

Josias Neubert Savóis

**MÉTODO PARA RESOLVER EQUAÇÕES
DIOFANTINAS COM COEFICIENTES NO
CONJUNTO DOS NÚMEROS RACIONAIS**

Rio Grande, Rio Grande do Sul, Brasil

Abril, 2014

Josias Neubert Savóis

MÉTODO PARA RESOLVER EQUAÇÕES DIOFANTINAS COM COEFICIENTES NO CONJUNTO DOS NÚMEROS RACIONAIS

Dissertação submetida por Josias Neubert Savóis como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática, pelo Curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT junto ao Instituto de Matemática, Estatística e Física da Universidade Federal do Rio Grande.

Universidade Federal do Rio Grande - FURG

Instituto de Matemática, Estatística e Física - IMEF

Curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT

Orientador: Dra. Daiane Silva de Freitas

Rio Grande, Rio Grande do Sul, Brasil

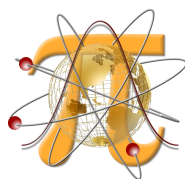
Abril, 2014

Colaboradores



UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE

<http://www.furg.br>



INSTITUTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E FÍSICA

<http://www.imef.furg.br>



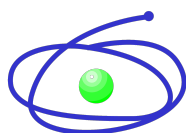
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

<http://www.profnat-sbm.org.br>



SOCIEDADE BRASILEIRA DE MATEMÁTICA

<http://www.sbm.org.br>



COORDENAÇÃO DE APERFEIÇOAMENTO DE PESSOAL DE NÍVEL SUPERIOR

<http://www.capes.gov.br>

S267m Savóis, Josias Neubert.
Método para resolver equações diofantinas com coeficientes no conjunto dos números racionais / Josias Neubert Savóis. – 2014.
95 f.

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Rio Grande – Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional.

Orientadora: Dr^a. Daiane Silva de Freitas.

1. Matemática. 2. Equações diofantinas. 3. Números racionais. 4. Problemas práticos. 5. Conteúdos relacionados. I. Freitas, Daiane Silva de. II. Título.

CDU 51

Josias Neubert Savóis

MÉTODO PARA RESOLVER EQUAÇÕES DIOFANTINAS COM COEFICIENTES NO CONJUNTO DOS NÚMEROS RACIONAIS

Dissertação submetida por Josias Neubert Savóis como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática, pelo Curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT junto ao Instituto de Matemática, Estatística e Física da Universidade Federal do Rio Grande.

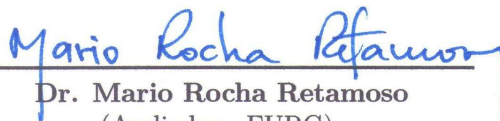
Trabalho aprovado. Rio Grande, 12 de Abril de 2014:



Dra. Daiane Silva de Freitas
(Orientadora - FURG)



Dra. Andrea Morgado
(Avaliador - UFPel)



Dr. Mario Rocha Retamoso
(Avaliador - FURG)

Rio Grande, Rio Grande do Sul, Brasil
Abril, 2014

Agradecimentos

Agradeço a todos que me ajudaram e possibilitaram a conclusão deste curso de mestrado em matemática.

Em especial agradeço à minha esposa Marília, pela compreensão, pelas palavras de apoio e pelo auxílio, principalmente na hora das dúvidas em língua portuguesa.

Agradeço também com carinho à minha professora e orientadora Daiane Freitas, pela sabedoria dos seus conselhos que me guiaram para a conclusão deste trabalho e pela dedicação e disposição em me orientar sempre que necessitei de seus esclarecimentos.

Gostaria de agradecer também, mas neste caso de modo mais informal, aos meus amigos e colegas de curso Thiago e Ezequiel, pela parceria, persistência, horas de estudos e de viagem juntos. Considero este agradecimento informal por causa da afinidade que construímos durante estes dois anos de curso, pois passamos mais tempo viajando juntos do que estudando no curso, e sem eles a missão de completar estes estudos seria praticamente impossível de ser realizada.

Tenho também, uma dívida eterna de gratidão com todos os professores de matemática que tive desde o ensino fundamental até hoje. Não citarei nomes para não cometer a injustiça de deixar algum de fora, mas é claro que mesmo neste grupo tenho os meus favoritos. Me lembro de todos os professores que tive desde que entrei na escola na 1ª série do ensino fundamental e respeito todos, mas me apaixonei por esta área, sou esta pessoa que gosta de estudar, e vejo o mundo da maneira que vejo hoje, graças aos professores de matemática que tive e acho que muitos eu nunca esquecerei.

Por último agradeço ao meu colega e também professor de matemática, Jaison,

pois foi com ele que o sonho de fazer um mestrado em matemática começou. Iniciei este curso por iniciativa dele, um curso que eu nem almejava alcançar na época, e talvez eu não estivesse aqui concluindo este trabalho se não fosse o empurrão inicial. A inércia é difícil de ser superada.

A todas estas pessoas citadas, de maneira racional, mas sem esconder a emoção do momento, obrigado, sinceramente, muito obrigado.

E agradeço de modo ímpar à instituição Capes pelo incentivo financeiro através da concessão de bolsa de estudos, que auxiliaram todo o processo dos estudos, principalmente nas despesas de viagem. Obrigado.

O que sabemos é uma gota, o que ignoramos é um oceano.

Isaac Newton

Resumo

Desenvolver um conhecimento sólido sobre as equações diofantinas lineares em duas variáveis possibilita a resolução de muitos problemas do cotidiano e, também, o real entendimento de alguns conceitos matemáticos ensinados na escola, mas que parecem sem utilidade e sem aplicação prática. Além disso, as relações que estas equações estabelecem com outros conteúdos que já estão inseridos na educação básica justificam o seu ensino e a tornam uma importante ferramenta de contextualização e interdisciplinaridade. Neste trabalho também mostraremos, a importância do ensino dos números racionais e neste contexto fazer uma análise sobre um novo conceito de máximo divisor comum, chamado máximo divisor comum generalizado, com isto poderemos usar os racionais como conjunto numérico dos coeficientes das equações diofantinas, expandindo a abrangência de problemas solucionados por estas equações. A criação de vários problemas práticos de aplicação da teoria estudada serve para nos convenceremos da importância deste trabalho e para incentivar a sua aplicação e a criação de novos problemas levando em consideração a realidade de cada escola e de seus alunos.

Palavras-chaves: Equações diofantinas - números racionais - problemas práticos - conteúdos relacionados.

Abstract

Develop a solid understanding of linear Diophantine equations in two variables facilitates the resolution of many problems of daily life and also the real understanding of some mathematical concepts taught in school but they seem useless and without practical application. Moreover, the relationships that these equations are established with other content that are already inserted into the basic education justify their education and become an important tool for contextualizing and interdisciplinarity. This work also aims to show the importance of teaching of rational numbers and in this context do analysis on a new concept of greatest common divisor, called generalized maximum common divisor, and thus we can use the numberpad as rational coefficients of Diophantine equations, expanding the breadth of problems solved by these equations. The creation of various practical problems of implementation of the theory studied serves to convince us of the importance of this work and to encourage their implementation and creating new problems taking into account the reality of each school and its students..

Diophantine Equations - rational numbers - practical problems - related contents.

Lista de ilustrações

Figura 1 – Multiplicação de Frações	32
Figura 2 – Divisão de Frações	33
Figura 3 – Solução da equação diofantina $3x + 2y = 7$	83
Figura 4 – Gráfico da função afim $3x + 2y = 7$	83
Figura 5 – Gráficos das equações cartesianas $5x - 4y = c$, com $c = 3, 7, 15$ respec- tivamente	85
Figura 6 – Gráfico de $0,25X + 0,10Y = 25$ com escala de 1:5 entre os eixos x e y	86
Figura 7 – Construção do gráfico usando o comando Lista = Sequência [(i, f(i)), i, K, L,P]	87
Figura 8 – Gráfico da P.A $a_n = 1 + 3n$ e solução da equação $-3x + y = 1$	90
Figura 9 – Gráfico da P.A (9,15,21,...) e solução da equação $-6x + y = 3$ com escala entre os eixos de 1:5	91
Figura 10 – Gráfico da P.A (8, 4, 0, -4,...) e solução da equação $4x + y = 12$ com escala entre os eixos de 1:5	92

Sumário

Introdução	12
Justificativa e Objetivos	17
1 Um pouco de história da matemática grega	23
2 Divisibilidade e Máximo Divisor Comum (MDC)	26
2.1 Definições e resultados	26
3 Números Racionais	30
3.1 Ensino dos Números Racionais	30
4 Conceito de MDC generalizado	35
4.1 Definições e resultados	35
5 Equações diofantinas	41
5.1 Equações diofantinas lineares em duas variáveis	42
5.2 Problemas práticos envolvendo Equações diofantinas em duas variáveis	46
5.3 Resolução de equações do tipo diofantinas com coeficientes racionais	52
6 Relação entre equações diofantinas e conteúdos da educação básica	81
6.1 Relação entre equações diofantinas e função afim	81
6.2 Relação entre equações diofantinas e progressão aritmética (P.A.)	88
Considerações Finais	93

Introdução

Ao longo dos anos de estudos da modalidade educação básica, desde as séries iniciais até o 3º ano do ensino médio, os alunos são preparados através do contato com várias áreas de conhecimento, para que possam entender o mundo e as relações sociais de uma sociedade e também, para poder prosseguir seus estudos com êxito na área em que apresentem maior afinidade e automaticamente maior rendimento. Isto serve para que posteriormente possam desenvolver um trabalho de qualidade junto à sociedade tendo a possibilidade de escolher um emprego de melhor retorno financeiro e melhor qualidade de vida. Uma dessas principais áreas com certeza é a matemática, pois sem os conhecimentos desta ciência, principalmente aritméticos e geométricos, é praticamente impossível viver tranquilamente na nossa sociedade atual. Desse modo, podemos dizer que a matemática contribui significativamente para a evolução da sociedade de maneira geral.

A matemática é uma ciência desenvolvida e aprimorada ao longo dos tempos. Todo este desenvolvimento possibilitou a sua ramificação em várias áreas de estudo, como aritmética, teoria dos números, geometria, álgebra entre outras. Existem tantos conhecimentos matemáticos hoje, que é impossível estudar e ensinar de forma completa a matemática. Os conhecimentos de matemática ensinados na educação básica são selecionados de maneira a proporcionar uma abrangência quase total dos problemas do cotidiano que possam ser resolvidos através dos conteúdos de matemática inseridos na grade curricular de toda a educação básica. Porém, devido a grande variabilidade de conteúdos e conceitos matemáticos, alguns conteúdos acabam ficando de lado, não sendo incluídos na base da educação matemática embora suas aplicações em problemas práticos sejam notáveis e de fácil compreensão.

Um exemplo disso é a equação diofantina linear em duas variáveis, um tipo de equação que, além de apresentar conceitos especiais na sua resolução, como por exemplo a visão de solução geral da equação que é determinada através da inserção de um

parâmetro (conceito este usado no estudo das equações paramétricas, em geometria analítica), ajudam a resolver vários problemas curiosos e interessantes e também desenvolver o raciocínio dos alunos através da união da resolução de cálculos com a interpretação de problemas. É este tipo de equação que será o foco do desenvolvimento deste trabalho. Para que seja possível ensinar estas equações, outros conceitos devem ser abordados como pré-requisitos, como por exemplo a divisão euclidiana, o algoritmo de Euclides e o máximo divisor comum (*mdc*) entre dois ou mais números inteiros¹.

Fato curioso sobre as equações diofantinas lineares em duas variáveis, as quais podem ser escritas da forma $ax + by = c$, é o de que os coeficientes desta equação devem pertencer ao conjunto dos números inteiros (\mathbb{Z}), ou seja, $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Este fato, que parece ser um detalhe insignificante frente aos conceitos e aplicações das equações diofantinas², é que motivou o desenvolvimento deste trabalho. É muito difícil olhar para estas equações e em algum momento não pensar "será que se os coeficientes pertencessem a outro conjunto numérico teríamos condições de encontrar sua solução geral?" ou mesmo é difícil analisar um problema aplicado resolvido através das equações diofantinas e não passar na mente o devaneio de tentar criar um problema envolvendo dinheiro e decimais de igual resolução através dos mesmos conceitos e do mesmo formato de equação.

Seguindo esta linha de raciocínio, vamos analisar a seguinte situação: ao se estudar em teoria dos números as noções de divisibilidade, de máximo divisor comum (*mdc*) e de congruências módulo m , aprendemos que o *mdc* é calculado utilizando o conjunto dos números inteiros e na maioria (se não todos) dos livros didáticos do 6º ano o *mdc* é apresentado aos alunos como sendo de utilização exclusiva no conjunto dos números naturais (\mathbb{N}). Podemos considerar este fato ou como uma pequena falha no sistema de ensino de matemática ou como sendo uma situação corriqueira que acontece em muitos ramos da matemática da educação básica, em que os conteúdos são simplificados ou excluídos por vários fatores, entre eles a falta de tempo para uma listagem de conteúdos extensa. Isto ocorre pelo fato do *mdc* e o do conjunto dos inteiros \mathbb{Z} serem ensinados no

¹ Em várias passagens do texto será utilizado a sigla *mdc* sempre com o significado de máximo divisor comum.

² Ao longo deste trabalho, quando falarmos em equação diofantina, estamos nos referindo às equações diofantinas lineares em duas variáveis.

6º e 7º anos, respectivamente, o que dificulta o ensino do *mdc* no conjunto dos números inteiros na educação básica, já que geralmente não é retomado o conceito de *mdc* no 7º ano, por se tratar de um assunto da série anterior e porque poderá atrasar o andamento dos conteúdos do ano letivo do 7º ano.

Mas o que podemos aproveitar desta situação é o seu aspecto comum quando se fala em conteúdos de matemática. Muitos conteúdos são trabalhados com base na visão de um autor, ou com base no rendimento da turma e seu nível de amadurecimento para interpretar os estudos como algo necessário e que exige dedicação. E, é claro, que cada autor tem uma temática diferente e cada turma tem um ritmo diferente também. Então, é neste sentido que o nosso trabalho ganha força, pois mesmo que as equações diofantinas não estejam definidas como conteúdo da educação básica, segundo a pesquisa feita por (??), é possível improvisar e inserir este conteúdo no contexto escolar, de preferência relacionando-o com outros conteúdos já trabalhados normalmente, pois como vimos o fato que ocorre com o *mdc* dos inteiros/naturais, os conteúdos de matemática têm uma flexibilidade que permite adaptar o ensino de acordo com a necessidade e realidade de cada turma, escola ou região.

Além do estudo das equações diofantinas e suas aplicações, teremos uma pequena seção que irá tratar dos números racionais e sua importância na evolução do entendimento dos alunos, visto que a maioria dos problemas ensinados no fundamental e médio, e também problemas do cotidiano, trabalham com sua resolução no conjunto dos números racionais. Algumas abordagens que consideramos obrigatórias no ensino das frações, a principal delas sendo a representação geométrica das operações com frações, são mostradas através de exemplos práticos que devem servir de incentivo para os professores aprimorarem suas abordagens sobre este conteúdo riquíssimo e com uma variedade de utilização impressionante. Mas, engana-se quem pensa que números racionais aparecem neste trabalho de maneira despreziosa e fora de contexto. Mais adiante será estabelecido uma relação interessante e inovadora entre números racionais e equações diofantinas, possibilitando a resolução de uma infinidade de problemas didáticos e do cotidiano.

Esta proposta de trabalho que tem como público alvo os professores de matemá-

tica da educação básica, pretende explicar os conceitos envolvidos no estudo das equações diofantinas, desde as noções de divisibilidade e *mdc* até as relações destas equações com conteúdos que já estão inseridos na grade curricular de várias etapas da educação básica. E, para ensinar estas relações entre conteúdos de matemática, é necessário que o professor esteja bem preparado e tenha um conhecimento amplo dos vários campos da matemática, para desenvolver um bom trabalho diante de qualquer turma do ensino fundamental e, principalmente, do ensino médio, visto que os alunos do ensino médio apresentam maior discernimento para o debate sobre as aplicações dos conteúdos estudados e, muitos, já estão se preparando para cursar o ensino superior ou atuar em uma área de trabalho em que se tenha necessidade de alguns conhecimentos além dos estipulados como meta para cada ano letivo.

Assim, uma das metas deste trabalho é encarar o desafio de ajudar o professor a se preparar para desenvolver um trabalho melhor, e isto será feito ao longo do texto com uma fundamentação teórica consistente, mas ao mesmo tempo explicada de maneira simples e informal, sem "burocracia" e sem um rigor matemático exagerado, e também através dos exemplos de exercícios que podem ser ensinados na turma em que for aplicada a proposta de trabalho. Os exemplos propostos apresentam aumento gradativo no grau de dificuldade em sua resolução e foram criados com o principal interesse de mostrar problemas reais do cotidiano que podem ser resolvidos através das equações diofantinas. Existem problemas sobre diversas áreas de trabalho como biologia, engenharia civil, agropecuária e industrial, mas devemos lembrar que cada professor deve adaptar os exercícios de acordo com a realidade de sua região e de seu público-alvo, seus interesses e necessidades de estudo e outros fatores que influenciam no resultado final do ensino.

Não nos preocupamos com os valores elevados que surgem na resolução de alguns problemas, mas sim com o fato de tornar o problema o mais próximo da realidade possível. Às vezes muitos professores criam ou selecionam exercícios dos livros ³ pensando em facilitar os cálculos para os seus alunos, mas acabam se esquecendo que no cotidiano o aluno não vai poder escolher só problemas com números pequenos para resolver, mas vai

³ Para esta afirmação nos baseamos na análise das coleções de livros (??) de 6º ao 9º ano que geralmente apresentam uma série de exercícios resolvidos mecanicamente com valores pequenos e deixam para mostrar valores mais ligados à realidade em alguns poucos problemas do final da seção ou do capítulo.

ter que calcular o problema que vier pela frente independente do tamanho e da natureza do cálculo.

