modalidades de simuladores desenvolvidos com as planilhas eletrônicas de forma que o conhecimento escolar possa ser compartilhado com a comunidade, contribuindo com o planejamento financeiro das famílias, bem como incentivo ao uso consciente e otimizado do dinheiro.

O aplicativo foi desenvolvido em parceira com Robson Fernando Duda, mestrando vinculado ao Mestrado em Computação Aplicada da Universidade Estadual de Ponta Grossa, sendo este o responsável pela operacionalização de toda a parte técnica da arquitetura e programação do *SOF App*.

Visando facilitar o acesso a esse conjunto de informações, o aplicativo será disponibilizado para download gratuito no site da *Play Store* do *Google*®, na categoria Finanças. A instalação do mesmo pode ser efetuada acessando o instalador no endereço eletrônico https://play.google.com/store/apps/category/FINANCE.

8.2 RECURSOS UTILIZADOS

Entre os diferentes sistemas operacionais disponíveis para a execução de aplicativos, como *Windows Phone*® e *iOS*®, o mais popular é a plataforma *Android*®, que em 2011 estava presente em 47% dos dispositivos móveis vendidos nos Estados Unidos (DEITEL, 2013), e crescendo cada vez mais sua utilização.

Android® é uma plataforma de código aberta que foi desenvolvida com base no sistema operacional Linux. Seu sistema operacional é *open source* e sua utilização é gratuita, sendo usado em muitos dispositivos móveis que utilizam a confiabilidade e portabilidade da linguagem Java para o desenvolvimento de seus aplicativos. Essa linguagem, considerada de alto nível, é usada para gerenciar e controlar todos os processos nos telefones celulares, *tablets* e outros dispositivos móveis (DARWIN, 2012).

O aplicativo desenvolvido foi criado para ser executado em dispositivos móveis que utilizam o sistema operacional *Android*®, versão 2.3 *Gingerbread*. Isso permite que ele seja executado em qualquer dispositivo móvel com *Android*® a partir dessa versão, o que aumenta a compatibilidade com um número maior de dispositivos. A versão atual do sistema é a 4.3 *Jelly Bean*.

Para o desenvolvimento do aplicativo foi utilizado um *notebook Dell*® *Inspiron*, com processador *Intel*® *Pentium* R T4400, *dual core*, com 2.20 Ghz, memória RAM de 3 Gb e sistema operacional *Windows*® 7 *Ultimate* de 32 bits. A IDE (*Integrated Development Environment*) utilizada como ferramenta para codificação foi a *Eclipse Android Developer Tools*, na versão 22.0.5-757759.

8.3 *LAYOUT* E FUNÇÕES

O *SOF App* possui quatro categorias distintas de cálculo. Essa estrutura foi escolhida visando facilitar a localização da modalidade a ser utilizada e a centralização das mesmas por núcleo comum de utilização.

Para facilitar o entendimento sobre as funcionalidades das categorias que compõe o *SOF App*, cada simulador possui em sua tela inicial notas explicativas a respeito do funcionamento de suas modalidades, com o detalhamento da resolução de exemplos passo a passo.

Na Figura 24 apresentamos o *layout* da tela inicial do aplicativo, reunindo as quatro modalidades de simulação que o compõe.

Figura 24 – Tela inicial do *SOF App*

A seguir, descrevemos a forma de disposição das telas, como foram organizados os menus dos simuladores e um breve resumo das modalidades de simulação presentes no aplicativo.

I) INVESTIMENTOS: divide-se em três modalidades:

a) Calcula Montante: Calcula o montante de uma aplicação financeira com taxa de rendimento e depósito mensal fixos;

b) Calcula Parcela: Calcula o valor do depósito mensal a ser efetuado para se atingir determinado montante, dados o número de depósitos a serem efetuados e a taxa de rendimento mensal da aplicação;

c) Calcula Tempo: Calcula o tempo necessário para se obter determinado montante, dados a taxa de rendimento mensal da aplicação e o valor do depósito mensal.

A ordem de visualização das telas deste simulador é disposta conforme as figuras 25 a 28.