Um dos temas que consideramos mais interessante e que pode ser também o mais marcante, está inserido na parte do trabalho que se destina a mostrar uma variação do formato das equações diofantinas, estendendo os conceitos até então adotados somente no conjunto dos números inteiros aos números racionais (\mathbb{Q}), e reais comensuráveis, tais como o conceito de máximo divisor comum que nos racionais chamaremos de máximo divisor comum generalizado (*mdcg*) e os coeficientes de uma equação do tipo diofantina ⁴ que poderão pertencer ao conjunto dos números racionais (\mathbb{Q}). Intrigante e ao mesmo tempo extraordinário, o conceito de *mdcg*, que foi retirado de um artigo publicado em 2006 (??) na revista Matemática Universitária e escrito pelos professores Alveri Sant'anna, Cydara Ripoll e Jaime Ripoll, conceituados professores da Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS), tem a função de mostrar pra quem gosta de matemática e de ensinar matemática, que a matemática não está pronta e que sempre tem campos que podemos desenvolver mais e, deste modo, nos maravilhamos com as descobertas e novas possibilidades de trabalho que outrora eram invisíveis e que como um passe de mágica se tornam claras como água.

Ao longo do texto, e principalmente na última seção, fica claro uma das intenções da proposta de desenvolvimento das equações diofantinas no contexto escolar, que é a de relacionar este conteúdo com outros já estabelecidos como meta de trabalho, como por exemplo as equações afins que auxiliam o entendimento destas equações pela sua semelhança na hora da representação gráfica e que servem de intermediárias para mostrar a estreita relação entre as equações diofantinas e as progressões aritméticas. Um dos exemplos estabelece a relação entre estas equações e as equações cartesianas de uma função afim, que são estudadas em geometria analítica e permitem a construção de várias retas paralelas que devem obedecer ao teorema de Bézout para terem solução quando forem trabalhadas como diofantinas.

⁴ Sempre que utilizarmos esta nomenclatura significa que estamos nos referindo a equações com coeficientes racionais mas que podem ser resolvidas com os mesmos métodos de resolução de uma equação diofantina.

Justificativa e Objetivos

Nos tempos atuais, dois temas que são frequentemente foco de debate nos meios educacionais são a interdisciplinaridade e a contextualização dos conteúdos trabalhados em sala de aula. Uma das disciplinas que apresenta a dualidade de ter ao mesmo tempo as características de resistência ao trabalho interdisciplinar e contextualização de conteúdos em, praticamente, todas as disciplinas pertencentes à grade escolar, é a matemática. Às vezes, a matemática e os professores de matemática apresentam uma barreira quase intransponível em relação às outras disciplinas da educação básica ⁵, e isto se reflete na visão que os alunos acabam construindo sobre matemática, considerando a matemática uma disciplina ímpar, diferente das outras devido à dificuldade de entendimento e nível de exigência elevado se comparado às demais disciplinas. Mas, esta visão pejorativa que, em alguns momentos, é tomada sobre a matemática pode ser melhorada e até mesmo excluída. Para isto, sempre que possível, devemos mostrar a contextualização do conteúdo ensinado e além de mostrar a matemática que existe no cotidiano e que pode ser estudada em sala de aula, devemos mostrar os problemas de outras disciplinas que necessitam de um conhecimento matemático para a sua resolução.

Adotando estas relações de interdisciplinaridade e contextualização como meta, podemos usar o ensino das equações diofantinas lineares em duas variáveis como uma ferramenta potente para atingir este objetivo, visto a quantidade de problemas do cotidiano que estas equações podem ajudar a solucionar, problemas estes que têm origem em diversas áreas do conhecimento, principalmente nas ciências da natureza. Outro fator que justifica a abordagem deste tipo de equações na educação básica é a relação que as mesmas têm com outros conteúdos de matemática que já são ensinados normalmente, como por exemplo múltiplos e divisores, sistemas de equações com duas variáveis, função polinomial do primeiro grau, progressão aritmética (P.A.), geometria analítica e até com-

⁵ Sempre que nos referirmos à educação básica, deve-se considerar somente as séries finais do ensino fundamental e o ensino médio

binações lineares ensinadas através de matrizes. Neste sentido, estas equações cumprem completamente o que propõe as Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN+)(??), pg 117, no que diz respeito ao desenvolvimento da competência de estabelecer relações entre conhecimentos disciplinares, interdisciplinares e interáreas.

Vários fatores podem ser destacados para justificar o ensino das equações diofantinas na educação básica, mas citaremos dois que consideramos pertinentes neste momento: primeiro, estas equações têm o potencial de permitir o real entendimento da divisão com resto, que também pode em algum momento ser bem explorada se tivermos a oportunidade de trabalhar mudança de base numérica com os alunos, mesmo que seja abordada somente como curiosidade, e o segundo fator de destaque é a aplicabilidade que estas equações fornecem ao ensino do máximo divisor comum, ou seja, pode ser através das equações diofantinas que o sentido do *mdc* de dois números inteiros aflore frente ao alunos, possibilitando a utilização de um conceito que, muitas vezes, é apresentado sem função prática e, assim, acaba ficando de lado e parecendo insignificante. Desse modo, acreditamos que o ensino destas equações podem abrir caminho para o ensino mais aprofundado do *mdc* e de suas propriedades.

Somente a quantidade de problemas matemáticos práticos do dia a dia ou de situações-problema, já seria um motivo suficiente para se desenvolver um trabalho sobre estas equações. Analisando um exame de acesso da Fundação Liberato Salzano, uma conceituada escola técnica de Novo Hamburgo-RS, exame este aplicado a alunos de 9º ano que têm interesse em fazer um curso de ensino médio técnico, encontramos um problema que em resumo pedia para calcular qual o número de carrinhos e de motos de brinquedo de uma criança conhecendo-se o número total de rodinhas e de brinquedos. O problema podia ser resolvido através de um sistema de equações lineares com duas variáveis, que é um conteúdo geralmente trabalhado entre 7º e 8º ano. Mas, o problema levantou uma série de questionamentos pertinentes a sua forma de resolução.

O problema em questão também poderia ser resolvido através de uma equação diofantina, desconsiderando uma das informações ou usando esta informação para restringir

as possibilidades de solução. Comparando as duas resoluções deste problema específico, concluímos que o sistema com duas equações fornece a resposta exata de maneira mais direta e com cálculos mais simples, já a resolução através do uso de uma equação diofantina linear em duas variáveis chega na solução desejada neste caso após testar duas possibilidades de solução geral e usando uma das informações adicionais para delimitar o campo das soluções, mas em contrapartida, permite encontrar todas as possibilidades de solução no conjunto dos inteiros, fato este que serve para mostrar aos alunos que existem métodos matemáticos eficazes para serem aplicados na resolução de problemas em vez de calcular a resposta através de tentativas sucessivas, embora a maioria dos alunos tenham a impressão de que alguns problemas só podem ser solucionados por tentativa.

Outras perguntas surgiram em torno do problema citado. Por exemplo, como resolveríamos o problema se não tivéssemos a informação do número total de brinquedos? Como resolver problemas semelhantes, mas com um enunciado sem tantas informações? Em que momento seria interessante descobrir mais de uma solução ou todas as soluções para o problema? As respostas para estas perguntas passam pelo conhecimento e utilização das equações diofantinas, motivando um trabalho sobre este tipo de equações e fazendo as relações entre conteúdos possíveis e necessários para interligar os vários campos de conhecimento da matemática. Nestas relações entre conteúdos de matemática, fato importante pois só relacionando a matemática entre si é que poderemos, realmente, realizar a interdisciplinaridade desta com as demais disciplinas do ambiente escolar. Não pretendemos desenvolver uma visão utópica de exaltação das equações diofantinas frente aos outros conteúdos que podem ser relacionados com as equações, mas devemos aceitar a limitação de cada conteúdo, como por exemplo a resolução de sistemas de equações que como o próprio nome diz, necessita de duas ou mais equações para a sua utilização e caso tenhamos somente uma equação a abordagem poderá ser feita através de uma equação diofantina.

Um dos principais objetivos deste trabalho é mostrar a importância do ensino das equações diofantinas lineares em duas variáveis na educação básica, principalmente, quando este pode ser relacionado com outros assuntos já inseridos na grade curricular. Ao longo do texto, estamos falando de ensinar estas equações na educação básica por

considerarmos que é desnecessário delimitar uma série para que o mesmo seja trabalhado, já que deste modo estaríamos restringindo uma coisa que já está restrita ⁶. Como os conteúdos que são pré-requisito para o ensino destas equações são, geralmente, ensinados no 6º ano do ensino fundamental, pode-se então, a partir daí trabalhar tranquilamente este conteúdo mas, claro que com enfoque diferente para cada turma, fazendo uma diferenciação de abordagem principalmente entre o ensino fundamental e o ensino médio, onde neste último as equações podem ser exploradas com maior intensidade.

Problemas envolvendo o máximo divisor comum podem ser ensinados sem dificuldades a partir do 6º ano do ensino fundamental. Um exemplo muito utilizado é: calcular o menor número de grupos de alunos que se pode formar, com todos os grupos contendo a mesma quantidade de alunos, em uma turma de 28 e outra de 35 alunos sem sobrar nem faltar alunos. Neste exemplo, com a ajuda do conhecimento sobre máximo divisor comum (mdc) temos que os grupos devem conter um número máximo de alunos, e como $mdc(28, 35) = 7$ então devemos ter 7 alunos por grupo, formando 4 grupos em uma turma e 5 em outra, totalizando 9 grupos de 7 alunos. Com problemas deste tipo o estudo do mdc (e também do mmc - mínimo múltiplo comum) ganha sentido e aplicabilidade em diversos problemas do cotidiano.

Motivar os alunos a criar e resolver problemas em que as noções de divisores e de múltiplos são utilizadas possibilitam um desenvolvimento lógico necessário para o entendimento dos conceitos matemáticos que serão abordados em séries posteriores. Mas, o problema é que no dia a dia convivemos com inúmeras situações de comparação de valores, noção de múltiplos e de divisores, só que geralmente nestas situações aparecem valores fracionários, seja em sua representação decimal ou seja na forma de fração. Um exemplo disso pode ser dado com o seguinte problema: em uma construção, uma das salas construídas mede 3,2 metros de comprimento por 4 metros de largura. Qual o número mínimo de lajotas quadradas que devem ser utilizadas para revestir completamente o piso desta sala?

Para a resolução deste problema o conceito de máximo divisor comum se faz ne-

⁶ Restrita no sentido do assunto geralmente não ser ensinado em nenhuma série, e a intenção é que ao menos seja mostrado como curiosidade, como assunto extra, independente da série e do nível de aprofundamento.

cessário, mas um dos valores utilizados é um número decimal. Usando uma conversão de metros em centímetros ou através do raciocínio lógico podemos concluir facilmente que a maior lajota utilizada deve ter lado medindo 0,8 metros, perfazendo um total de 20 lajotas. Mas este problema poderia ser resolvido de maneira sistemática, utilizando um novo conceito de *mdc*. É para resolver estes tipos de problemas que mostraremos como calcular o *mdc* de números racionais e como este conceito pode ampliar o conjunto de problemas resolvidos através das equações diofantinas. Desse modo, também cumprimos a proposta de conceder o devido valor ao conjunto dos números racionais, que aparecem frequentemente no nosso dia a dia.

A motivação para relacionar números racionais com equações diofantinas surgiram devido ao fato de que o conjunto dos números inteiros não consegue cobrir as necessidades dos problemas que surgem diariamente, principalmente quando lidamos com dinheiro, pois o uso de duas casas decimais em compra, venda e transações financeiras é frequente e necessário. Então, a resolução destas equações com coeficientes racionais solucionam muitos problemas, mas para isso tínhamos sempre que achar uma equação equivalente à original, mas com coeficientes inteiros. Mas se é possível, por que não resolver a equação no seu formato original? Esta pergunta pode ser considerada uma das nossas justificativas, mas também um dos nossos objetivos da apresentação desta proposta.

Mostrar um conjunto maior de possibilidades de equações diofantinas é um objetivo que a princípio parece incoerente, pois toda a teoria dos números é baseada no aprimoramento do conhecimento sobre os números inteiros, mas que tomando as definições certas para lhe dar sustentação e credibilidade acabam convencendo até mesmo os mais céticos. Abordar estas equações possibilitando o mesmo método de resolução quando os seus coeficientes pertencem aos racionais \mathbb{Q} é um avanço considerável, pois sabemos a utilidade que o conjunto \mathbb{Q} tem no cotidiano das pessoas.

Como explicamos antes, não queremos restringir o alvo de aplicação destes conhecimentos matemáticos. Mas, como uma simples sugestão, podemos dizer que achamos interessante ensinar as equações diofantinas nas turmas de 9º ano do ensino fundamental, e ensinar este tipo de equações explorando os coeficientes racionais nas turmas de 1º ano

do ensino médio, pois neste caso a complexidade é um pouco maior.

1 Um pouco de história da matemática grega

Ao longo dos séculos, a matemática vem se desenvolvendo em um ritmo cada vez mais acelerado. Neste contexto evolutivo do conhecimento matemático adquirido, desenvolvido e aprimorado, alguns matemáticos se sobressaíram em relação aos demais devido ao pioneirismo de seus trabalhos e importância dos mesmos para a evolução da sociedade em geral. Em todo o mundo, várias civilizações se empenharam em busca do domínio de conhecimentos matemáticos que pudessem facilitar as relações entre pessoas e a vida de toda a comunidade. Uma das principais civilizações que contribuíram para a evolução do conhecimento matemático foram os gregos, segundo (??), pois estes conseguiram escrever textos completos sobre os conhecimentos da época, organizaram o pensamento de maneira a sistematizar e solucionar problemas semelhantes, e embora se tenha conhecimento hoje de que muitas das teorias desenvolvidas pelos gregos já eram conhecidas por outras civilizações, com egípcios e babilônios, os gregos foram os primeiros a escrever de maneira completa sobre determinado assunto, utilizando o raciocínio dedutivo e afirmações pré-determinadas para demonstrar novos teoremas e novos métodos de resolução de problemas. Com base nisso, podemos citar alguns matemáticos gregos de grande importância e que tem relação direta com o assunto que será desenvolvido neste trabalho.

O primeiro matemático do qual o seu trabalho é nosso interesse de estudo é Pitágoras de Samos, que teria vivido por volta de 570 a 497 a.C. e que teria fundado a escola pitagórica em Crotona, onde seus discípulos contribuíam com descobertas e as creditavam ao seu mestre. Além do famoso teorema que leva o seu nome, atribuem aos pitagóricos o início do desenvolvimento da aritmética ou teoria dos números, com descobertas interessantes sobre os números, como a descoberta dos números amigáveis, números perfeitos e números deficientes e abundantes. Portanto, pode-se afirmar que a noção de divisores era bem difundida entre os pitagóricos. Outro ponto importante do trabalho dos pitagóricos é o conhecimento das razões e proporções e o uso dos números racionais, expresso da forma $\frac{p}{q}$, onde p e q eram inteiros e $q \neq 0$. Uma das aplicações dos números racionais usadas

pelos pitagóricos foi no estudo de escalas musicais, considerado o primeiro trabalho de física-matemática que se tem registro, onde as frações eram usadas para representar a razão entre dois segmentos de uma mesma corda do instrumento musical.

Outro matemático grego de destaque, senão o maior deles, é Euclides de Alexandria. Acredita-se que Euclides tenha sido professor na escola de matemática de Alexandria e que viveu por volta de 330-270 a.C., tendo publicado sua grande obra por volta de 300 a.C. *Os Elementos* é considerado a maior e mais importante obra de matemática de todos os tempos, tendo atingido mais de mil edições impressas desde sua aparição em 1482. Este livro contém, em sua maior parte, trabalhos sobre geometria, com proposições e teoremas apresentados de maneira organizada e com demonstrações que são utilizadas ainda hoje em aulas de geometria. Mas, alguns livros de *Os Elementos* tratam da aritmética ou teoria dos números, trazendo um avanço considerável para esta área. Alguns exemplos que podemos citar de grande importância nestas áreas são: o algoritmo de Euclides, que é usado para encontrar o máximo divisor comum entre dois ou mais números e que serve para verificar se dois inteiros são primos entre si; o teorema fundamental da aritmética que afirma que todo natural maior que 1 é primo ou pode ser escrito de forma única como o produto de dois ou mais primos; demonstração por redução ao absurdo (a primeira demonstração deste tipo que se tem notícia); da existência de uma quantidade infinita de números primos; a notável fórmula para encontrar um número perfeito, que foi aprimorada posteriormente pelo grande matemático suíço Leonhard Euler; demonstrações sobre os números irracionais e aprofundamento das medidas incomensuráveis.

Por último, mas não menos importante, devemos citar o matemático grego Diofanto. Pouco se sabe da vida e obra de Diofanto. Alguns historiadores acreditam que Diofanto nasceu por volta do ano 250 a.C, outros acreditam que Diofanto é contemporâneo de Pappus de Alexandria que viveu no final do século III da nossa era. O que se sabe ao certo é que ele foi um matemático de trabalhos extremamente originais para sua época. Consta que na lápide de seu túmulo tinha a seguinte inscrição:

“Caminhante! Aqui jazem os restos de Diofanto. Os números podem mostrar, oh maravilha, a duração da sua vida, cuja sexta parte constou da encantadora infância. Tinha passado mais uma duodécima parte da sua vida quando lhe apareceu a barba. A partir daí, a sétima parte da sua existência passou-a num matrimônio sem filhos. Passou um

quinquênio mais quando o fez feliz o nascimento do seu primogênito. Este entregou o seu corpo e a sua encantadora existência à terra, tendo vivido metade do que seu pai viveu. Quanto a Diofanto desceu à sepultura com profunda mágoa, tendo sobrevivido apenas mais quatro anos após a morte de seu filho. Diz-me, caminhante, quantos anos viveu Diofanto até que a morte lhe chegou.” Segundo esse enigma, considerando os anos vividos por Diofanto como d , temos:

$$\frac{d}{6} + \frac{d}{12} + \frac{d}{7} + 5 + \frac{d}{2} + 4 = d.$$

Resolvendo a equação acima, conclui-se que Diofanto viveu 84 anos. Este fascinante problema serve de inspiração para se pensar no uso e na importância das equações do primeiro grau com coeficientes fracionários.

A principal obra de Diofanto, chamada *Arithmetica*, consta ter sido escrita em 13 livros, dos quais apenas os seis primeiros chegaram até nós. Alguns consideram Diofanto o pai da Álgebra, uma vez que ele introduziu em seu trabalho a ideia de equação algébrica expressa por símbolos. Na solução de equações, Diofanto manipulava um único símbolo para representar as incógnitas e chegava às respostas, comumente, pelo método da tentativa, que consiste em assumir para alguma das incógnitas um valor preliminar que satisfaça algumas condições. Estes valores preliminares conduziam a expressões erradas, mas que geralmente sugeriam alguma estratégia pelo qual valores podiam ser obtidos de forma a atender todas as condições do problema. Diofanto aceitava valores racionais como solução das equações. Na coleção de 130 problemas que compõem sua obra, fica claro que o tratamento dado por Diofanto não é o da axiomatização e, raramente, ele apresenta generalizações. Não há uma distinção clara no tratado de Diofanto entre equações determinadas e indeterminadas e, quando ele se ocupava desse segundo grupo, geralmente contentava-se em encontrar uma solução, e não todo o conjunto de soluções. A álgebra trabalhada por Diofanto é chamada de álgebra sincopada, que é um meio termo entre a álgebra retórica (que era trabalhada pelos gregos da sua época e seus antecessores) e a álgebra simbólica ou álgebra moderna, ou seja, muito da importância da obra de Diofanto se deve ao pioneirismo na maneira de escrita.

2 Divisibilidade e Máximo Divisor Comum (MDC)

2.1 Definições e resultados

A fim de prosseguir com os estudos e abordar um método para que seja possível resolver as equações diofantinas, que será abordado mais à frente, é necessário fazer uso de alguns conceitos básicos sobre divisibilidade, algoritmo de Euclides e máximo divisor comum, conceitos estes que, com certeza, já são trabalhados nas séries finais do ensino fundamental, talvez não com o rigor, aprofundamento e abrangência que possibilite o desenvolvimento direto deste trabalho em uma turma de 1º do ensino médio, mas que, com uma revisão e uma nova abordagem dos conceitos envolvidos, poderá facilitar o entendimento da proposta em questão sem maiores dificuldades.

Por isso, será feita uma abordagem simples e da maneira mais direta possível, somente das definições que realmente servirão de fundamento para a abordagem da proposta em questão, para mais detalhes veja (??).

Definição 2.1.1. Dados $a, b \in \mathbb{Z}$, com $b \neq 0$, dizemos que b divide a , ou que b é um divisor de a , ou ainda que a é múltiplo de b , e escrevemos $b|a$, se existir $q \in \mathbb{Z}$ tal que $a = bq$. Caso b não divida a , escrevemos $b \nmid a$.

Fica explícito pela definição acima que $1|a$, $b|b$ e $b|0$. Algumas propriedades da relação de divisibilidade estão definidas na proposição a seguir.

Proposição 2.1.1. Sejam $a, b, c \in \mathbb{Z}^*$ e x, y inteiros quaisquer. Tem-se que:

- (a) Se $b|a$ e $a|b$, então $a = \pm b$.
- (b) Se $c|b$ e $b|a$, então $c|a$.
- (c) Se $c|a$ e $c|b$, então $c|(ax + by)$.

- (d) Se $b|a$, então $|b| \leq |a|$.
 (e) Se $c|b$, então $c|ab$.
 (f) Se $b|a$, então $bc|ac$.

Demonstração:

- (a) Se a' e b' são inteiros tais que $a = ba'$ e $b = ab'$, então $a = ba' = (ab')a' = a(a'b')$ e daí, $a'b' = 1$. Logo, $a' = \pm 1$, donde segue que $a = \pm b$.
 (b) Se $a = ba'$ e $b = cb'$, com $a', b' \in \mathbb{Z}$, então $a = ba' = (cb')a' = c(a'b')$, com $a'b' \in \mathbb{Z}$. Logo $c|a$.
 (c) Sejam $a = ca'$ e $b = cb'$, com $a', b' \in \mathbb{Z}$. Então $ax + by = ca'x + cb'y = c(a'x + b'y)$, com $a'x + b'y \in \mathbb{Z}$. Logo $c|(ax + by)$.
 (d) Como $a \neq 0$ e $b|a$, temos que $a = ba'$, com $a' \in \mathbb{Z}$ e $a' \neq 0$. Assim $|a'| \geq 1$ o que implica que $|a| = |ba'| = |b||a'| \geq |b|$.
 (e) Se $b = cb'$, com $b' \in \mathbb{Z}$, então $ab = a(cb') = c(ab')$, com $ab' \in \mathbb{Z}$. Logo $c|ab$.
 (f) Se $a = ba'$, com $a' \in \mathbb{Z}$, então $ac = (ba')c = (bc)a'$ e, daí, $bc|ac$.

□

Teorema 2.1.1 (Divisão Euclidiana). Para quaisquer $a, b \in \mathbb{Z}$, com $b \neq 0$, existem únicos $q, r \in \mathbb{Z}$, tais que $a = bq + r$, onde $0 \leq r < |b|$.

Demonstração:

Prova da existência: Suponha primeiro $b > 0$, e seja q o maior inteiro tal que $bq \leq a$. Então $bq \leq a < b(q+1)$, de modo que $0 \leq a - bq < b$ e basta definir $r = a - bq$. Se $b < 0$, então $-b > 0$, donde existem $q, r \in \mathbb{Z}$, tais que $a = (-b)q + r$, com $0 \leq r < -b$. Então $a = b(-q) + r$, com $0 \leq r < -b = |b|$.

Prova da unicidade: Suponhamos que existam inteiros q_1, q_2, r_1, r_2 , que satisfaçam a igualdade $a = bq_1 + r_1 = bq_2 + r_2$, com $0 \leq r_1, r_2 < |b|$. Então temos que $|b| > |r_1 - r_2|$ e $b(q_2 - q_1) = r_1 - r_2$. Se $q_2 \neq q_1$, então $|q_2 - q_1| \geq 1$, de modo que $|b| \leq |b||q_2 - q_1| = |r_1 - r_2| < |b|$, o que é uma contradição. Portanto, $q_2 = q_1$ e, daí, $r_1 = r_2$.

□

Definição 2.1.2. O Máximo Divisor Comum de dois inteiros a e b (com a ou b diferente de zero), denotado por $mdc(a, b)$ ou simplesmente por (a, b) , é o maior inteiro que divide a e b , ou seja, é o maior inteiro que pertence ao conjunto dos divisores de a e b .

As propriedades mais básicas do mdc são as seguintes:

- (i) $mdc(a, b) = d > 0$
- (ii) Se $mdc(a, b) = d$ então tem-se que $d|a$ e $d|b$
- (iii) Se $c|a$ e $c|b$ então $c|mdc(a, b)$
- (iv) $mdc(a, b) = mdc(b, a)$
- (v) $mdc(a, 1) = 1$
- (vi) Se a e b são primos tais que $a \neq b$, temos que $mdc(a, b) = 1$

Lema 2.1.1. Sejam a e b dois inteiros positivos e $a = bq + r$, com $0 \leq r < b$ e $q \in \mathbb{Z}$. Então $mdc(a, b) = mdc(b, r)$.

Demonstração:

Com efeito, se $a = bq + r$, então $r = a - bq$, com $q \in \mathbb{Z}$. Seja $k \in \mathbb{Z}$ um divisor comum de a e de b , então $k|a$ e $k|b$. Assim, $k|a - bq = r$, ou seja, k é um divisor comum de b e de r . Reciprocamente, como $a = bq + r$, vem imediatamente que todo divisor comum k de b e de r é divisor comum de b e de a . Assim, o conjunto dos divisores comuns de a e de b é igual ao conjunto dos divisores comuns de b e de r . Logo, $mdc(a, b) = mdc(b, r)$.

□

Assim, pelo lema anterior, dados a, b inteiros positivos com $a \geq b$, o problema de encontrar o $mdc(a, b)$, reduz-se a encontrar o $mdc(b, r)$, onde r é tal que $a = bq + r$, com $0 \leq r < b$. Demonstrado esse resultado, podemos mostrar o algoritmo de Euclides. Este algoritmo apresenta duas funções muito importantes: primeiro, o algoritmo de Euclides fornece o $mdc(a, b)$ de maneira rápida e sistemática; segundo, através deste algoritmo é possível escrever o $mdc(a, b)$ como combinação linear de a e b , fato este que será indispensável para a resolução das equações diofantinas lineares com duas variáveis, que serão abordadas mais adiante.

Vamos ao método chamado de algoritmo de Euclides. Sejam a e b inteiros positivos, com $a \geq b$. Naturalmente, repetindo o algoritmo da divisão euclidiana, temos:

$$\begin{aligned} a &= bq_1 + r_1, \text{ com } 0 \leq r_1 < b \\ b &= r_1q_2 + r_2, \text{ com } 0 \leq r_2 < r_1 \\ r_1 &= r_2q_3 + r_3, \text{ com } 0 \leq r_3 < r_2 \\ &\vdots \\ r_{n-2} &= r_{n-1}q_n + r_n, \text{ com } 0 \leq r_n < r_{n-1} \\ r_{n-1} &= r_nq_{n+1} + r_{n+1}, \text{ com } r_{n+1} = 0. \end{aligned}$$

Como o resto diminui a cada passo, o processo não pode continuar indefinidamente, e alguma das divisões deve ser exata. Suponhamos então que r_{n+1} seja o primeiro resto nulo. Utilizando o resultado do lema anterior, temos que:

$$mdc(a, b) = mdc(b, r_1) = mdc(r_1, r_2) = \dots = mdc(r_{n-1}, r_n)$$

Finalmente, como $r_n \mid r_{n-1}$ é fácil ver que $mdc(r_{n-1}, r_n) = r_n$, logo, $mdc(a, b) = r_n$.

Deste modo, fica demonstrado por este processo que o máximo divisor comum de a e b é o último resto diferente de zero das divisões sucessivas a partir da divisão euclidiana de a por b .

Podemos usar o algoritmo de Euclides de maneira mais simplificada e eficiente através do dispositivo prático abaixo, que torna os cálculos mais mecânicos e mais práticos de serem realizados. Este dispositivo prático que sintetiza o algoritmo de Euclides, além de calcular o $mdc(a, b)$, serve para escrever o mesmo como combinação linear dos coeficientes a e b de uma equação diofantina linear com duas variáveis, fato este que será abordado mais adiante.

	q_1	q_2	q_3	\dots	q_{n-1}	q_n	q_{n+1}
a	b	r_1	r_2	\dots	r_{n-2}	r_{n-1}	$r_n = mdc(a, b)$
r_1	r_2	r_3	r_4	\dots	r_n		

3 Números Racionais

3.1 Ensino dos Números Racionais

O conjunto dos números racionais \mathbb{Q} é um dos conjuntos numéricos mais trabalhados nas séries finais do ensino fundamental. Junto com o conjunto dos números inteiros \mathbb{Z} é o conjunto de números que serve de base e é de uso indispensável na maioria dos conteúdos e problemas abordados durante o ensino fundamental. Embora no ensino médio seja dado ênfase ao conjunto dos números reais \mathbb{R} , a maioria dos problemas resolvidos em sala de aula, em provas, em concursos e no Enem¹ usam os conhecimentos sobre números decimais finitos ou infinitos e periódicos, que podem ser escritos na forma de fração $\frac{p}{q}$, com $p, q \in \mathbb{Z}$ e $q \neq 0$, ou seja, o conjunto dos números racionais.

E não é só no contexto escolar que o conhecimento sobre os números racionais é importante. No cotidiano de qualquer pessoa aparecem situações envolvendo uma fração ou um decimal finito. Basta perceber que todas as pessoas precisam utilizar dinheiro para viver em qualquer sociedade atualmente, e para isto deve-se ter a noção de décimos e centésimos. Além disso, fazer um bolo ou comer uma pizza com os amigos necessita de um conhecimento básico sobre frações. Um argumento infalível para destacar a importância do conhecimento sobre os números racionais é que a matemática existe também para medir as grandezas existentes no mundo, argumento este embasado no trabalho de Pitágoras e dos pitagóricos, onde as medidas comensuráveis podiam ser representadas através de uma razão, e estas podiam traduzir o mundo e fazer valer a famosa frase de Pitágoras "tudo é número".

Ao se fazer uma análise de alguns livros didáticos do ensino fundamental, chega-se

¹ Exame Nacional do Ensino Médio. O Enem é a principal porta de acesso às universidades para os alunos do ensino médio que apresentam baixa renda e por isso necessitam de bolsas de estudos para prosseguir na vida acadêmica.

a conclusão de que o conjunto dos números racionais é abordado de maneira bem ampla em três séries: 6º, 7º e 8º anos, com ênfase no 6º ano na abordagem da forma fracionária dos racionais. É difícil encontrar uma coleção que aborde de maneira completa todas as possibilidades que o conhecimento real dos números racionais pode oferecer ao estudante, mas se o professor utilizar duas ou três coleções e mesclar abordagens de uma e de outra, terá um material vasto para fazer o aprofundamento necessário para um bom desenvolvimento da vida acadêmica do estudante e para a sua evolução e inserção na sociedade.

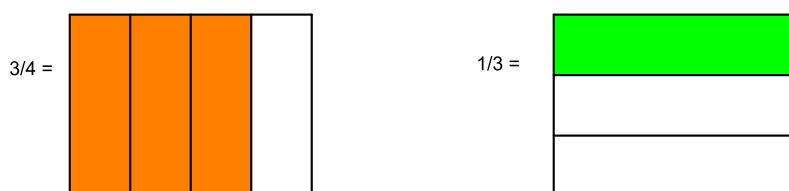
Cabe apenas uma ressalva sobre a abordagem dos racionais no ensino fundamental, em dois pontos interessantes. Primeiro, o professor deve prestar atenção no uso das multiplicações e divisões de frações (ou decimais) como sendo operações que, também, representam quantidades e que às vezes são esquecidas por causa de formulações que "facilitam" a memorização e a resolução de problemas por parte dos alunos. Exemplo desta memorização pode ser dado pela regra da divisão de frações "na divisão de fração, copia-se a primeira fração e multiplica-se pelo inverso da segunda fração", que é trabalhada por muitos professores somente como um método, uma receita, desvinculando assim o sentido de "repartir" que uma divisão tem. Desse modo, as multiplicações e divisões de frações se tornam abstrações desprendidas de sentido, sem utilização em situações reais encontrados no cotidiano, como por exemplo, calcular a quantidade de cada ingrediente que será necessário para fazer um bolo que rende 6 porções, sabendo que a quantidade de cada ingrediente da receita original rende 15 porções.

Quando se fala em dar sentido ao conteúdo, não quer dizer que o mesmo deve ser trabalhado sempre de maneira aplicada, com jogos, material concreto, metodologias inovadoras ou situações-problema, até porque sabemos que algumas atividades práticas não apresentam os resultados esperados. Também não queremos criticar os métodos atuais usados pelos professores. Primeiro porque a culpa das falhas no sistema educacional vigente não são determinadas única e exclusivamente pelos docentes, mas sim pelo sistema como um todo. Segundo, porque este não é o interesse deste trabalho. Como afirma o PCN (??), pg 105,

não é sempre que podemos usar a representação geométrica para mostrar uma divisão de fração e chegar no resultado desejado, e nestes casos

a ideia de que "dividir significa multiplicar pelo inverso" se torna indispensável para resolvermos o problema.

Um exemplo simples do fato de dar sentido às operações com frações, e que consideramos uma abordagem obrigatória ao se ensinar multiplicação de frações, é mostrar ao aluno a representação geométrica da multiplicação (e também da divisão) de frações, de forma semelhante à explorada em (??), para que o aluno tenha noção de que quando se faz o cálculo de $\frac{1}{3} \times \frac{3}{4}$, está sendo procurado uma quantidade, uma porção concreta de alguma coisa, seja esta uma pizza, uma garrafa de refrigerante ou uma área de um terreno, que pode ser representado geometricamente do seguinte modo:



Fazendo a intersecção da fração $\frac{3}{4}$ com a fração $\frac{1}{3}$ temos o resultado da multiplicação das duas frações que é $\frac{3}{12}$ e esta representado na figura abaixo pela parte de cor vermelha.

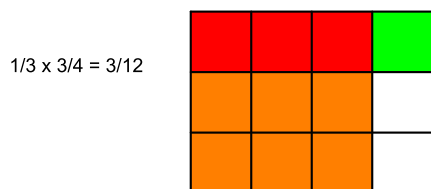


Figura 1 – Multiplicação de Frações

Este simples exemplo que é de fácil compreensão para todos, mostra a verdadeira situação envolvida em uma multiplicação de frações que é basicamente construir uma fração de um objeto inteiro, depois construir a outra fração do mesmo objeto inteiro e por último considerar somente a parte que é intersecção das duas figuras como sendo o numerador e o total de pedaços repartidos como sendo o denominador da fração que será a resposta da multiplicação entre as duas frações. A representação geométrica acima foi feita passo a passo, mas uma maneira de exposição aos alunos que achamos mais interessante é a de desenhar o objeto inteiro e desenhar as duas frações desejadas (que

estão se multiplicando) no mesmo objeto, pois desta maneira fica melhor representado a noção de "tirar um pedaço" de algo que já é um "pedaço", ou seja, tomar uma fração de uma fração de um objeto.