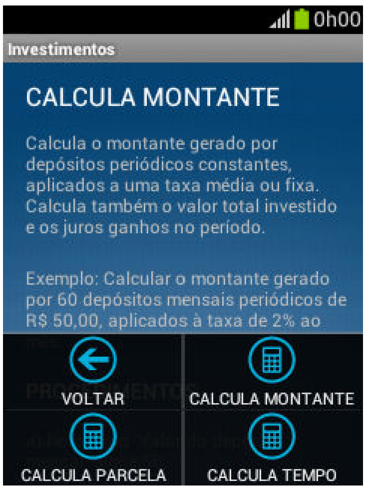


Figura 25 – Tela inicial do simulador Investimentos

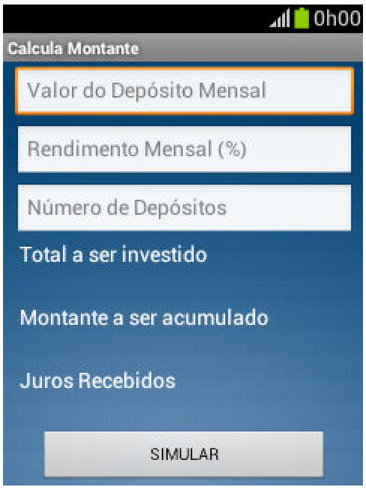


Figura 26 – Tela da modalidade Calcula Montante

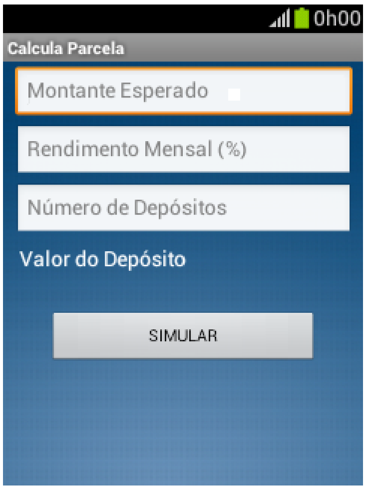


Figura 27 – Tela da modalidade Calcula Parcela

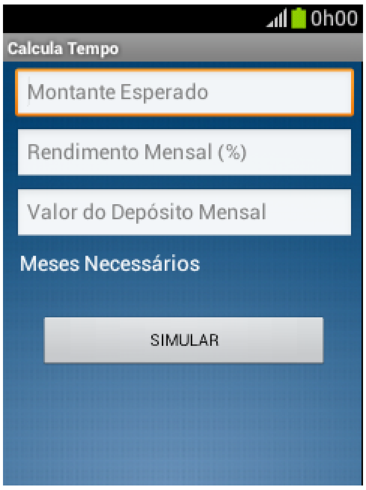


Figura 28 – Tela da modalidade Calcula Tempo

II) FINANCIAMENTOS: divide-se em duas modalidades:

a) PRICE: Calcula o valor da parcela, o total dos juros a serem pagos e o custo total de um financiamento pelo método Price, dados o valor financiado, a taxa mensal de juros e o número de parcelas;

b) SAC: Calcula o valor das parcelas inicial e final de um financiamento pelo SAC, dados o valor financiado, a taxa anual de juros e o número de parcelas. Calcula também o valor da amortização mensal e os juros pagos no financiamento.

A ordem de visualização das telas deste simulador é disposta conforme as figuras 29 a 31.

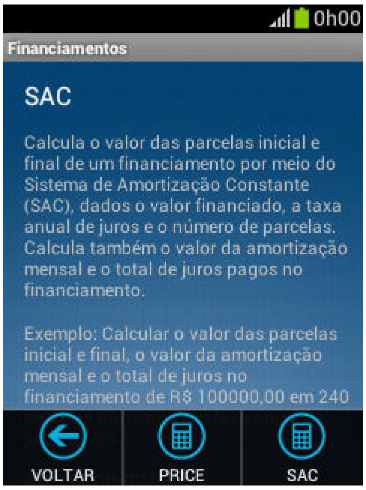


Figura 29 – Tela inicial do simulador Financiamentos

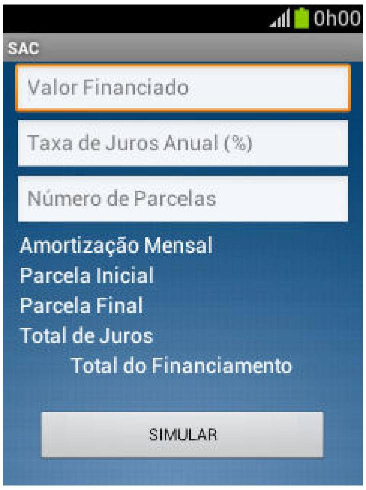


Figura 30 – Tela da modalidade SAC

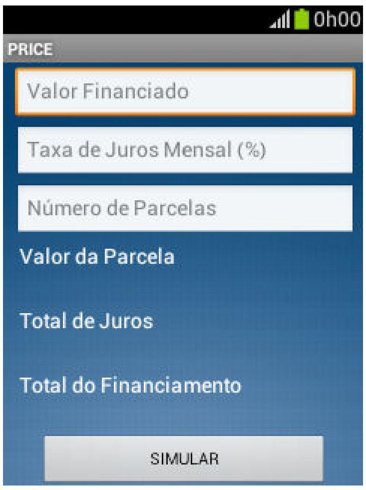


Figura 31 – Tela da modalidade Price

III) ANALISA PARCELAMENTO: Determina o método mais apropriado para se efetuar compras parceladas, dados o valor do bem, o número de parcelas, a taxa percentual de desconto para compra à vista e o rendimento mensal de uma aplicação financeira na qual seja possível investir o valor do bem durante o pagamento do parcelamento.