Do mesmo modo que a multiplicação de fração, a divisão de frações também pode ser representada geometricamente, usando o sentido de repartir que a divisão tem para facilitar o entendimento por parte dos alunos. Vamos mostrar um exemplo de divisão de frações representando-a geometricamente e passo a passo. Lembramos que cada professor pode usar as variações que desejar e que julgar necessária, com o intuito de aprimorar as explicações e com isso o aprendizado dos alunos, como por exemplo mostrando após o desenho de uma divisão de fração como ficaria a figura após aplicar a regra da divisão, ou seja, transformando-a em uma multiplicação "pelo inverso da segunda fração", representando este fato geometricamente também. Queremos efetuar o cálculo da expressão $\frac{2}{3} \div \frac{1}{4}$ de modo geométrico, ou seja, queremos repartir um produto que ocupa $\frac{2}{3}$ de um determinado recipiente em "potes" que têm $\frac{1}{4}$ da capacidade deste recipiente. Então, para descobrir a quantidade de potes que iremos usar, procedemos da seguinte maneira:

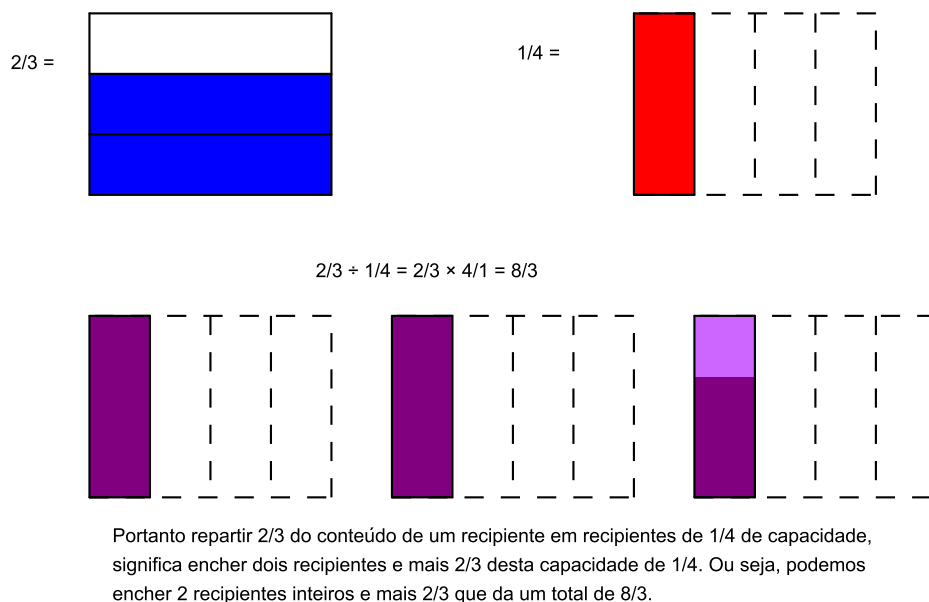


Figura 2 – Divisão de Frações

O outro ponto que deve ser abordado com muita atenção é a relação fração-decimal-porcentagem, que exige por parte do aluno um domínio sobre as equivalências entre frações e também multiplicação, divisão e simplificação de frações. Alertar os alunos e fazê-los

compreender o fato de que

$$\frac{6}{15} = \frac{2}{5} = 0,4 = \frac{4}{10} = \frac{40}{100} = 40\%$$

é de fundamental importância para o desenvolvimento de vários cálculos em várias situações e vários conteúdos de matemática, como por exemplo na resolução de regras de três, cálculo de juros, equações, funções, geometria e trigonometria. O exemplo acima serve para mostrar que problemas que envolvem números decimais ou porcentagem podem ser transformados em problemas com números fracionários e que podem ser resolvidos de maneira simples, sem que seja necessário o uso de calculadoras, estimulando assim os alunos a pensar sobre o uso de artifícios matemáticos que facilitam os cálculos. Deste modo se um aluno se depara com o anúncio de uma loja dizendo que um tênis de R\$ 180,00 está com 15% de desconto à vista, basta ele se lembrar que $15\% = \frac{15}{100} = \frac{3}{20}$ e que $\frac{3}{20} \cdot 180 = 27$, então de maneira simples ela concluirá que irá pagar R\$153,00 por este par de tênis.

A partir do momento em que os alunos apresentarem um domínio significativo das operações e resoluções de problemas no campo das frações, o ensino da matemática irá atingir outro patamar, podendo ser desenvolvida uma gama maior de conteúdos e de aplicações, facilitando de certo modo o trabalho do professor de matemática do ensino médio e deixando-o a vontade para mostrar aos alunos que quanto mais se aprende e se desenvolve na matemática, mais prazerosa e apaixonante ela fica.

4 Conceito de MDC generalizado

4.1 Definições e resultados

A seguir serão expostas algumas definições que nos permitem generalizar o conceito de máximo divisor comum (e também mínimo múltiplo comum se for do interesse do leitor) para o conjunto dos números racionais e para os números reais comensuráveis. A princípio estes conceitos causam desconfiança e são tomados como sendo sem sentido, principalmente para aqueles que estudam e ensinam matemática, mas depois de algumas verificações da funcionalidade destes conceitos em situações reais, percebe-se que o assunto é simples e pode ser abordado até mesmo no ensino fundamental como curiosidade ou como método de resolução de vários tipos de problemas. Vale ressaltar que para a elaboração de tais conceitos, foi tomado como texto base e como referência (??), artigo publicado em 2006 e que apresenta além dos teoremas que citaremos, outras formulações interessantes que ficam a disposição para os leitores mais curiosos e que desejam uma compreensão maior sobre este tema.

Definição 4.1.1. Dizemos que dois segmentos da reta são comensuráveis quando ambos podem ser obtidos através de um número inteiro de emendas não sobrepostas de um mesmo segmento de reta.

Definição 4.1.2. Dois números reais r e s são comensuráveis se existem inteiros não nulos m, n tais que $mr = ns$.

Exemplos:

1. Dois racionais são sempre comensuráveis.
2. Dois irracionais podem ser comensuráveis: por exemplo, $\sqrt{2}$ e $2\sqrt{2}$.
3. Dois reais quaisquer nem sempre são comensuráveis: basta tomar um racional e um

irracional, mas também a maioria de pares de irracionais, como, por exemplo, $\sqrt{2}$ e $\sqrt{3}$.

Definição 4.1.3. Dizemos que um número real r é um múltiplo inteiro de um número real s , ou que s é um divisor inteiro de r , se existe um inteiro a tal que $r = as$.

Devemos observar que a definição acima esclarece o significado de *múltiplo inteiro* e *divisor inteiro* de números reais, que ao longo do texto podem confundir o leitor, pois nos referimos ao múltiplo inteiro comum como sendo um número real que é múltiplo um número inteiro de vezes de outro número real e ao divisor inteiro comum, ao número real que divide outro número real uma quantidade inteira de vezes.

Proposição 4.1.1. Sejam r e s dois números reais não nulos. As seguintes afirmações são equivalentes:

- a) r e s são comensuráveis;
- b) o quociente $\frac{r}{s}$ é um número racional;
- c) existe um real t que é múltiplo inteiro comum de r e de s ;
- d) existe um real u que é divisor inteiro comum de r e de s .

Demonstração:

(a) \Rightarrow (b) Se r e s são comensuráveis então existem $m, n \in \mathbb{Z}^*$ tais que $mr = ns$.

Consequentemente, $\frac{r}{s} = \frac{n}{m} \in \mathbb{Q}$.

(b) \Rightarrow (c) Suponhamos que $\frac{r}{s} \in \mathbb{Q}$, digamos, $\frac{r}{s} = \frac{n}{m}$. Então, multiplicando a igualdade acima por sm obtemos que $t = mr = ns$ é um múltiplo inteiro comum de r e de s , com $t \in \mathbb{R}$.

(c) \Rightarrow (d) Seja $t \in \mathbb{R}$ um múltiplo inteiro comum de r e de s , digamos, $t = mr = ns$, com $m, n \in \mathbb{Z}^*$. Então, o número $u = \frac{r}{n} = \frac{s}{m}$ é um divisor inteiro comum de r e de s .

(d) \Rightarrow (a) Seja u um divisor comum de r e de s , digamos $r = un$ e $s = um$, com $m, n \in \mathbb{Z}^*$. Então, temos que $mr = ns$ concluindo a demonstração.

□

Definição 4.1.4. Sejam r e s dois números reais comensuráveis não nulos. Dizemos que u é o máximo divisor comum generalizado (*mdcg*) entre r e s , e escrevemos $u = \text{mdcg}(r, s)$,

se

- a) u é um divisor inteiro comum de r e s .
- b) se u' é divisor inteiro comum de r e de s então $u' \leq u$.

De posse das definições acima, podemos enunciar o teorema que nos fornece uma fórmula para o $mdcg$ entre dois reais comensuráveis quaisquer.

Teorema 4.1.1. Sejam r e s dois reais comensuráveis não nulos. Então

$$mdcg(r, s) = \frac{r}{u} = \frac{s}{v},$$

onde $\frac{u}{v}$ é a forma irredutível do racional $\frac{r}{s}$.

Demonstração:

Consideraremos aqui apenas o caso r e s positivos. Observamos inicialmente que se a, b, c, d são inteiros tais que $ar = bs$ e $cr = ds$ então

$$\frac{b}{a} = \frac{d}{c},$$

e este número nada mais é do que o número $\frac{r}{s}$. Assim, os menores naturais a, b que satisfazem $ar = bs$ são claramente obtidos quando tomamos o numerador e o denominador da fração irredutível que representa o racional $\frac{r}{s}$. Daí, pela definição de $mdcg$, se $\frac{u}{v}$ é tal fração irredutível, então

$$mdcg(r, s) = \frac{r}{u} = \frac{s}{v},$$

o que completa a prova do teorema.

□

No caso de r e s serem números racionais, a fórmula dada no teorema acima pode ser reescrita em termos das representações destes racionais em frações irredutíveis:

Teorema 4.1.2. Sejam r, s racionais não nulos e sejam a, b, c, d inteiros tais que $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$ são as representações para r e s , respectivamente, na forma de fração irredutível. Então

$$mdcg(r, s) = \frac{mdc(a, c)}{mmc(b, d)}.$$

Demonstração:

Novamente aqui provamos apenas para o caso r e s positivos.

Como $\text{mdc}(a, b) = 1 = \text{mdc}(c, d)$, temos

$$\frac{r}{s} = \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{ad}{bc} = \frac{a'd'}{b'c'},$$

onde

$$a' = \frac{a}{\text{mdc}(a, c)}, \quad b' = \frac{b}{\text{mdc}(b, d)}, \quad c' = \frac{c}{\text{mdc}(a, c)}, \quad d' = \frac{d}{\text{mdc}(b, d)}.$$

É claro, que a fração $\frac{a'd'}{b'c'}$ é irredutível, e portanto, pelo Teorema 4.1.1, temos

$$\begin{aligned} \text{mdcg}(r, s) &= \frac{r}{a'd'} = \frac{a}{b} \cdot \frac{\text{mdc}(a, c)}{a} \cdot \frac{\text{mdc}(b, d)}{d} \\ &= \text{mdc}(a, c) \cdot \frac{\text{mdc}(b, d)}{bd} = \frac{\text{mdc}(a, c)}{\frac{bd}{\text{mdc}(b, d)}} \end{aligned}$$

mas como

$$\frac{bd}{\text{mdc}(b, d)} = \text{mmc}(b, d)$$

então substituindo esta expressão temos que

$$\text{mdcg}(r, s) = \frac{\text{mdc}(a, c)}{\text{mmc}(b, d)},$$

o que completa a prova. □

Corolário 4.1.1. Se r e s são dois números racionais que podem ser representados por uma fração decimal, digamos $r = \frac{u}{10^k}$ e $s = \frac{v}{10^l}$ e se $t \geq k$ e $t \geq l$, então

$$\text{mdcg}(r, s) = \frac{\text{mdc}(10^t r, 10^t s)}{10^t}.$$

Demonstração: Imediata. □

Este conceito de *mdc* generalizado será utilizado mais adiante para possibilitar a resolução de equações do tipo diofantinas com coeficientes racionais e deste modo estender o emprego dos métodos de resolução destas equações para problemas que até o momento são solucionados através de outros artifícios matemáticos. Mas, vale lembrar que a Definição 4.1.4 só tem sentido quando adotada como referência única e exclusivamente a Definição 4.1.3. Se pensarmos na divisibilidade em um anel (conjunto munido de duas operações que satisfazem algumas propriedades pré-determinadas), conforme proposto por (??), em que dado um anel A , com $a, b \in A$, então podemos dizer que a é múltiplo de b ou que b é divisor de a se $a = bt$ para qualquer $t \in A$, teríamos neste caso o diferencial de que um múltiplo a não significa um número inteiro de vezes o número b , como abordamos até o momento.

Portanto, o conceito de múltiplos e divisores não faz sentido quando estamos trabalhando em um corpo algébrico (anel com a propriedade adicional de que todo elemento não nulo possui um inverso multiplicativo), pois conforme a definição de múltiplo em um anel, se a, b, c não nulos pertencem a um corpo, podemos dizer que qualquer um destes números é múltiplo comum e também divisor comum dos outros dois números, devido à propriedade do corpo de cada elemento possuir um elemento inverso multiplicativo. Para ilustrar isto, podemos escrever

$$a = b(b^{-1}a) = c(c^{-1}a), \quad b = a(a^{-1}b) = c(c^{-1}b) \text{ e } c = a(a^{-1}c) = b(b^{-1}c).$$

E ainda sobre as operações realizadas em um corpo, como citado em (??), pág. 70, a relação de soma entre frações continua válida, mesmo que os denominadores sejam reais incomensuráveis, mas é incorreto dizer que o novo denominador, que geralmente, é o produto entre os denominadores das frações a serem somadas, é o mínimo múltiplo comum dos denominadores. Então, a igualdade

$$\frac{2}{\sqrt{3}} + \frac{5}{\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2} + 5\sqrt{3}}{\sqrt{6}}$$

tem fundamentação matemática, mas não demonstraremos aqui devido à demonstração estar contida na referência (??), só que dizer que $\sqrt{6}$ é o *mmc* dos denominadores $\sqrt{3}$ e $\sqrt{2}$ é incorreto, até mesmo com o uso do conceito de *mdcg*, pois os denominadores são incomensuráveis. Se os denominadores forem comensuráveis, consideramos que a nomen-

clatura de *mmc* continua inválida para não causar equívocos no ensino destas fatorações em um corpo, principalmente quando utilizado o conjunto dos números reais.

Com esta ressalva queremos mostrar que o conceito de máximo divisor comum generalizado (e mínimo múltiplo comum) obedece definições claras que devem ser seguidas e que são fundamentadas com o rigor matemático necessário. Fica claro, então, que a palavra generalizado usada no *mdcg* é muito conveniente, pois o conceito de *mdc* que adotamos para o nosso trabalho realmente é uma generalização do *mdc* dos números inteiros. Por último, vale lembrar que o *mdcg* pode ser calculado nos racionais e nos reais comensuráveis, mas como um dos objetivos do trabalho é apresentar a importância do ensino completo das frações, então iremos mostrar exclusivamente problemas com cálculos de *mdcg* com números racionais.

5 Equações diofantinas

São chamadas equações diofantinas todas as equações polinomiais (não importando o número de incógnitas) com coeficientes inteiros, sempre que for tomado como conjunto solução das variáveis da equação o conjunto dos números inteiros. Esta definição simples abre um leque de possibilidades, desde as equações mais simples com duas ou três variáveis de grau 1 até equações com duas ou mais variáveis de grau $n \geq 2$ como por exemplo o famoso teorema de Pitágoras que diz que "*em um triângulo retângulo, o quadrado do comprimento da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos comprimentos dos catetos*",¹ e que pode ser escrito através da equação $a^2 + b^2 = c^2$, e também o último teorema de Fermat ou teorema de Fermat-Wiles² que afirma que a equação $x^n + y^n = z^n$ não possui solução para $x, y, z, n \in \mathbb{Z}$ e $n > 2$.

Devido à complexidade da resolução destas equações com grau maior que 2, só é possível abordar amplamente na educação básica as equações diofantinas com duas variáveis e grau 2 (teorema de Pitágoras e soluções sendo as ternas pitagóricas) e as equações diofantinas lineares em duas variáveis. As equações diofantinas lineares com 3 ou mais variáveis podem ser abordadas em algumas turmas do ensino médio, até mesmo com o método de tentativas para encontrar as soluções em vez de usar o rigor matemático das formulações e soluções gerais que se tornam extensas demais e sem utilidade prática. Para aqueles que tiverem interesse nestas equações indicamos a leitura de (??) e (??), que abordam o assunto de maneira simplificada e com a exposição de problemas aplicados que podem ser trabalhados em sala de aula.

Visto a importância, facilidade de resolução e quantidade de problemas que se en-

¹ Vale lembrar que as triplas de números inteiros que satisfazem o teorema de Pitágoras são chamados de ternas pitagóricas, mas que o teorema admite solução no conjunto dos números reais.

² O último teorema de Fermat foi proposto em 1637 pelo matemático francês Pierre de Fermat (1601-1665) que afirmou ter encontrado uma demonstração maravilhosa do teorema, mas que as margens do livro que o inspirou (Aritmethica, de Diofanto) não eram suficientes para contê-la, mas que só foi demonstrado completamente em 1995 pelo matemático britânico Andrew Wiles.

quadram neste formato, tomaremos como foco do nosso estudo a compreensão e resolução das equações diofantinas lineares com duas variáveis.

5.1 Equações diofantinas lineares em duas variáveis

Uma equação diofantina linear em duas variáveis é uma expressão da forma $ax + by = c$, na qual a, b, c são inteiros, com a e b não simultaneamente nulos e cujas soluções estão restritas ao conjunto dos números inteiros. Uma solução dessa equação é então um par de inteiros (x_0, y_0) tal que $ax_0 + by_0 = c$.

Vale ressaltar que, apesar deste tipo de equações que visa soluções inteiras receberem o nome de diofantinas devido a Diofanto de Alexandria, o primeiro matemático a encontrar uma solução geral de uma equação diofantina linear foi o hindu Brahmagupta (598 – 670), cuja resolução foi embasada no algoritmo de Euclides. Muitas dessas equações podem ser resolvidas facilmente por tentativas, da mesma maneira que Diofanto as resolvia, mas vale lembrar que ao encontrar as soluções gerais de uma equação diofantina linear é possível entender o problema e suas soluções em sua totalidade.

Teorema 5.1.1 (Teorema de Bézout). Se $d = \text{mdc}(a, b)$, então existem $x, y \in \mathbb{Z}$, de modo que $ax + by = d$.

Demonstração:

Se $d = \text{mdc}(a, b)$, temos que $d|a$ e $d|b$. Seja $c \in \mathbb{Z}$, onde $c|a$ e $c|b$. Pela Proposição 2.1.1, podemos afirmar que $c|(ax + by)$ com $x, y \in \mathbb{Z}$. Então $ax + by = kc$, com $k \in \mathbb{Z}$.

Se $d = \text{mdc}(a, b)$ e $c|d$ temos que $d = kc$, logo, verificamos que $ax + by = kc = d$.

□

O Teorema de Bézout não mostra como efetivamente encontrar uma solução em x e y para a equação $ax + by = \text{mdc}(a, b)$. Para encontrar os inteiros x e y deve se usar o *algoritmo de Euclides* ou *algoritmo das divisões sucessivas*, isolando os restos e fazendo

combinações até encontrar o $\text{mdc}(a, b)$ como combinação linear dos coeficientes a e b , ou seja, uma equação da forma $ax + by = d$. Para facilitar a compreensão, veja o exemplo a seguir:

Exemplo 5.1.1. Encontre uma solução para a equação $34x + 14y = \text{mdc}(34, 14)$, com $x, y \in \mathbb{Z}$.

Resolução

Começamos com o algoritmo de Euclides:

	2	2	3
34	14	6	2
6	2		

Analisando a tabela temos as seguintes expressões:

$$34 = 14 \cdot 2 + 6$$

$$14 = 6 \cdot 2 + 2$$

$$6 = 2 \cdot 3 + 0$$

Logo o $\text{mdc}(34, 14) = 2$. Agora isolamos os restos de cada divisão, desconsiderando a última expressão, já que tem resto 0 e, portanto, não será substituída em nenhuma outra expressão.

$$6 = 34 - 14 \cdot 2 \quad (1) \quad 2 = 14 - 6 \cdot 2 \quad (2)$$

Substituindo (1) em (2) tem-se a expressão procurada:

$$2 = 14 - 2 \cdot (34 - 14 \cdot 2) = 34 \cdot (-2) + 14 \cdot (5)$$

Portanto uma solução da equação $34x + 14y = \text{mdc}(34, 14) = 2$ é $x = -2$ e $y = 5$. Mais adiante será mostrado o método para encontrar todas as soluções inteiras deste tipo de equação.

Teorema 5.1.2. Sejam $a, b, c \in \mathbb{Z}$, com a e b não simultaneamente nulos. A equação $ax + by = c$ admite solução inteira em x e y se, e somente se, $\text{mdc}(a, b) \mid c$. Nesse caso, se $d = \text{mdc}(a, b)$ e $x = x_0, y = y_0$ é uma solução inteira qualquer da equação, então as fórmulas $x = x_0 + \frac{b}{d}t$ e $y = y_0 - \frac{a}{d}t$, para todo $t \in \mathbb{Z}$, fornecem todas as soluções inteiras possíveis.

Demonstração: Se a equação admite solução inteira, pela Proposição 2.1.1, $\text{mdc}(a, b) \mid ax + by$, logo $\text{mdc}(a, b) \mid c$. Reciprocamente, suponhamos que $\text{mdc}(a, b) \mid c$, digamos $c = k\text{mdc}(a, b)$ com $k \in \mathbb{Z}$. Pelo teorema 5.1.1 existem inteiros x_0 e y_0 , tais que $ax_0 + by_0 = \text{mdc}(a, b)$. Multiplicando essa igualdade por k obtemos que $x = kx_0$ e $y = ky_0$ são soluções da equação dada.

Para o que falta, suponha que $\text{mdc}(a, b) \mid c$ e seja $x = x_0, y = y_0$ uma solução inteira qualquer da equação. Se $x = x_1$ e $y = y_1$ for outra solução inteira da mesma, então $a(x_1 - x_0) = b(y_0 - y_1)$. Dividindo essa igualdade por $d = \text{mdc}(a, b)$, temos:

$$\frac{a}{d}(x_1 - x_0) = \frac{b}{d}(y_0 - y_1). \quad (5.1)$$

Assim, $\frac{b}{d} \mid \frac{a}{d}(x_1 - x_0)$ e, como $\text{mdc}\left(\frac{a}{d}, \frac{b}{d}\right) = 1$, temos que $\frac{b}{d} \mid (x_1 - x_0)$. Logo $\exists t \in \mathbb{Z}$ tal que $x_1 - x_0 = \frac{b}{d}t$, ou seja, $x_1 = x_0 + \frac{b}{d}t$. Substituindo $(x_1 - x_0)$ por $\frac{b}{d}t$ na equação (5.1), obtemos de modo análogo $y_1 = y_0 - \frac{a}{d}t$, com $t \in \mathbb{Z}$. Reciprocamente, é imediato verificar que tais fórmulas fornecem, de fato, para todo $t \in \mathbb{Z}$, soluções inteiras para a equação.

□

Uma observação importante deve ser feita no teorema acima: como $d \mid c$, temos que $c = dq$, com $q \in \mathbb{Z}$ e $q = \frac{c}{d}$. Escrevendo $d = ar + bs$, com $r, s \in \mathbb{Z}$, e multiplicando a equação por $q = \frac{c}{d}$ obtém-se a equação $c = ar\frac{c}{d} + bs\frac{c}{d}$, e a partir daí conclui-se que $x_0 = r\frac{c}{d}$ e $y_0 = s\frac{c}{d}$ e que as soluções gerais da equação diofantina $ax + by = c$ podem ser escritas da seguinte forma:

$$x = \frac{rc + bt}{d} \text{ e } y = \frac{sc - at}{d}, \text{ para qualquer } t \in \mathbb{Z}.$$

Exemplo de resolução de uma equação diofantina.

Exemplo 5.1.2. Vamos resolver a equação $5x + 12y = 81$ com solução pertencente a \mathbb{Z} .

Resolução

Vamos começar usando o algoritmo de Euclides.

$$\begin{array}{c|c|c|c} & 2 & 2 & 2 \\ \hline 12 & 5 & 2 & 1 \\ \hline 2 & 1 & & \end{array}$$

Pelo Teorema , como o $\text{mdc}(5, 12) = 1$ então a equação tem solução. Usando o algoritmo acima e fazendo as substituições necessárias, encontramos a solução particular procurada. Segue que

$$1 = 5 - 2 \cdot 2 \quad e \quad 2 = 12 - 5 \cdot 2$$

o que implica

$$1 = 5 \cdot 1 - 2(12 \cdot 1 - 5 \cdot 2)$$

$$1 = 5 \cdot 5 + 12 \cdot (-2)$$

Multiplicando a equação acima por 81, segue que

$$81 = 5 \cdot (405) + 12 \cdot (-162)$$

Deste modo temos que a solução geral da equação $5x + 12y = 81$ no conjunto dos inteiros é:

$$X = 405 + 12t \quad e \quad Y = -162 - 5t, \quad \text{com } t \in \mathbb{Z}.$$

Exemplo 5.1.3. Resolva a equação $9x - 5y = 18$ com solução pertencente a \mathbb{Z} .

Resolução

Utilizando o algoritmo de Euclides temos que $\text{mdc}(9, 5) = 1$, logo a equação tem solução e conseguimos escrever o mdc como combinação linear dos coeficientes da equação.

$$\begin{array}{c|c|c|c} & 1 & 1 & 4 \\ \hline 9 & 5 & 4 & 1 \\ \hline 4 & 1 & & \end{array}$$

Pelo dispositivo prático temos $1 = 5 - 4 \cdot 1$ e $4 = 9 - 5 \cdot 1$ e então,

$$\begin{aligned}1 &= 9 \cdot (-1) - 5 \cdot (-2) \quad .(18) \\18 &= 9 \cdot (-18) - 5 \cdot (-36)\end{aligned}$$

Logo, a solução da equação é $x = -18 - 5t$, e $y = -36 - 9t$, com $t \in \mathbb{Z}$.

5.2 Problemas práticos envolvendo Equações diofantinas em duas variáveis

As equações diofantinas lineares com duas variáveis são de fundamental importância para solucionar problemas que, geralmente, são apresentados no ensino fundamental e resolvidos por tentativa ou resolvidos através de um sistema de equações. Entretanto para isso precisam de algumas informações adicionais ou até mesmo duas equações com duas variáveis, do mesmo modo que são resolvidos os sistemas lineares através do cálculo matricial. Como o conjunto solução de uma equação diofantina é infinito, é indispensável a utilização de um método que encontre todas as possibilidades de solução. Além disso, a quantidade de problemas práticos do cotidiano ou didáticos na escola que podem ser resolvidos através deste modelo de equação torna ainda mais significativo o aprendizado deste conteúdo e a sua abordagem no contexto escolar independente da série que o mesmo seja trabalhado, mas sempre vinculando-o com outros conteúdos que são normalmente ensinados, como por exemplo as equações do 7º ano, as funções polinomiais do 1º grau da 8ª série e do 1º ano do ensino médio ou até mesmo a geometria analítica que é abordada normalmente nas séries finais do ensino médio.

Podemos perceber também que as equações diofantinas servem para mostrar a aplicação dos conhecimentos sobre máximo divisor comum, que as vezes passam despercebidos pelos alunos, pois são ensinados de forma mecânica e sem o envolvimento de situações problemas que possam despertar o interesse dos discentes. É claro que para uma abordagem ampla dos conceitos de máximo divisor comum e mínimo múltiplo comum com suas

respectivas aplicações, é necessário um nível de amadurecimento por parte dos alunos (e até mesmo por parte dos professores) muito grande, visto que estes conteúdos tem seu ápice no 6º ano do ensino fundamental e nesta fase os alunos estão na faixa dos 10 aos 12 anos de idade.

Mostraremos alguns problemas práticos que podem servir de exemplo para a modelagem de várias outras situações através das equações diofantinas lineares com duas variáveis e que apresentam um grau de dificuldade baixo, possibilitando a sua abordagem em vários momentos do período escolar.

Exemplo 5.2.1. Uma loja está fazendo uma promoção de CD-s e DVD-s. Cada CD custa R\$ 8,00 e cada DVD custa R\$ 12,00. Com R\$ 80,00, quais as possíveis quantidades de CD-s e de DVD-s que posso comprar, sabendo que vou comprar no mínimo 2 CD-s e 3 DVD-s?

Resolução: Resolver o problema significa resolver a equação $12D + 8C = 80$, onde D representa o número de DVD-s e C representa o número de CD-s comprados.

Iniciamos a resolução utilizando o dispositivo prático do algoritmo de Euclides

	1	2
12	8	4
4		

Logo,

$$4 = 12 - 8 \cdot 1$$

Pelo algoritmo de Euclides, temos que o $\text{mdc}(12, 8) = 4$, como $4 \mid 80$ então o problema tem solução. Assim

$$4 = 12 \cdot 1 + 8 \cdot (-1) \quad (20)$$

$$80 = 12 \cdot (20) + 8 \cdot (-20)$$

E a solução geral do problema é dado por:

$$D = 20 + \frac{8}{4}t \implies D = 20 + 2t, \text{ com } t \in \mathbb{Z} \text{ e}$$
$$C = -20 - \frac{12}{4}t \implies C = -20 - 3t, \text{ com } t \in \mathbb{Z}.$$

Usando as restrições do problema para calcular os valores possíveis de $t \in \mathbb{Z}$, temos

$$20 + 2t \geq 3 \text{ e } -20 - 3t \geq 2$$

$$2t \geq -17 \text{ e } -3t \geq 22$$

$$t \geq -\frac{17}{2} \text{ e } t \leq -\frac{22}{3}$$

$$t \geq -8 \text{ e } t \leq -8$$

Portanto, o único valor de t que satisfaz as duas equações é $t = -8$. Dessa maneira, se $t = -8$, temos que

$$D = 20 + 2 \cdot (-8) = 4$$

$$C = -20 - 3 \cdot (-8) = 4$$

Deste modo, concluímos que devo comprar 4 CD-s e 4 DVD-s com R\$ 80,00 que tenho.

Exemplo 5.2.2. - Em um pedágio, cada carro paga R\$ 7,00 e cada motocicleta paga R\$ 4,00. Sabendo que foi arrecadado em um certo período de tempo R\$ 142,00, calcule o maior número de carros e o maior número de motos possíveis que tenham passado neste pedágio.

Resolução

Vamos modelar o problema através de uma equação diofantina $7C + 4M = 142$, onde C é o número de carros e M é o número de motos.

Utilizando o algoritmo de Euclides temos que

$$\begin{array}{c|c|c|c} & 1 & 1 & 3 \\ \hline 7 & 4 & 3 & 1 \\ \hline 3 & 1 & & \end{array}$$

Pelo algoritmo acima temos que $1 = 4 - 3 \cdot 1$ e $3 = 7 - 4 \cdot 1$, e substituindo a segunda igualdade na primeira temos que $1 = 7 \cdot (-1) + 4 \cdot (2)$ o que implica $142 = 7 \cdot (-142) + 4 \cdot (284)$, de onde concluímos que as soluções gerais do problema são $C = -142 + 4t$ e $M = 284 - 7t$, com $t \in \mathbb{Z}$.

Como o número de carros e motos é maior do que zero, podemos definir os limites para a variável t .

$$\begin{array}{ll} -142 + 4t > 0 & 284 - 7t > 0 \\ 4t > 142 & 7t < 284 \\ t > \frac{142}{4} & t < \frac{284}{7} \\ t \geq 36 & t \leq 40 \end{array}$$

Deste modo o valor da variável t fica delimitado assim: $36 \leq t \leq 40$.

Analisando as sentenças gerais que determinam o número de carros e de motocicletas, podemos perceber que quanto maior o valor de t maior será o número de carros e menor o de motos, e quanto menor o valor de t o número de motos será máximo e o número de carros será mínimo, ou seja, quando $t = 40$ então $C = 18$ e $M = 4$ e quando $t = 36$ então $C = 2$ e $M = 32$. Desta forma concluímos que passou no máximo 18 carros ou no máximo 32 motos neste pedágio.

Exemplo 5.2.3. Para entrar em uma festa cada homem paga R\$ 18,00 e cada mulher paga R\$ 12,00. Sabendo que foram arrecadados R\$ 2652,00. Calcule a quantidade de homens e mulheres, sabendo que teve mais homens do que mulheres.

Resolução

Modelamos o problema através da equação diofantina $18H + 12M = 2652$, onde H representa o número de homens e M representa o número de mulheres. Iniciaremos a resolução através do dispositivo prático para calcular o $\text{mdc}(18, 12)$.

	1	2
18	12	6
6	1	

Utilizando o algoritmo de Euclides com os coeficientes da equação, encontramos $\text{mdc}(18, 12) = 6$ e também a combinação linear dos coeficientes que descreve o mdc dos coeficientes:

$$6 = 18 - 12 \cdot 1$$

$$6 = 18 \cdot (1) + 12 \cdot (-1)$$

$$2652 = 18 \cdot (442) + 12 \cdot (-442)$$

Usando a solução particular a acima, podemos determinar a solução geral da equação que é representada por:

$$H = 442 + \frac{12}{6}t = 442 + 2t, \text{ com } t \in \mathbb{Z} \text{ e}$$

$$M = -442 - \frac{18}{6}t = -442 - 3t, \text{ com } t \in \mathbb{Z}$$

Considerando que na festa estavam presentes mais homens do que mulheres, pode-

mos limitar o valor da variável t do seguinte modo:

$$442 + 2t > -442 - 3t$$

$$5t > -442 - 442$$

$$5t > -884$$

$$t > \frac{-884}{5}$$

$$t \geq -176$$

Como o menor valor de t que satisfaz as condições do problema é $t = -176$, temos que, se $t = -176$, então:

$$H = 442 + 2 \cdot (-176) = 442 - 352 = 90$$

$$M = -442 - 3 \cdot (-176) = -442 + 528 = 86$$

Então, estavam presentes 90 homens e 86 mulheres nesta festa.

5.3 Resolução de equações do tipo diofantinas com coeficientes racionais

Exemplo 5.3.1. Guardo em um cofre só moedas de R\$ 0,25 e R\$ 0,10. Quantas moedas são necessárias, no mínimo, tendo ao menos 6 moedas de cada valor, para que eu tenha R\$ 25,00?