Assim como o simulador desenvolvido utilizando as planilhas eletrônicas, o aplicativo não considera a inflação e deflação no valor aquisitivo do dinheiro.

A ordem de visualização das telas deste simulador é disposta conforme as figuras 32 e 33.

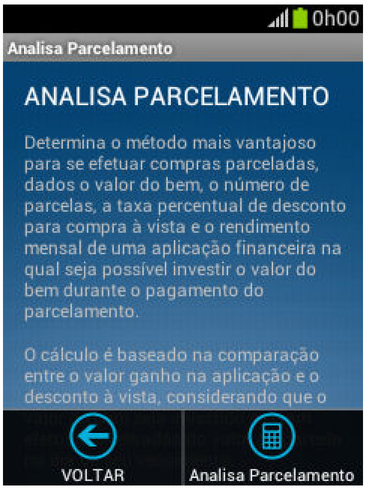


Figura 32 – Tela inicial do simulador Analisa Parcelamento

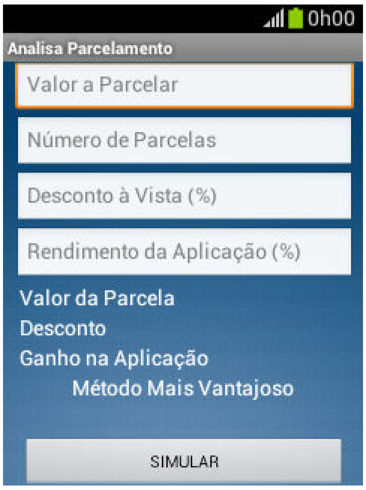


Figura 33 – Tela do simulador Analisa Parcelamento

IV) RENDAS: divide-se em duas modalidades:

a) Renda perpétua: permite calcular o valor mensal que deve ser depositado para se obter uma renda mensal perpétua fixa, dados o número de depósitos a serem efetuados, a taxa mensal de rendimento da aplicação e a renda mensal esperada;

b) Renda temporária: permite calcular o valor mensal que deve ser depositado para se obter uma renda mensal periódica finita, dados o número de depósitos a serem efetuados, a taxa mensal de rendimento da aplicação financeira, a renda mensal esperada e o período de tempo de recebimento da renda.

A visualização das telas deste simulador é disposta nas figuras 34 a 36.

Figura 34 – Tela inicial do simulador Rendas

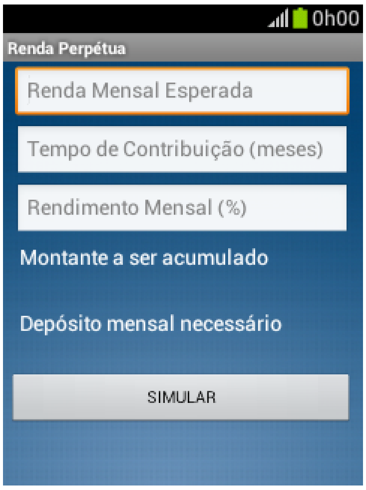


Figura 35 – Tela da modalidade Renda Perpétua

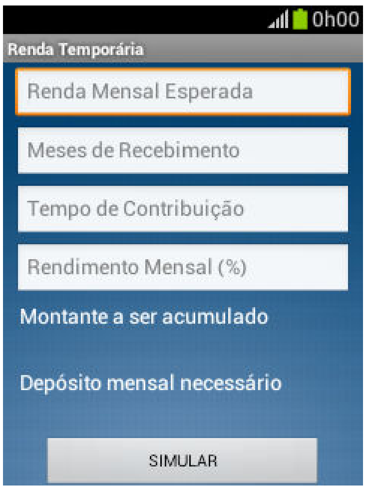


Figura 36 – Tela da modalidade Renda Temporária

8.4 EXEMPLOS DE UTILIZAÇÃO DO SOF APP

A seguir apresentamos situações-problema nas quais é possível obter a solução utilizando o *SOF App*, com o detalhamento da forma de inserção de dados.

EXEMPLO 8.1: Calcular o montante gerado por 60 depósitos mensais periódicos de R$ 50,00, aplicados à taxa de 2% ao mês.

SIMULADOR A SER UTILIZADO: Investimentos, modalidade Calcula Montante.

PROCEDIMENTOS:

a) No campo Valor do Depósito Mensal, digitar 50;
b) No campo Rendimento Mensal, digitar 2;
c) No campo Número de depósitos, digitar 60;
d) Clicar em SIMULAR.

O aplicativo retornará os seguintes valores, conforme indicado na Figura 37:

- Total a ser investido: R$ 3000,00;
- Montante a ser acumulado: R$ 5702,58;
- Juros recebidos: R$ 2702,58.