Esta equação será resolvida, primeiramente, de maneira convencional, tornando os coeficientes da equação pertencente ao conjunto dos números inteiros. Note que para tornar os coeficientes inteiros basta dividir toda a equação pelo *mdc* generalizado dos coeficientes, que será o método usado na segunda maneira de resolução deste problema.

Resolução: 1º Maneira

O problema pode ser modelado através de uma equação com coeficientes racionais que serão transformados em números inteiros, assim obtendo uma equação diofantina

$$0,25X + 0,10Y = 25 \quad .(20)$$

$$5X + 2Y = 500$$

Utilizando o algoritmo de Euclides temos

$$\begin{array}{r|l|l} & 2 & 2 \\ \hline 5 & 2 & 1 \\ \hline 1 & & \end{array}$$

de onde segue, por cálculos já vistos, que

$$1 = 5 - 2 \cdot 2 \quad (\times 500)$$

$$500 = 5 \cdot (500) + 2 \cdot (-1000)$$

Assim, a solução geral da equação é dada por

$$X = 500 + 2t, \text{ com } t \in \mathbb{Z}$$

$$Y = -1000 - 5t, \text{ com } t \in \mathbb{Z}$$

Calcula-se agora os limites do valor de t possíveis de acordo com as exigências do problema.

$$500 + 2t \geq 6$$

$$2t \geq -494$$

$$t \geq -247$$

$$-1000 - 5t \geq 6$$

$$-5t \geq 1006$$

$$t \leq -\frac{1006}{5}$$

$$t \leq -201,20$$

$$t \leq -202$$

Analisando o problema percebe-se que o número mínimo de moedas ocorre quando $t = -202$. Dessa maneira,

$$X = 500 + 2 \cdot (-202) = 96 \text{ moedas}$$

$$Y = -1000 - 5 \cdot (-202) = 10 \text{ moedas}$$

Substituindo os valores encontrados na equação original, comprovamos a veracidade da resposta.

$$(0, 25) \cdot (96) + (0, 10) \cdot (10) = 24 + 1 = 25$$

Resposta: 96 moedas de 25 centavos e 10 moedas de 10 centavos.

Agora o problema será resolvido com os coeficientes pertencente ao conjunto dos números racionais e usando o conceito de *mdc* generalizado. Lembramos que dados dois números racionais, estes são comensuráveis.

Resolução: 2º Maneira

Pelo Teorema 4.1.2, temos que

$$\begin{aligned} mdcg(0, 25; 0, 10) &= mdcg\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{10}\right) = \\ \frac{mdc(1, 1)}{mmc(4, 10)} &= \frac{1}{20} = 0,05 \end{aligned}$$

Assim, utilizando o algoritmo de Euclides para encontrar o $mdcg$ como combinação linear dos coeficientes, temos a equação

$$0,05 = 0,25 + 0,10 \cdot (-2)$$

que multiplicada por 500 resulta

$$25 = 0,25 \cdot (500) + 0,10 \cdot (-1000)$$

Se pensarmos em uma resolução análoga ao Teorema 5.1 para os coeficientes racionais, teremos

$$\begin{aligned} X &= 500 + \frac{0,1}{0,05}t \\ Y &= -1000 - \frac{0,25}{0,05}t \end{aligned}$$

Então a "solução geral" da equação com coeficientes racionais é dada por

$$\begin{aligned} X &= 500 + 2t, \text{ com } t \in \mathbb{Z} \\ Y &= -1000 - 5t, \text{ com } t \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Podemos perceber que as soluções gerais encontradas são iguais as encontradas na primeira maneira de resolução. Portanto, sabendo que quanto maior a quantidade de moedas de R\$ 0,25 e menor a quantidade de moedas de R\$ 0,10, menor será o número de moedas totais, ou seja, usando a condição $y \geq 6$ temos que o número mínimo de moedas ocorre quando $t = -202$. Logo

$$X = 500 + 2 \cdot (-202) = 96 \text{ moedas e}$$

$$Y = -1000 - 5 \cdot (-202) = 10 \text{ moedas.}$$

O número mínimo de moedas deve ser 96 moedas de R\$ 0,25 e 10 moedas de R\$ 0,10.

Obs: o $\text{mdcg}(0,25; 0,10) = 0,05$ também poderia ter sido calculado através do dispositivo prático do algoritmo de Euclides, apenas tomando o cuidado para usar sempre valores inteiros para os quocientes. Neste caso o algoritmo foi usado apenas para encontrar o mdcg como combinação linear dos coeficientes da equação.

Exemplo 5.3.2. Quero distribuir igualmente maçãs e laranjas para 15 pessoas que conheço. Cada maçã custa R\$ 0,50 e cada laranja custa R\$ 0,75. Sabendo que disponho de R\$ 40,00 e vou comprar no mínimo 10 frutas de cada tipo, calcule o número máximo de frutas que cada pessoa irá receber.

Resolução: 1ª Maneira

Para resolver o problema deve-se achar uma equação diofantina equivalente a original, mas com coeficientes inteiros. Neste caso uma multiplicação de toda equação por 4 resolverá a situação. Atente ao fato de que este artifício usado equivale a dividir toda equação pelo mdc generalizado dos coeficientes racionais (isto será feito na 2ª maneira de resolução). Considerando M o número de maçãs e L o número de laranjas, temos

$$0,5M + 0,75L = 40 \quad (4)$$

$$2M + 3L = 160$$

Começamos a resolução com o dispositivo prático do algoritmo de Euclides. Temos que,

	1	2
3	2	1
1		

Assim, o $\text{mdc}(2, 3) = 1$, e o modo de escrevê-lo como combinação linear dos coeficientes e a solução geral da equação são dados por

$$\begin{aligned} 1 &= 2 \cdot (-1) + 3 \cdot (1) \quad .(160) \\ 160 &= 2 \cdot (-160) + 3 \cdot (160) \\ M &= -160 + 3t \\ L &= 160 - 2t, \text{ com } t \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Agora serão utilizadas as informações adicionais do problema para encontrar os valores da variável $t \in \mathbb{Z}$ que limitam o conjunto de soluções.

$$\begin{array}{ll} -160 + 3t \geq 10 & 160 - 2t \geq 10 \\ 3t \geq 170 & -2t \geq -150 \\ t \geq \frac{170}{3} & t \geq \frac{-150}{-2} \\ t \geq 57 & t \geq 75 \end{array}$$

Analisando os valores de t percebe-se facilmente que o maior número de frutas se dá quando $t = 75$.

$$\begin{aligned} M &= -160 + 225 = 65 \\ L &= 160 - 150 = 10 \end{aligned}$$

Portanto tem-se como resposta ao problema os valores de 65 laranjas e 10 maçãs, perfazendo assim um total de 75 frutas, que dividindo para 15 pessoas resulta em 5 frutas para cada pessoa.

Resolução: 2º Maneira

O mesmo problema será resolvido utilizando os coeficientes racionais e o conceito de mdc generalizado (mdcg), mas desta vez vamos encontrá-lo através do dispositivo prático do algoritmo de Euclides.

	1	2
0,75	0,50	0,25
0,25		

Procedendo de modo análogo a resolução de uma equação diofantina (com coeficientes inteiros), encontramos a solução geral da equação com coeficientes racionais.

$$0,25 = 0,75 + 0,5 \cdot (-1) \quad .(160)$$

$$40 = 0,5 \cdot (-160) + 0,75 \cdot (160)$$

$$M = -160 + \frac{0,75}{0,25}t$$

$$M = -160 + 3t, \text{ com } t \in \mathbb{Z}$$

$$L = 160 - \frac{0,5}{0,25}t$$

$$L = 160 - 2t, \text{ com } t \in \mathbb{Z}$$

Assim, encontramos a mesma solução geral que foi encontrada com o primeiro método de resolução, mas vamos calcular novamente os valores de $t \in \mathbb{Z}$ que delimitam o conjunto solução.

$$-160 + 3t \geq 10$$

$$160 - 2 \geq 10$$

$$3t \geq 170$$

$$-2t \geq -150$$

$$t \geq \frac{170}{3}$$

$$t \leq 75$$

$$t \geq 57$$

Utilizando $t = 75$ encontra-se o resultado procurado:

$$M = 65 \text{ maçãs}$$

$$L = 10 \text{ laranjas}$$

Portanto o total será de 75 frutas que divididos por 5 pessoas resulta em 15 frutas para cada pessoa.

Obs: Observe que o valor $t = 57$ substituído na solução geral fornece o valor mínimo possível de frutas.

$$t = 57 \longrightarrow M = 11 \text{ e } L = 46$$

Exemplo 5.3.3. O conteúdo de um barril de vinho de 600 litros será distribuído em garrafas de 0,9l e de 1,5l. Determine qual o maior e o menor número de garrafas que serão utilizadas, sabendo que devem ser usadas no mínimo 100 garrafas de cada quantidade.

Resolução

A equação do tipo diofantina que podemos extrair do problema é $0,9X + 1,5Y = 600$.

O problema será resolvido de maneira convencional, utilizando o conjunto dos números inteiros como coeficientes. Para isso, basta multiplicar a equação acima por 10 e dividir por 3 (ou multiplicar por $\frac{10}{3}$) para que $\text{mdc}(a, b)$ seja igual a 1, para facilitar os cálculos. Considerando X como sendo o número de garrafas de 0,9l e Y como sendo o número de garrafas de 1,5l, podemos escrever a seguinte equação diofantina:

$$0,9X + 1,5Y = 600 \quad .(10)$$

$$9X + 15Y = 6000 \quad \div (3)$$

$$3X + 5Y = 2000$$

Utilizando o algoritmo de Euclides encontra-se as soluções gerais do problema.

	1	1	2
5	3	2	1
2	1		

$$1 = 3 - 2.1 \quad (5.2)$$

$$2 = 5 - 3.1 \quad (5.3)$$

Substituindo (5.3) em (5.2) temos:

$$1 = 3 - 1.(5 - 3.1) = 5.(-1) + 3.2$$

$$1 = 3.2 + 5.(-1) \quad .(2000)$$

$$2000 = 3.(4000) + 5.(-2000)$$

E a solução geral é $X = 4000 + 5t$ e $Y = -2000 - 3t$, com $t \in \mathbb{Z}$.

Como o número mínimo de cada garrafa deve ser 100 unidades, é preciso restringir os valores de t .

$$\begin{array}{ll} 4000 + 5t \geq 100 & -2000 - 3t \geq 100 \\ 5t \geq -3900 & -3t \geq 2100 \\ t \geq -780 & t \leq \frac{2100}{-3} \\ & t \leq -700 \end{array}$$

O cálculo acima mostra que os valores de t que satisfazem as condições do problema são $-780 \leq t \leq -700$.

Quanto maior o valor de t , maior será o valor de garrafas de $0,9l$ e menor o valor de garrafas de $1,5l$, ou seja, quando $t = -700$. Substituindo este valor na solução geral temos:

$$\begin{aligned} X &= 4000 + 5 \cdot (-700) \longrightarrow X = 500 \\ Y &= -2000 - 3 \cdot (-700) \longrightarrow Y = 100 \end{aligned}$$

E quanto menor o valor de t , maior será o valor de garrafas de $1,5l$ e menor será o valor de garrafas de $0,9l$, ou seja, quando $t = -780$. Assim,

$$\begin{aligned} X &= 4000 + 5 \cdot (-780) \longrightarrow X = 100 \\ Y &= -2000 - 3 \cdot (-780) \longrightarrow Y = 340 \end{aligned}$$

Portanto as duas possibilidades exigidas no problema são: 500 garrafas de $0,9l$ e 100 de $1,5l$ ou 100 garrafas de $0,9l$ e 340 de $1,5l$.

Agora o problema será resolvido usando a noção de *mdc* generalizado. Segue que,

$$mdcg\left(\frac{9}{10}, \frac{15}{10}\right) = mdcg\left(\frac{9}{10}, \frac{3}{2}\right) = \frac{mdc(9, 3)}{mmc(10, 2)} = \frac{3}{10} = 0,3$$

Pensando como no Teorema 5.1, já que $\text{mdc}(0,9;1,5) = 0,3$ divide 600, então o problema tem solução. Usando um análogo ao algoritmo de Euclides com os coeficientes racionais tem-se que:

$$\begin{array}{c|c|c|c} & 1 & 1 & 2 \\ \hline 1,5 & 0,9 & 0,6 & 0,3 \\ \hline 0,6 & 0,3 & & \end{array}$$

$$0,3 = 0,9 - 0,6 \cdot 1$$

$$0,6 = 1,5 - 0,9 \cdot 1$$

Fazendo as devidas substituições e utilizando o mesmo método que determina a solução geral de uma equação diofantina para solucionar esta equação com coeficientes racionais temos:

$$0,3 = 0,9 - 1 \cdot (1,5 - 0,9 \cdot 1)$$

$$0,3 = 0,9 \cdot 2 + 1,5 \cdot (-1) \quad \cdot (2000)$$

$$600 = 0,9 \cdot (4000) + 1,5 \cdot (-2000)$$

$$X = 4000 + \frac{1,5}{0,3}t$$

$$X = 4000 + 5t, \text{ com } t \in \mathbb{Z}$$

$$Y = -2000 - \frac{0,9}{0,3}t$$

$$Y = -2000 - 3t, \text{ com } t \in \mathbb{Z}$$

Como as soluções gerais encontradas são iguais àsquelas encontradas na primeira resolução do problema, conclui-se que as respostas serão as mesmas, ou seja, 500 garrafas de 0,9l e 100 de 1,5l ou 100 garrafas de 0,9l e 340 de 1,5l.

Exemplo 5.3.4. Um caminhão transporta telhas e tijolos de uma fábrica. Sabe-se que cada tijolo tem 0,5 Kg de massa e cada telha tem 2,8 Kg. O peso líquido máximo que o caminhão pode transportar é de 18000 Kg. Sabendo que em cada carga deve-se ter no mínimo 1000 tijolos e 1000 telhas, descubra qual a quantidade máxima e a quantidade mínima de cada produto que poderá ser transportado.

Resolução

Vamos criar a equação do tipo diofantina para o problema com c sendo o número de telha e l sendo o número de tijolo. Esta equação é $2,8c + 0,5l = 18000$. Agora vamos calcular o $mdcg$ dos coeficientes.

$$mdcg(2,8;0,5) = mdcg\left(\frac{14}{5}, \frac{1}{2}\right) = \frac{mdc(14,1)}{mmc(5,2)} = \frac{1}{10} = 0,1$$

Utilizando um análogo do algoritmo de Euclides encontramos o $mdcg$ como combinação linear dos coeficientes da equação.

	5	1	1	2
2,8	0,5	0,3	0,2	0,1
0,3	0,2	0,1		

$$0,1 = 0,3 - (0,2).1$$

$$0,2 = 0,5 - (0,3).1$$

$$0,3 = 2,8 - (0,5).5$$

Fazendo as devidas substituições das equações acima temos:

$$0,1 = 0,3 - (0,5 - 0,3) = (0,3).2 - 0,5$$

$$0,1 = 2.(2,8 - 0,5.5) - 0,5$$

$$0,1 = 2,8.(2) + 0,5(-11) \quad .(180000)$$

$$18000 = 2,8.(360000) + 0,5.(-1980000)$$

E, de modo semelhante aos cálculos realizados anteriormente, encontramos a solução

geral do problema:

$$\begin{aligned}c &= 360000 + \frac{0,5}{0,1}t \\c &= 360000 + 5t \quad , \text{com } t \in \mathbb{Z} \\l &= -1980000 - \frac{2,8}{0,1}t \\l &= -1980000 - 28t \quad , \text{com } t \in \mathbb{Z}\end{aligned}$$

Vamos restringir os possíveis valores da variável t de acordo com as condições do problema.

$$\begin{array}{ll}360000 + 5t \geq 1000 & -1980000 - 28t \geq 1000 \\5t \geq -359000 & -28t \geq 1981000 \\t \geq -71800 & t \leq -\frac{1981000}{28} \\ & t \leq -70750\end{array}$$

Par encontrar os valores procurados da carga mínima e da carga máxima, procedemos da seguinte maneira.

Carga mínima	Carga máxima
$t = -70750$	$t = -71800$
$c = 360000 - 353750$	$c = 36000 - 359000$
$c = 6250$ telhas	$c = 1000$ telhas
$l = -1980000 + 1981000$	$l = 1980000 + 2010400$
$l = 1000$ tijolos	$l = 30400$ tijolos

Portanto as respostas do problema são: carga mínima com 6250 telhas e 1000 tijolos, perfazendo um total de 7250 objetos e carga máxima com 1000 telhas e 30400 tijolos, perfazendo um total de 31400 objetos.

O problema acima pode em alguma turma da educação básica "assustar os alunos" devido aos altos valores das soluções c_0 , l_0 e também da variável t . Mas vale lembrar que existem infinitas soluções gerais de uma equação diofantina, e pode ser encontrado uma solução geral que tenha os valores de x_0 e y_0 bem menores e com isto os limites

da variável t também se tornam menores. Para exemplificar isto, se precisássemos calcular outras quantidades de telhas e de tijolos poderíamos usar os valores encontrados na carga mínima para montar a nova solução geral de c e de l e que ficaria $c = 6250 + 5t$ e $l = 1000 - 28t$, com $t \in \mathbb{Z}$, ou também usando valores para t na faixa de -70000 à -72000 que possibilitam encontrar valores bem menores para a solução inicial e deste modo sendo possível ajustar a solução geral de acordo com necessidade e desenvolvimento da turma em que este conteúdo está sendo trabalhado.

Exemplo 5.3.5. Uma fábrica produz 12500 litros de iogurte por dia. Este iogurte é embalado em potes com capacidade de 12,5 litros e em bombonas de 37,5 litros. Sabendo que, no mínimo 30% da produção é colocado em potes e no mínimo 40% da produção é colocada nas bombonas. Determine o número máximo de potes ou bombonas que podem ser utilizadas diariamente.