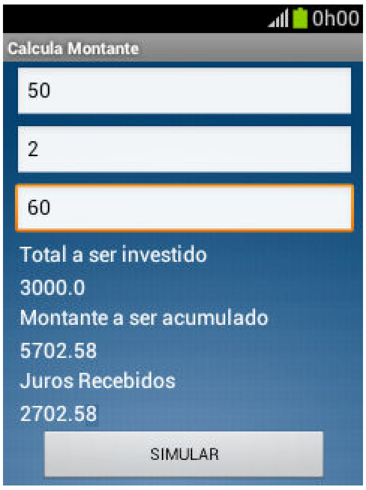


Figura 37 – Exemplo de utilização da modalidade Calcula Montante

EXEMPLO 8.2: Calcular o valor dos 60 depósitos mensais periódicos, aplicados à taxa de 2% ao mês, necessários para obter o montante de R$ 5702,58.

SIMULADOR A SER UTILIZADO: Investimentos, modalidade Calcula Parcela.

PROCEDIMENTOS:

a) No campo Montante Esperado digite 5702,58;
b) No campo Rendimento Mensal digite 2;
c) No campo Número de Depósitos digite 60;
d) Clique em SIMULAR.

O aplicativo retornará o valor R$ 50,00 no campo Depósito Mensal Necessário, conforme indicado na Figura 38.

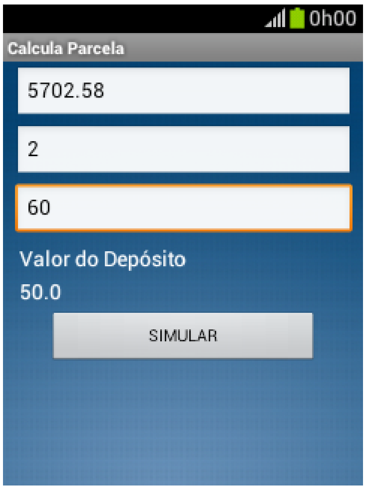


Figura 38 – Exemplo de utilização da modalidade Calcula Parcela

EXEMPLO 8.3: Calcular o tempo necessário para obter o montante de R$ 5702,58, efetuando 60 depósitos mensais periódicos de R$ 50,00, aplicados à taxa de rendimento de 2% ao mês.

SIMULADOR A SER UTILIZADO: Investimentos, modalidade Calcula Tempo.

PROCEDIMENTOS:

a) No campo Montante Esperado digite 5702,58;
b) No campo Rendimento Mensal digite 2;
c) No campo Valor do Depósito Mensal digite 50;
d) Clique em SIMULAR.

O aplicativo retornará o valor 60 no campo Número de Depósitos necessários, conforme indicado na Figura 39.

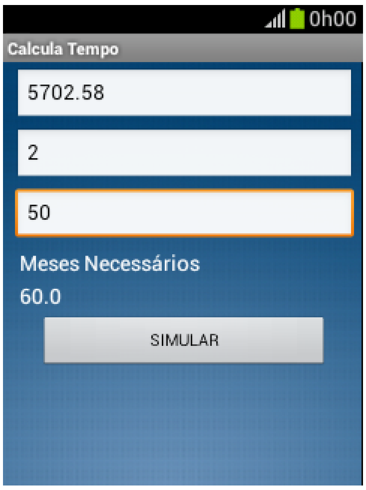


Figura 39 – Exemplo de utilização da modalidade Calcula Tempo

EXEMPLO 8.4: Calcular o valor da parcela no financiamento de R$ 5000,00 em 60 parcelas mensais no sistema Price, à taxa de juros de 1,5% ao mês.

SIMULADOR A SER UTILIZADO: Financiamentos, modalidade Price.

PROCEDIMENTOS:

a) No campo Valor financiado digite 5000;
b) No campo Taxa de juros mensal digite 1,5;
c) No campo Número de parcelas digite 60;
d) Clique em SIMULAR.

O aplicativo retornará os valores a seguir, conforme indicado na Figura 40:

- Valor da parcela: R$ 126,97;
- Total de juros: R$ 2618,03;
- Total do financiamento: R$ 7618,03.

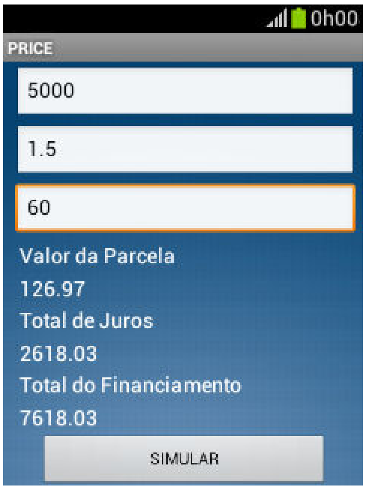


Figura 40 – Exemplo de utilização da modalidade Price

EXEMPLO 8.5: Calcular o valor das parcelas inicial e final, o valor da amortização mensal e o total de juros no financiamento de R$ 100000,00 em 240 parcelas mensais, com taxa anual de juros de 8%.