Resolução

Resolveremos do problema usando o conceito de $mdcg$. Tomando B como sendo o número de bombonas e P para representar o número de potes, faremos a modelagem do problema e o cálculo do $mdcg(37,5; 12,5)$.

$$\begin{aligned} 37,5B + 12,5P &= 12500 \\ mdcg(37,5; 12,5) &= mdcg\left(\frac{375}{10}, \frac{125}{10}\right) = \\ mdcg\left(\frac{75}{2}, \frac{25}{2}\right) &= \frac{mdc(75, 25)}{mmc(2, 2)} = \frac{25}{2} = 12,5 \end{aligned}$$

Como $mdcg(37,5; 12,5) = 12,5$ divide 12500 então, o problema tem solução e uma maneira de resolvê-lo é dividir toda equação por 12,5 para que os coeficientes pertençam

ao conjunto dos inteiros.

$$37,5B + 12,5P = 12500 \quad \div (12,5)$$

$$3B + 1P = 1000$$

$$1 = 3 + 1 \cdot (-2) \quad \cdot (1000)$$

$$1000 = 3 \cdot (1000) + 1 \cdot (-2000)$$

$$B = 1000 + 1t \quad e$$

$$P = -2000 - 3t, \quad \text{com } t \in \mathbb{Z}$$

Como 30% da produção é colocado em potes e 40% no mínimo é colocada em bombonas, o valor de t pode ser restringido do seguinte modo.

$$30\% = \frac{30}{100} = \frac{3}{10}$$

$$\frac{3}{10} \cdot 12500 = 3750 \rightarrow 3750 \div 12,5 = 300$$

$$-2000 - 3t \geq 300$$

$$-3t \geq 2300$$

$$t \leq -\frac{2300}{3} = -766,66\dots$$

$$t \leq -767$$

$$40\% = \frac{4}{10}$$

$$\frac{4}{10} \cdot 12500 = 6000 \rightarrow 6000 \div 37,5 = 160$$

$$1000 + 1t \geq 160$$

$$t \geq -840$$

O maior número de potes será expresso quando for usado o menor valor de t , ou seja $t = -840$. Se $t = -840$ temos,

$$B = 1000 - 840 = 160 \quad \text{bombonas}$$

$$P = -2000 - 3 \cdot (-840) = 520 \quad \text{potes}$$

Então é necessário, neste caso, 520 potes de 12,5 litros e 160 bombonas de 37,5 litros.

O maior número de bombonas será encontrado com o uso do maior valor de t possível, ou seja, $t = -767$. Neste caso teremos,

$$\begin{aligned} B &= 1000 - 767 = 233 \text{ bombonas} \\ P &= -2000 - 3 \cdot (-767) = 301 \text{ potes} \end{aligned}$$

Portanto o maior número de bombonas de 37,5 litros de capacidade será de 233 e para está situação devemos ter 301 potes de 12,5 litros de capacidade.

O exemplo acima mostra uma curiosidade importante. Embora a equação original com coeficientes racionais tenha sido transformada em uma equação diofantina, temos o fato de que para realizar esta transformação na equação foi necessário dividir toda a equação pelo *mdc* generalizado dos coeficientes racionais e isto pode ser feito em qualquer equação do mesmo formato, mostrando a importância da noção construída sobre o máximo divisor comum generalizado (*mdcg*) não só para a resolução de equações do tipo diofantinas lineares com coeficientes racionais mas também para a simplificação destas equações para que esta possa ser resolvida através dos métodos convencionais conhecidos.

Exemplo 5.3.6. Um certo casal de coelhos produz $\frac{1}{3}$ de seus filhotes com pelagem cinza. Um outro casal de coelhos produz $\frac{1}{5}$ de seus filhotes com pelagem cinza. Sabendo que o total de coelhos de pêlos cinza em um determinado período de fertilidade é de 30 filhotes, calcule a quantidade mínima e a quantidade máxima de coelhos que nasceram nesse período.

Obs. : Cada casal teve no mínimo mais de 5 coelhos, e a probabilidade se mantém constante a cada ninhada, ou seja, pressupõe que o número de coelhos da ninhada do casal c_1 seja múltiplo de 3 e do casal c_2 seja múltiplo de 5.

Resolução

Modelando o problema através de uma equação do tipo diofantina e fazendo o cálculo do *mdcg* podemos chegar à solução facilmente.

$$\begin{aligned}\frac{1}{3}c_1 + \frac{1}{5}c_2 &= 30 \\ \text{mdcg} \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{5} \right) &= \frac{\text{mdc}(1, 1)}{\text{mmc}(3, 5)} = \frac{1}{15} \\ 1 &= \frac{1}{3} \cdot (-15) + \frac{1}{5} \cdot (30) \quad .(30) \\ 30 &= \frac{1}{3} \cdot (-450) + \frac{1}{5} \cdot (900)\end{aligned}$$

Portanto a solução geral é dada por:

$$\begin{aligned}c_1 &= -450 + \frac{1}{15}t \\ c_1 &= -450 + 3t, \text{ com } t \in \mathbb{Z} \\ c_2 &= 900 - \frac{3}{15}t \\ c_2 &= 900 - 5t, \text{ com } t \in \mathbb{Z}\end{aligned}$$

Utilizando as informações do problema, conseguimos restringir os valores de $t \in \mathbb{Z}$ e encontrar a solução desejada:

$$\begin{array}{ll} -450 + 3t > 5 & 900 - 5t > 5 \\ 3t > 455 & -5t > -895 \\ t > \frac{455}{3} & t < \frac{895}{5} \\ t \geq 152 & t < 179 \\ & t \leq 178 \end{array}$$

O valor de $t = 152$ determina o número máximo de filhotes :

$$\begin{aligned}c_1 &= -450 + 456 = 6 \\ c_2 &= 900 - 760 = 140\end{aligned}$$

O valor de $t = 178$ determina o menor número de filhotes :

$$c_1 = -450 + 534 = 84$$

$$c_2 = 900 - 890 = 10$$

Portanto o número máximo de filhotes de coelhos nascidos neste período será 146 e o número mínimo será 94 filhotes.

Exemplo 5.3.7. Um agricultor deve fazer uma plantação de eucaliptos e pinus. Cada muda de eucalipto custa R\$ 0,40 e cada muda de pinus custa R\$ 0,75. Sabendo que o agricultor dispõe de R\$ 3500,00 para comprar mudas e que irá plantar no mínimo 1000 mudas de cada espécie. Qual é o número máximo e o número mínimo de mudas que se pode comprar?

Resolução

Para montar a equação do tipo diofantina que modela o problema usaremos P para representar o número de mudas de pinus e E representando o número de mudas de eucalipto. A equação procurada é $0,75P + 0,40E = 3500$

Utilizando o formato análogo do algoritmo de Euclides para calcular o $mdcg(0,75; 0,4)$ temos:

	1	1	7
0,75	0,4	0,35	0,05
0,35	0,05		

$$0,05 = 0,40 - 0,35.1$$

$$0,35 = 0,75 - 0,40.1$$

Fazendo as devidas substituições tem-se que:

$$0,05 = 0,40 - 1.(0,75 - 0,40)$$

$$0,05 = 0,75.(-1) + 0,40.(2) \quad .(20)$$

$$1 = 0,75(-20) + 0,40.(40) \quad .(3500)$$

$$3500 = 0,75(-70000) + 0,40(140000)$$

Usando a solução particular acima podemos encontrar a solução geral do problema.

$$P = -70000 + \frac{0,4}{0,05}t$$

$$P = -70000 + 8t, \text{ com } t \in \mathbb{Z}$$

$$E = 140000 - \frac{0,75}{0,05}t$$

$$E = 140000 - 15t, \text{ com } t \in \mathbb{Z}$$

Agora vamos usar as informações do problema para delimitar os possíveis valores de t que fornecem as respostas exigidas no problema.

$$-70000 + 8t \geq 1000$$

$$8t \geq 71000$$

$$t \geq \frac{71000}{8}$$

$$t \geq 8875$$

$$140000 - 15t \geq 1000$$

$$-15t \geq -139000$$

$$t \leq \frac{-139000}{-15}$$

$$t \leq 9266,66..$$

$$t \leq 9266$$

Analisando os valores extremos da variável t , o número máximo de mudas ocorrerá quando $t = 8875$.

$$P = -70000 + 8.(8875)$$

$$P = -70000 + 71000 = 1000$$

$$E = 140000 - 15.(8875)$$

$$E = 140000 - 133125 = 6875$$

$$E = 6875$$

Total = 7875 mudas

Agora , o número mínimo de mudas ocorrerá quando $t = 9266$.

$$P = -70000 + 8.(9266)$$

$$P = -70000 + 74128 = 4128$$

$$E = 140000 - 15.(9266)$$

$$E = 140000 - 138990$$

$$E = 1010$$

Total = 5138 mudas

Portanto a quantidade máxima de mudas que poderão ser plantadas é 7875 mudas, e o número mínimo será de 5138 mudas.

Exemplo 5.3.8. Em uma loja de roupas e sapatos o imposto que incide em cada mercadoria é diferente. Sobre o item roupa (R) é cobrado imposto de 35 % e sobre os produtos do grupo sapatos (S) a carga tributária total é de 30 % sobre o total vendido. Sabendo que em um certo período de tempo esta loja pagou R\$5750,00 de imposto calcule o valor máximo e o valor mínimo de vendas desta loja supondo que exista roupas e sapatos de qualquer valor.

Resolução

Primeiro calculamos o *mdcg* dos coeficientes da equação e depois encontramos a

solução geral do problema.

$$\begin{aligned} \frac{35}{100} \cdot R + \frac{30}{100} \cdot S &= 5750 \\ mdcg(0, 35; 0, 3) = mdcg\left(\frac{7}{20}, \frac{3}{10}\right) &= \frac{mdc(7, 3)}{mmc(20, 10)} = \frac{1}{20} = 0,05 \\ 0,05 &= 0,35 \cdot 1 + 0,30 \cdot (-1) \quad \cdot (115000) \\ 5750 &= 0,35 \cdot (115000) + 0,30 \cdot (-115000) \\ R &= 115000 + \frac{0,3}{0,05} t \\ R &= 115000 + 6t, \text{ com } t \in \mathbb{Z} \\ S &= -115000 - \frac{0,35}{0,05} t \\ S &= -115000 - 7t, \text{ com } t \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Encontrando os valores da variável t .

$$\begin{aligned} 115000 + 6t &\geq 0 & -115000 - 7t &\geq 0 \\ 6t &\geq -115000 & -7t &\geq 115000 \\ t &\geq -\frac{115000}{6} & t &\leq \frac{-115000}{7} \\ t &\geq -19166 & t &\leq -16429 \end{aligned}$$

Valor máximo de vendas quando $t = -19166$.

$$\begin{aligned} R &= 115000 + 6 \cdot (-19166) \\ R &= 115000 - 114996 = 4 \\ S &= -115000 - 7 \cdot (-19166) \\ S &= -115000 + 134162 = 19162 \end{aligned}$$

Total = R\$ 19166,00

Valor mínimo de vendas quando $t = -16429$.

$$R = 115000 + 6.(-16429)$$

$$R = 16426$$

$$S = -115000 - 7.(-16429)$$

$$S = -11500 + 115003 = 3$$

Total = R\$ 16429,00

Exemplo 5.3.9. Em uma livraria o custo de impressão simples (preto e branco) é de R\$ 0,15 e uma impressão colorida é de R\$ 0,35. Qual o número máximo de impressões feitas em um dia, sabendo que o total arrecadado foi R\$ 40,00.

Resolução

Montamos a equação do tipo diofantina e após efetuamos o cálculo do *mdc* generalizado.

$$\begin{aligned} 0,35C + 0,15P &= 40 \\ mdcg(0,35; 0,15) &= mdcg\left(\frac{35}{100}, \frac{15}{100}\right) = \\ mdcg\left(\frac{7}{20}, \frac{3}{20}\right) &= \frac{mdc(7, 3)}{mmc(20, 20)} = \frac{1}{20} = 0,05 \end{aligned}$$

Como $mdcg\left(\frac{7}{20}, \frac{3}{20}\right)$ divide 40, o problema tem solução.

Como já se conhece o *mdcg*, um análogo do algoritmo de Euclides é usado para que seja possível escrever o *mdcg* como combinação linear dos coeficientes racionais do problema.

	2	3
0,35	0,15	0,05
0,05		

$$\begin{aligned} 0,05 &= 0,35 \cdot (1) + 0,15 \cdot (-2) \quad \cdot \left(\frac{40}{0,05} \right) = 800 \\ 40 &= 0,35 \cdot (800) + 0,15 \cdot (-1600) \end{aligned}$$

Agora conseguimos encontrar a solução geral do problema.

$$\begin{aligned} C &= 800 + \frac{0,15}{0,05}t \\ C &= 800 + 3t \quad , \text{com } t \in \mathbb{Z} \\ P &= -1600 - \frac{0,35}{0,05}t \\ P &= -1600 - 7t \quad , \text{com } t \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

O número máximo de impressões será dada quando o número de impressões coloridas for mínimo, ou seja:

$$\begin{aligned} 800 + 3t &\geq 0 \\ 3t &\geq -800 \\ t &\geq -\frac{800}{3} \\ t &\geq -266 \end{aligned}$$

O resultado esperado obtém-se tomando $t = -266$ e o substituindo na solução geral.

$$\begin{aligned} C &= 800 + 3(-266) = 2 \\ P &= -1600 - 7 \cdot (-266) \\ P &= -1600 + 1862 = 262 \end{aligned}$$

Portanto o número máximo de impressões foi 264 cópias, sendo 262 em preto e branco e 2 coloridas.

Exemplo 5.3.10. Um fazendeiro precisa vacinar o seu rebanho de gado e cavalos para prevenção de algumas doenças. Sabe-se que o número de gado é maior que o número de

cavalos e que a dosagem para bois é de 9,5 ml e para cada equino a dosagem é de 12,8 ml do medicamento. Foram gastos 2000 frascos de 20 ml. Calcule o número de gado e de cavalos deste rebanho, sabendo que a diferença entre eles é a mínima possível.

Resolução

$$12,8C + 9,5B = 40000 = 2000 \cdot 20$$

Cálculo do $mdcg(12,8; 9,5)$ através da fórmula.

$$\begin{aligned} mdcg\left(\frac{128}{10}, \frac{95}{10}\right) &= mdcg\left(\frac{64}{5}, \frac{19}{2}\right) = \\ \frac{mdc(64, 19)}{mmc(5, 2)} &= \frac{1}{10} = 0,1 \end{aligned}$$

Como o $mdcg$ divide 40000 o problema tem solução.

Será usado o algoritmo de Euclides para escrever o $mdcg(12,8; 9,5) = 0,1$ como combinação linear dos coeficientes.

	1	2	1	7	4
12,8	9,5	3,3	2,9	0,4	0,1
3,3	2,9	0,4	0,1		

$$0,1 = 2,9 - 0,4 \cdot 7$$

$$0,4 = 3,3 - 2,9 \cdot 1$$

$$2,9 = 9,5 - 3,3 \cdot 2$$

$$3,3 = 12,8 - 9,5 \cdot 1$$

Fazendo as substituições das sentenças acima chegamos no seguinte resultado :

$$\begin{aligned}
 0,1 &= 2,9 - 7.(3,3 - 2,9.1) = 2,9.8 - 7.3,3 = \\
 0,1 &= 8.(9,5 - 3,3.2) - 7.3,3 = 8.9,5 - 23.3,3 = \\
 0,1 &= 8.9,5 - 23.(12,8 - 1.9,5) = 12,8.(-23) + 9,5.(31) \\
 0,1 &= 12,8.(-23) + 9,5.(31) \quad .(400000) \\
 40000 &= 12,8.(-920000) + 9,5.(12400000) \\
 C &= -9200000 + 95t \quad ,com \ t \in \mathbb{Z} \\
 B &= 12400000 - 128t \quad ,com \ t \in \mathbb{Z}
 \end{aligned}$$

Agora é hora de usar as informações adicionais:

$$\begin{aligned}
 B &> C \\
 12400000 - 128t &> -9200000 + 95t \\
 t &\leq 96860
 \end{aligned}$$

Substituindo o valor de t na solução geral encontramos os valores procurados.

$$\begin{aligned}
 C &= -9200000 + 95.(96860) = 1700 \text{ cavalos} \\
 B &= 12400000 - 128.(96860) = 1920 \text{ bois}
 \end{aligned}$$

Ou seja, a fazenda é composta por 1700 cavalos e 1920 bois.

Exemplo 5.3.11. Em uma construção o pedreiro João coloca em média $2,5 m^2$ de azulejo por hora enquanto o outro pedreiro Paulo consegue colocar $3,2 m^2$ de azulejo no mesmo período de tempo. Durante o período da construção Paulo faltou alguns dias o serviço, de modo que no final da obra, a diferença entre a produção dos dois pedreiros era a mínima possível. Sabendo que no total foram colocados $800 m^2$ de azulejo, calcule a quantidade de azulejos em m^2 que cada pedreiro colocou, quantas horas cada um trabalhou e quem colocou mais azulejos nesta construção.

Resolução

Vamos chamar de P o número de horas trabalhadas por Paulo e J o número de horas trabalhadas por João e assim construímos a equação

$$3,2P + 2,5J = 800$$

Calculamos agora o $mdcg$ dos coeficientes da equação.

$$mdcg\left(\frac{32}{10}, \frac{25}{10}\right) = mdcg\left(\frac{16}{5}, \frac{5}{2}\right) = \frac{mdc(16, 5)}{mmc(5, 2)} = \frac{1}{10} = 0,1$$

Como $mdcg(3, 2; 2, 5) = 0,1$ divide 800 então o problema tem solução. Será usado o algoritmo de Euclides para encontrar a combinação linear entre os coeficientes que expressa o mdc generalizado.