SIMULADOR A SER UTILIZADO: Financiamentos, modalidade SAC.

PROCEDIMENTOS:

a) No campo Valor financiado, digitar 100000;
b) No campo Taxa de juros anual, digitar 8;
c) No campo Número de parcelas, digitar 240.
d) Clique em SIMULAR.

O aplicativo apresentará os valores a seguir, conforme indicado na Figura 41:

- Amortização mensal: R$ 416,67;
- Parcela inicial: R$ 1083,33;
- Parcela final: R$ 419,44;
- Total de juros: R$ 80333,33;
- Total do Financiamento: R$ 180333,33.

Figura 41 – Exemplo de utilização da modalidade SAC

EXEMPLO 8.6: Suponha que você recebeu o boleto do IPTU no valor de R$ 300,00. Você pode optar por parcelar essa quantia em 10 parcelas mensais iguais ou pagar à vista. Para pagamento à vista, há o desconto de 5% sobre o valor do IPTU. Se você tem o valor para pagar o IPTU à vista e pode investi-lo à taxa de 1% ao mês, qual a opção mais vantajosa: pagar à vista ou parcelar?

SIMULADOR A SER UTILIZADO: Analisa Parcelamento.

PROCEDIMENTOS:

a) No campo Valor a parcelar digite 300;
b) No campo Nº de parcelas digite 10;
c) No campo Desconto à vista digite 5;
d) No campo Rendimento da Aplicação digite 1;
e) Clique em SIMULAR.

O aplicativo retornará os valores seguintes, conforme ilustrado na Figura 42:

- Valor da parcela: R$ 30,00;
- Desconto: R$ 15,00;
- Saldo remanescente na aplicação: R$ 17,52;
- Método mais vantajoso: Parcelado.

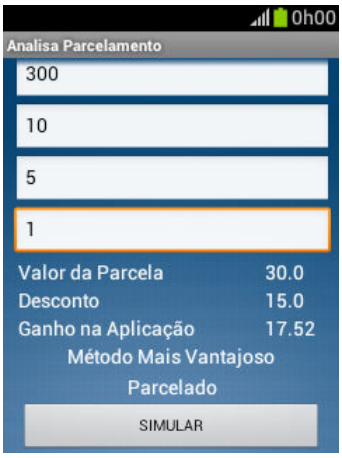


Figura 42 – Exemplo de utilização da modalidade Analisa Parcelamento

EXEMPLO 8.7: Calcular o valor que deve ser depositado mensalmente durante 30 anos, aplicado à taxa de 1% ao mês, para obter uma renda mensal perpétua de R$ 1500,00.

SIMULADOR A SER UTILIZADO: Rendas, modalidade Renda Perpétua.

PROCEDIMENTOS:

a) No campo Renda Mensal Esperada digite 1500;
b) No campo Tempo de contribuição digite 360;
c) No campo rendimento mensal digite 1%;
d) Clique em SIMULAR.

O aplicativo retornará os valores a seguir, conforme ilustrado na Figura 43:

- Valor a ser acumulado: R$ 150000,00;
- Valor mensal a ser depositado: R$ 42,92.

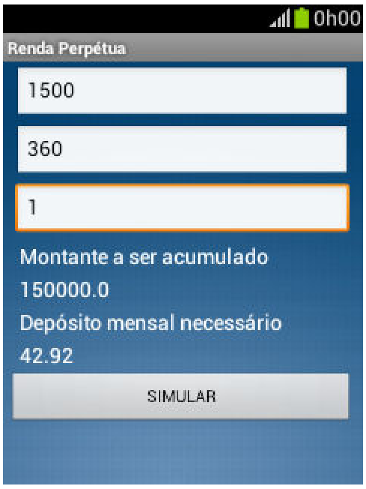


Figura 43 – Exemplo de utilização da modalidade Renda Perpétua

EXEMPLO 8.8: Calcular o valor que deve ser depositado mensalmente durante 30 anos, aplicado à taxa de 1% ao mês, para obter uma renda mensal de R$ 1500,00 durante 10 anos.

SIMULADOR A SER UTILIZADO: Rendas, modalidade Renda Temporária.

PROCEDIMENTOS:

a) No campo Renda mensal esperada digite 1500;
b) No campo Tempo de recebimento digite 120;
c) No campo Tempo de contribuição digite 360;
d) No campo Rendimento mensal digite 1;
e) Clique em SIMULAR.

O aplicativo retornará os valores a seguir, conforme ilustrado na Figura 44:

- Valor acumulado: R$ 104550,78;
- Valor mensal a ser depositado: R$ 29,91;
- Valor total depositado: R$ 10769,29.

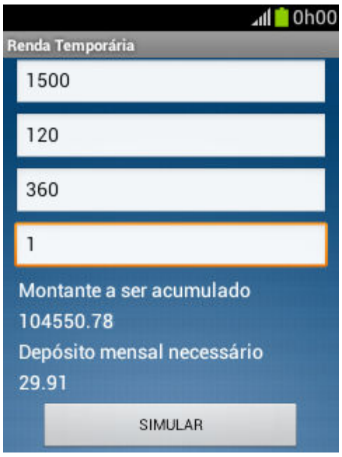


Figura 44 – Exemplo de utilização da modalidade Renda Temporária

É importante destacar que embora os exemplos listados possuam taxas fixas de remuneração, nem sempre isso ocorre em situações reais. Por isso optamos por nomear o aplicativo como simulador e não como calculadora, pois normalmente os cálculos a serem efetuados são estimativos.

9 CONCLUSÃO

O presente trabalho teve como objetivo buscar respostas às formas de como o estudo da matemática financeira pode ser explorado na educação básica, em especial no Ensino Médio, com abordagens que relacionem o estudo de sequências, estimulem a educação financeira, e sejam idealizadas com a utilização de recursos tecnológicos.

Em consonância com a LDB e os autores estudados no referencial teórico, vemos que a educação básica deve contemplar o pleno desenvolvimento do aluno para o mundo do trabalho e para o exercício da cidadania, razão pela qual as abordagens dos conteúdos devem ser pautadas no estudo das aplicações da teoria em situações reais significativas.

Normalmente, a matemática financeira é superficialmente estudada durante os três anos do Ensino Médio, resumindo-se ao cálculo de juros simples e compostos. Sua subutilização em sala de aula não é suficiente para gerar uma aprendizagem significativa, e tópicos importantes à temática nem sempre são abordados de forma profícua. Até mesmo no Exame Nacional do Ensino Médio e em exames vestibulares, sua inserção ainda é feita de maneira discreta, baseada em simples aplicações dos regimes de capitalização simples e composta.

O bom entendimento sobre as práticas comerciais é preponderante no estudo dessa temática, que também deve ser voltada para o entendimento das operações de empréstimo, podendo ser complementada com o entendimento sobre aplicações de capital, no qual é imprescindível o conhecimento sobre os padrões presentes em séries numéricas relacionadas.

A articulação de atividades voltadas às aplicações de progressões aritméticas e geométricas pode ser viabilizada baseada no estudo de recorrências lineares, através das quais são verificados diferentes padrões de regularidade em sequências numéricas, em especial, às variações de crescimento linear e exponencial. Essas equações de diferenças se constituem numa importante ferramenta para descrever modelos discretos.

A inserção de atividades diferenciadas no ensino de matemática se torna evidente no sentido de que somente as resoluções mecânicas não suprem as expectativas discentes com relação à disciplina. Além disso, o uso da tecnologia em sala de aula pode ser uma aliada do docente no sentido de possibilitar a exploração de conceitos e aplicações que possivelmente não seriam abordadas numa perspectiva tradicional, somente com a resolução analítica dos cálculos.

As planilhas eletrônicas se apresentam como uma ferramenta útil nas aulas de matemática, e sua inserção no ambiente escolar deve ser planejada cautelosamente, de forma que não se sobreponha aos objetivos principais da disciplina. Nesse contexto, a preparação técnico-didática do docente envolvido é fator preponderante, pois existe a possibilidade do *software* ser subutilizado, gerando um efeito inverso do esperado na aprendizagem e no envolvimento discente.

Se bem exploradas, as planilhas eletrônicas são eficientes no desenvolvimento de simuladores ou calculadoras para uma vasta gama de situações, nas quais é possível aliar a exploração algébrica de fórmulas e verificação de padrões na heurística das resoluções.

Atividades neste sentido podem servir como estímulo para o interesse do estudo da matemática, pois sem a plena compreensão dos conteúdos abordados e de sua aplicabilidade, a possibilidade de um projeto desse viés fracassar é evidente.

Um ponto de destaque desse trabalho foi o desenvolvimento do aplicativo SOF App, executável em dispositivos móveis que utilizam o sistema operacional *Android* ®. Com esta ferramenta, espera-se que os alunos envolvidos possam compartilhar o conhecimento adquirido em sala com sua comunidade, disseminando a utilização do aplicativo e, eventualmente, promovendo uma mudança nos hábitos de compra de suas famílias, auxiliando também na compreensão e análise de operações financeiras.

Desta forma, remetemo-nos ao princípio de que a educação escolar deve ser agente transformador do aluno, contextualizando o objeto de estudo com aplicações em situações reais significativas, visando contribuir para o exercício da cidadania, no sentido de que os indivíduos envolvidos possam gerir seus recursos de forma otimizada.

9.1 SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

O conhecimento matemático aliado ao conhecimento técnico é uma via para o desenvolvimento de atividades diferenciadas no ambiente escolar. Para trabalhos futuros, sugerimos o estudo da viabilização de projetos voltados para o desenvolvimento de *softwares* e aplicativos relacionados às temáticas abordadas em sala de aula, com o envolvimento discente.

Esta proposta emerge da necessidade de aliar teoria e prática, sendo um vasto campo de pesquisa no âmbito da docência em cursos técnicos, em particular aos da área de tecnologia da informação. Uma vez compreendidos os algoritmos e técnicas necessárias para a resolução de situações-problema, sejam elas reais ou heurísticas, é possível sua transcrição para a linguagem de programação. Assim, além de verificar a aprendizagem dos conceitos estudados, proporciona-se um cenário onde os alunos podem trabalhar coletivamente, em equipes, com o compartilhamento de informações.

Entretanto, para o desenvolvimento de aplicativos no contexto escolar não se necessita, necessariamente, de conhecimento técnico na área de tecnologia da informação. O MIT (*Massachusetts Institute of Technology*) desenvolveu uma ferramenta para a criação de aplicativos para o sistema operacional *Android*®, o *App Inventor*, no qual os comandos lógicos são alinhados no formato de blocos visuais livres, similares a peças de quebra-cabeça, os quais podem ser justapostos de forma a gerar funções para o aplicativo criado. Essa configuração permite e facilita a criação de aplicativos até mesmo para leigos em programação.

O sucesso de tal iniciativa é tão grande que a disseminação de informações a respeito do *App Inventor* se torna cada vez maior. Sua utilização não tem sido somente no sentido de desenvolvimento de aplicativos básicos de entretenimento, mas também para uso no contexto escolar, incluindo sua inserção no âmbito do ensino de matemática.

No endereço eletrônico http://appinventor.mit.edu é possível acessar o tutorial de utilização do *designer* de aplicativos, e também as iniciativas educacionais que vêm sendo idealizadas por professores de diversas disciplinas, tanto na educação básica quanto na educação superior.

No Brasil, a Faculdade de Informação e Administração Paulista (FIAP) disponibiliza um curso gratuito sobre a utilização do *App Inventor*. No endereço eletrônico http://www.fiap.com.br/fiapx/cursos é possível acessar o curso, composto por quatorze videoaulas, por meio dos quais é possível obter noções básicas sobre o desenvolvimento de aplicativos.

Uma vez que há experiências docentes positivas voltadas à utilização do *App Inventor* na elaboração de aplicativos para sala de aula, existe a possibilidade futura de se aproveitar essa ferramenta como objeto mobilizador nas aulas de matemática, com sua utilização no desenvolvimento de aplicativos com alunos do Ensino Médio do ensino regular.

Com esse envolvimento, no qual é dada ênfase à participação discente, bem como a oportunidade de divulgação das pesquisas realizadas, espera-se que a aprendizagem ocorra de maneira profícua e mais significativa.

REFERÊNCIAS

BRASIL. Ministério da Educação e Cultura. **Lei nº 9.394, de 20 de dezembro de 1996**. Estabelece as diretrizes e bases da educação nacional. Brasília: MEC, 1996. Disponível em:<http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/leis/l9394.htm>. Acesso em: 20 jul. 2013.

______. Ministério da Educação e Cultura. **Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais (Ensino Médio)**: Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. 2000. Disponível em:<http://portal.mec.gov.br/seb>. Acesso em: 10 ago. 2013.

______. Ministério da Educação e Cultura. **Parâmetros Curriculares Nacionais (Ensino Médio): Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias**. 2000. Disponível em:<http://portal.mec.gov.br/seb>. Acesso em: 10 ago. 2013.

______. Ministério da República. **Decreto nº 7.397, de 22 de dezembro de 2010**. Institui a Estratégia Nacional de Educação Financeira - ENEF, dispõe sobre a sua gestão e dá outras providências. Brasília: 2010. Disponível em: <http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/_Ato2007-2010/2010/Decreto/D7397.htm>. Acesso em: 20 jul. 2013.

BORBA, M de C.; PENTEADO, M.G. **Informática e Educação Matemática**. 3. ed. 1.reimp. Belo Horizonte: Autêntica, 2005. 100 p. (Coleção Tendências em Educação Matemática, 2)

CÓSER FILHO, M. S. **Aprendizagem de Matemática financeira no Ensino Médio**: uma proposta de trabalho a partir de planilhas eletrônicas. 2008. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) – Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2008.

COX, K. K. **Informática na educação escolar**. Campinas: Autores Associados, 2003. 124 p. (Coleção Polêmicas do nosso tempo, 87).

DARWIN, I. F. **Android Cookbook: Problemas e soluções para desenvolvedores Android**. Califórnia: O'Reilly, 2012. 672 p.

DECRETO nº 2723, de 12 de janeiro de 1861. Autorisa a creação de uma Caixa Economica e um Monte de Soccorro nesta Côrte, e approva os respectivos Regulamentos. Disponível em:<http://legis.senado.gov.br/legislacao>. Acesso em: 15 dez. 2013.

DEITEL, P. J. **Android: How To Program**. New Jersey: Pearson Education, 2013. 873 p.

FEIJÓ, A. B. **O ensino de matemática financeira na graduação com a utilização da planilha e da calculadora**: uma investigação comparativa. 2007. Dissertação (Mestrado em Educação e Ciências e Matemática) – Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2007.

FIEL, M. V. **Um olhar para o elo entre educação matemática e cidadania**: a matemática financeira sob a perspectiva da etnomatemática. 2005. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2005.

GIRALDO, V; CAETANO, P; MATTOS, F. **Recursos Computacionais no Ensino de Matemática**. Rio de Janeiro: SBM, 2012. 278 p. (Coleção PROFMAT, 06).

GRACIAS, T. S. O projeto de informática na educação – PIE**.** In: PENTEADO, M.G; BORBA, M. de C. (Orgs.). **A informática em ação**: formação de professores, pesquisa e extensão. São Paulo: Olho d'Água, 2000. 79 p.

HERMINIO, P. H. **Matemática Financeira – Um enfoque da resolução de problemas como metodologia de ensino e aprendizagem**. 2008. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2008.

GRAVINA, M. A.; BASSO, M. V. de A. Mídias digitais na Educação Matemática. In: GRAVINA, et al. (Orgs.) **Matemática, Mídias Digitais e Didática**: tripé para formação do professor de Matemática. Porto Alegre: Evangraf, 2012. 180 p.

IEZZI, G; HAZZAN, S; DEGENSZAJN, D.M. **Fundamentos de matemática elementar 11**: matemática comercial, matemática financeira, estatística descritiva. 10. reimp. São Paulo: Atual, 2004. 232 p.

LEME, N. D. **O ensino-aprendizagem de matemática financeira utilizando ferramentas computacionais**: uma abordagem construcionista. 2007. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de Paulo, São Paulo, 2007.

LIMA, E. L. **Matemática e ensino**. 3. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2007. 207 p. (Coleção do Professor de Matemática, 16).

______. et al. **A Matemática do Ensino Médio**. v. 2. 6. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006. 308 p. (Coleção do Professor de Matemática, 14).

MILAN, A. C. **O ensino da matemática financeira**: uma abordagem orientada à incorporação de recursos tecnológicos. 2003. Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade do Oeste Paulista, Presidente Prudente, 2003.

MORGADO, A. C.; WAGNER, E.; ZANI, S. **Progressões e matemática financeira**. 5. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2001.121 p. (Coleção do Professor de Matemática, 8).

NASCIMENTO, P. L. do. **A formação do aluno e a visão do professor do Ensino Médio em relação à matemática financeira**. 2004. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2004.

NOVAES, R. C. N. de. **Uma abordagem visual para o ensino de matemática financeira no Ensino Médio**. 2009. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) – Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2009.

PARANÁ**.** Secretaria de Estado de Educação. Departamento de Educação Básica. **Diretrizes Curriculares da Educação Básica - Matemática**. Curitiba: SEED, 2008. Disponível em: <http://www.educadores.diaadia.pr.gov.br/arquivos/File/diretrizes>. Acesso em: 20 jul. 2013.

PENTEADO, M. G. Possibilidades para a formação de professores de matemática. In: ______.; BORBA, M. de C. (Orgs.). **A informática em ação**: formação de professores, pesquisa e extensão. São Paulo: Olho d'Água, 2000. 79 p.

ROSETTI JÚNIOR, H. **Educação matemática e financeira**: um estudo de caso em Cursos Superiores de Tecnologia. 2010. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Matemática) – Universidade Cruzeiro do Sul, São Paulo, 2010.

SANTOS, A. T. C. dos S. **O ensino da função logarítmica por meio de uma sequência didática ao explorar suas representações com o uso do *software* GeoGebra.** 2011. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo,São Paulo, 2011.

SANTOS, R. P. dos. **Uma proposta de formação continuada sobre matemática financeira para professores de matemática do Ensino Médio**. 2011. Dissertação (Mestrado Profissional em Educação Matemática) – Universidade Severino Sombra, Vassouras, 2011.

SCHNEIDER, I. J. **Matemática financeira:** um conhecimento importante e necessário para a vida das pessoas. 2008. Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade de Passo Fundo, Passo Fundo, 2008.

SILVEIRA, W. T. N. da. **Criando ambientes matemáticos com planilhas eletrônicas**. 2007. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) – Centro Federal de Educação Tecnológica Celso Suckow da Fonseca, Rio de Janeiro, 2007.

SOUSA, L de. **Resolução de problemas e simulações:** investigando potencialidades e limites de uma proposta de educação financeira para alunos do Ensino Médio de uma escola da rede privada de Belo Horizonte (MG). 2012. Dissertação (Mestrado Profissional em Educação Matemática) – Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, 2012.

VIEIRA, L. C. **A matemática financeira no Ensino Médio e sua articulação com a cidadania**. 2010. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Severino Sombra, Vassouras, 2010.