	1	3	1	1	3
3,2	2,5	0,7	0,4	0,3	0,1
0,7	0,4	0,3	0,1		

$$0,1 = 0,4 - 0,3 \cdot 1$$

$$0,3 = 0,7 - 0,4 \cdot 1$$

$$0,4 = 2,5 - 0,7 \cdot 3$$

$$0,7 = 3,2 - 2,5 \cdot 1$$

Substituindo uma expressão na outra encontramos o $mdcg$ como combinação linear

dos coeficientes da equação:

$$\begin{aligned}
 0,1 &= 0,4 - 1.(0,7 - 0,4.1) \\
 &= 2,5 - 0,7.3 - 1.(0,7 - 2,5 + 0,7.3) \\
 &= 2,5.2 + 0,7.(-7) = 2,5.2 - 7.(3,2 - 2,5.1) \\
 &= 3,2.(-7) + 2,5.(9) \\
 0,1 &= 3,2.(-7) + 2,5.(9) \quad .(8000) \\
 800 &= 3,2.(-56000) + 2,5.(72000) \\
 P &= -56000 + 25t \quad e \\
 J &= 72000 - 32t \quad ,com \quad t \in \mathbb{Z}
 \end{aligned}$$

Como a diferença entre P e J deve ser mínima, e sabe-se que Paulo trabalhou menos que João, deve-se proceder da seguinte maneira :

$$\begin{aligned}
 -56000 + 25t &< 72000 - 32t \\
 57t &< 128000 \\
 t &< \frac{128000}{57} = 2245,61
 \end{aligned}$$

O valor inteiro de t menor que 2245,61 é $t = 2245$, ou seja, usando $t = 2245$ obteremos os valores procurados.

$$\begin{aligned}
 P &= -56000 + 25.2245 \\
 P &= -56000 + 56125 = 125 \\
 J &= 72000 - 32.2245 \\
 J &= 72000 - 71840 = 160
 \end{aligned}$$

Agora sabemos que Paulo trabalhou 125 horas e João trabalhou 160 horas. Falta descobrir a quantidade de área que cada pedreiro cobriu com azulejo e quem colocou mais azulejo e, para isso devemos usar os valores obtidos acima.

$$3,2.125 = 400$$

$$2,5.160 = 400$$

O resultado é impressionante. Os dois colocaram a mesma quantidade de azulejos.

Exemplo 5.3.12. Em um posto de combustível o preço da gasolina é R\$ 2,89 o litro e o preço do óleo diesel é R\$ 2,39 o litro. Em um dia foram arrecadados R\$ 5000,00 com a venda de combustível. Calcule o total de litros de gasolina e óleo diesel vendidos, sabendo que foi vendido mais gasolina do que diesel, mas a diferença foi a mínima possível.

Resolução

Usando G para representar a quantidade de litros de gasolina e D para a quantidade de litros de óleo diesel vendidos, podemos encontrar uma equação do tipo diofantina mas com coeficientes racionais para solucionar o problema.

$$2,89G + 2,39D = 5000$$

$$mdcg(2,89; 2,39) = mdcg\left(\frac{289}{100}, \frac{239}{100}\right) = \frac{mdc(289, 239)}{mmc(100, 100)} = \frac{1}{100} = 0,01$$

Como o $mdcg(2,89; 2,39) = 0,01$ divide 5000, então o problema tem solução e podemos usar o algoritmo de Euclides para encontrar o $mdcg$ dos coeficientes como combinação linear dos coeficientes da equação.

	1	4	1	3	1	1	5
2,89	2,39	0,5	0,39	0,11	0,06	0,05	0,01
0,5	0,39	0,11	0,06	0,05	0,01		

$$\begin{aligned}
0,01 &= 0,06 - 0,05 \\
0,05 &= 0,11 - 0,06 \\
0,06 &= 0,39 - 3 \cdot 0,11 \\
0,11 &= 0,5 - 0,39 \\
0,39 &= 2,39 - 4 \cdot 0,5 \\
0,5 &= 2,89 - 2,39
\end{aligned}$$

Substituindo uma equação na outra chegamos na solução geral procurada:

$$\begin{aligned}
0,01 &= 0,06 - (0,11 - 0,06) = 0,06 \cdot 2 - 0,11 \\
&= 2 \cdot (0,39 - 3 \cdot 0,11) - 0,11 = 2 \cdot 0,39 - 7 \cdot 0,11 \\
&= 2 \cdot 0,39 - 7 \cdot (0,5 - 0,39) = 9 \cdot 0,39 - 7 \cdot 0,5 \\
&= 9 \cdot (2,39 - 4 \cdot 0,5) - 7 \cdot 0,5 = 9 \cdot 2,39 - 43 \cdot 0,5 \\
&= 9 \cdot 2,39 - 43 \cdot (2,89 - 2,39)
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned}
0,01 &= 2,89 \cdot (-43) + 2,39(52) \quad \cdot (500000) \\
5000 &= 2,89 \cdot (21500000) + 2,39 \cdot (26000000).
\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
G &= -21500000 + \frac{2,39}{0,01}t \\
G &= -21500000 + 239t \quad , \text{com } t \in \mathbb{Z} \\
D &= 26000000 - \frac{2,89}{0,01}t \\
D &= 26000000 - 289t \quad , \text{com } t \in \mathbb{Z}
\end{aligned}$$

Usando as restrições do problema, temos:

$$-21500000 + 239t > 26000000 - 289t$$

$$528t > 47500000$$

$$t \geq 89963$$

$$G = -21500000 + 239.89963 = 1157$$

$$D = 26000000 - 289.89963 = 693$$

Portanto, foram vendidos 1157 litros de gasolina e 693 litros de óleo diesel.

Usando a solução geral do problema acima e usando um valor de t escolhido de modo a facilitar os cálculos, podemos resolver a parte final do problema do seguinte modo:

$$G = -21500000 + 239t, \text{ com } t \in \mathbb{Z}$$

$$D = 26000000 - 289t$$

$$239t - 21500000 = 0$$

$$239t = 21500000$$

$$t \sim 89958$$

Usando $t = 89958$ tem-se que

$$G = -21500000 + 239.89958 = -38$$

$$D = 26000000 - 289.89958 = 2138$$

Como $G = -38$ e $D = 2138$ formam uma solução do problema, podemos escrever a solução geral, como sendo:

$$G = -38 + 239t$$

$$D = 2138 - 289t$$

E utilizando esta solução geral mais simples encontramos a resposta procurada mais facilmente:

$$-38 + 239t > 2138 - 289t$$

$$528t > 2176$$

$$t \geq 5$$

$$G = -38 + 239.5 = 1157$$

$$D = 2138 - 289.5 = 693$$

Esta transformação que foi feita na solução geral do problema para trabalhar com valores de $t \in \mathbb{Z}$ menores e com uma equação mais simples, pode ser feita em qualquer equação diofantina ou do tipo diofantina, e facilitará expressivamente os cálculos naquelas equações em que seja necessário saber mais de um valor de t , ou seja, aqueles problemas em que se deseja saber mais de uma possibilidade de solução.

6 Relação entre equações diofantinas e conteúdos da educação básica

6.1 Relação entre equações diofantinas e função afim

Ao estudarmos as equações diofantinas lineares em duas variáveis é inevitável a comparação das mesmas com uma função polinomial do 1º grau (ou função afim), pois toda função afim pode ser escrita da forma $ax + by = c$, com $a, b, c, x, y \in \mathbb{R}$.

Contudo, esta comparação deve ser efetuada com muito cuidado, devido aos conjuntos numéricos distintos em que são trabalhados uma equação diofantina e uma função afim. É correto afirmar, por exemplo, que toda equação diofantina linear com duas variáveis representa uma função afim que tenha a restrição das variáveis x e y pertencerem ao conjunto dos números inteiros (\mathbb{Z}) (ou seja, representa um conjunto de pontos que estão alinhados no plano) ou que ao se permitir que as variáveis x e y de uma equação diofantina pertençam ao conjunto dos números reais (\mathbb{R}) obtém-se uma função afim. Porém, não é verdade que toda função afim representa uma equação diofantina, e para mostrar isto basta tomar os coeficientes $a, b \in \mathbb{I}^1$.

Desse modo podemos pensar na solução de uma equação diofantina como sendo o conjunto de pontos, da função afim que tenha os mesmos coeficientes da equação $ax + by = c$, que tenha ambas as coordenadas pertencente ao conjunto dos números inteiros.

Para esclarecer melhor estas diferenças citadas acima, vamos analisar um exemplo através da sua resolução e sua representação geométrica no plano cartesiano.

¹ \mathbb{I} = conjunto dos números irracionais. Usamos o conjunto \mathbb{I} como exemplo para permitir o uso dos coeficientes racionais na equação diofantina, que foi visto ao longo do desenvolvimento deste trabalho.

Exemplo 6.1.1. Encontre a solução geral da equação diofantina $3x + 2y = 7$, represente esta solução no plano cartesiano e compare com o gráfico da função afim $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ que tem a forma cartesiana $3x + 2y = 7$.

Resolução

A equação $3x + 2y = 7$ pode ser resolvida facilmente usando os conhecimentos adquiridos até o momento.

$$1 = 3 \cdot (1) + 2 \cdot (-1) \quad .(7)$$

$$7 = 3 \cdot (7) + 2 \cdot (-7)$$

A solução geral é $x = 7 + 2t$ e $y = -7 - 3t$, com $t \in \mathbb{Z}$.

Agora vamos construir uma tabela com alguns pontos que são solução da equação acima e após representaremos estes pontos de coordenadas (x, y) no plano cartesiano.

x	-5	-3	-1	1	3	5	7
y	11	8	5	2	-1	-4	-7

Para construir os gráficos desejados, iremos utilizar o software matemático Geogebra, e não podemos deixar de ressaltar que o Geogebra é uma ferramenta potente não só para o ensino de equações e funções, mas também para o ensino de álgebra, geometria analítica, trigonometria e cálculo diferencial e integral. Salientamos, também, que para executar esta função de construir gráficos existem vários softwares de fácil utilização e com ferramentas semelhantes às do Geogebra, dos quais podemos citar o Graphmatica, o Winplot e Microsoft Mathematics, ambos softwares livres. A planilha eletrônica Microsoft Excel também pode ser utilizada para esta finalidade, e no caso das equações diofantinas, o Excel apresenta a facilidade de inserir em cada célula a fórmula paramétrica para as coordenadas x e y e construindo o gráfico discreto através do comando "gráfico de dispersão", embora a qualidade dos gráficos seja um pouco inferior aos criados pelo Geogebra.

A representação no plano da equação acima é a seguinte:

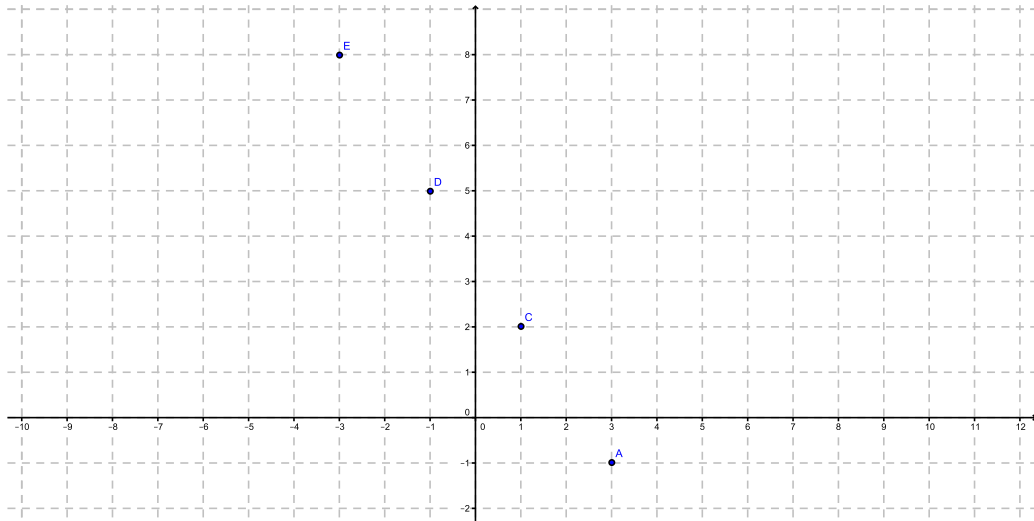


Figura 3 – Solução da equação diofantina $3x + 2y = 7$

Agora vamos mostrar o gráfico da função afim $3x + 2y = 7$, com $x, y \in \mathbb{R}$ para que possamos comparar e entender as semelhanças e diferenças entre a função afim $3x + 2y = 7$ e a equação diofantina $3x + 2y = 7$.

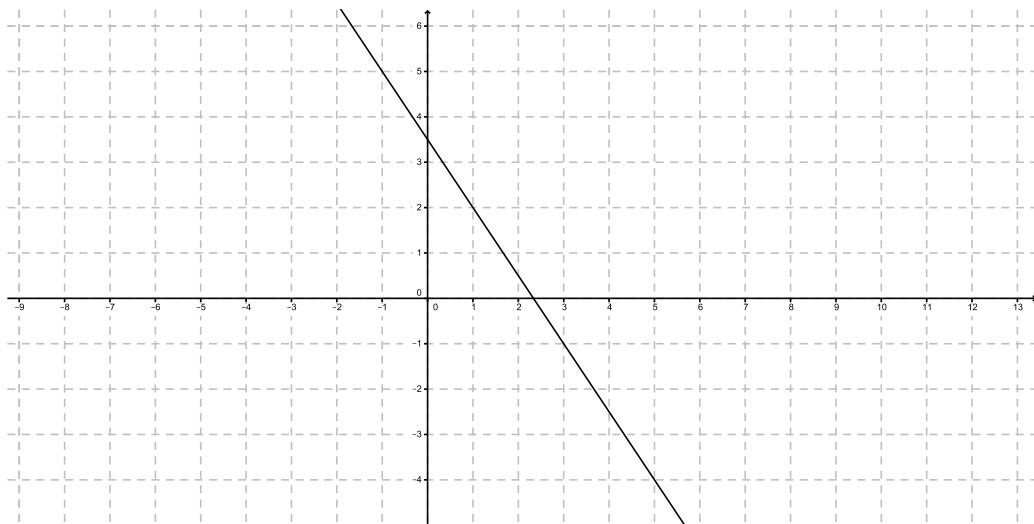


Figura 4 – Gráfico da função afim $3x + 2y = 7$

Fazendo a análise do gráfico da função afim podemos perceber que a reta da função passa por alguns pontos que têm ambas as coordenadas inteiras, e são exatamente as coordenadas destes pontos que são solução da equação diofantina que representa a função afim na sua forma cartesiana (ou seja, mesmos coeficientes e mesmo valor constante). Além disso, outra característica marcante da solução geral de uma equação diofantina

fica visível tanto na reta quanto no conjunto dos pontos do plano cartesiano do primeiro gráfico e facilitam bastante a construção de outros pontos que são solução da equação em questão. A partir do momento em que encontramos um único ponto (x_0, y_0) onde x_0, y_0 são uma solução particular da equação estudada conseguimos encontrar todos os outros pontos que também são solução da equação, pois como a solução geral é representada por $x = x_0 + \frac{b}{d}t$ e $y = y_0 - \frac{a}{d}t$ com $t \in \mathbb{Z}$ e $d = \text{mdc}(a, b)$ como já vimos anteriormente, basta aumentar ou diminuir $\frac{b}{d}$ no valor da abscissa x_0 e respectivamente diminuir ou aumentar $\frac{a}{d}$ no valor da ordenada y_0 e repetir este processo em cada ponto (x_n, y_n) encontrado. A tabela construída acima mostra bem este fato.

O próximo exemplo servirá para mostrar que o ensino das equações diofantinas pode ser relacionado ao ensino da geometria analítica.

Exemplo 6.1.2. Usando os conhecimentos de geometria analítica, construa alguns gráficos da equação $5x - 4y = c$, com $c \in \mathbb{Z}$ e mostre que conhecendo uma solução particular em cada gráfico, pode-se encontrar todas as soluções das equações diofantinas $5x - 4y = c$.

Resolução

Vamos construir em um mesmo plano os gráficos das equações $5x - 4y = 3$, $5x - 4y = 7$ e $5x - 4y = 15$. Da geometria analítica sabemos que o vetor $\vec{v} = (5, -4)$ é perpendicular a toda reta $5x - 4y = c$. Então as equações citadas com $c = 3, 7, 15$ respectivamente são todas paralelas entre si e seus gráficos estão na figura 5.

Visivelmente, os pontos com coordenadas inteiras estão dispostos à mesma distância um do outro em todas as 3 retas, sofrendo somente um deslocamento devido à solução particular (x_0, y_0) que é diferente em cada equação diofantina $5x - 4y = c$. Isto ocorre porque, como vimos no exemplo acima, ao se encontrar uma solução particular em cada equação da forma $5x - 4y = c$, basta acrescentar -4 na abscissa x_0 e diminuir 5 na ordenada y_0 respectivamente (já que $\text{mdc} = (5, -4) = 1$) e repetindo o processo em cada solução particular encontrada obtém-se todos os pontos que são solução das respectivas

equações diofantinas. Como o valor da abscissa aumenta de 4 em 4 e o da ordenada aumenta de 5 em 5, podemos utilizar o teorema de Pitágoras $a^2 = 4^2 + 5^2 \rightarrow a = \sqrt{41}$ para mostrar que a distância entre os pontos da mesma reta que representam a solução geral, das equações $5x - 4y = 3$, $5x - 4y = 7$ e $5x - 4y = 15$ é $\sqrt{41}$.

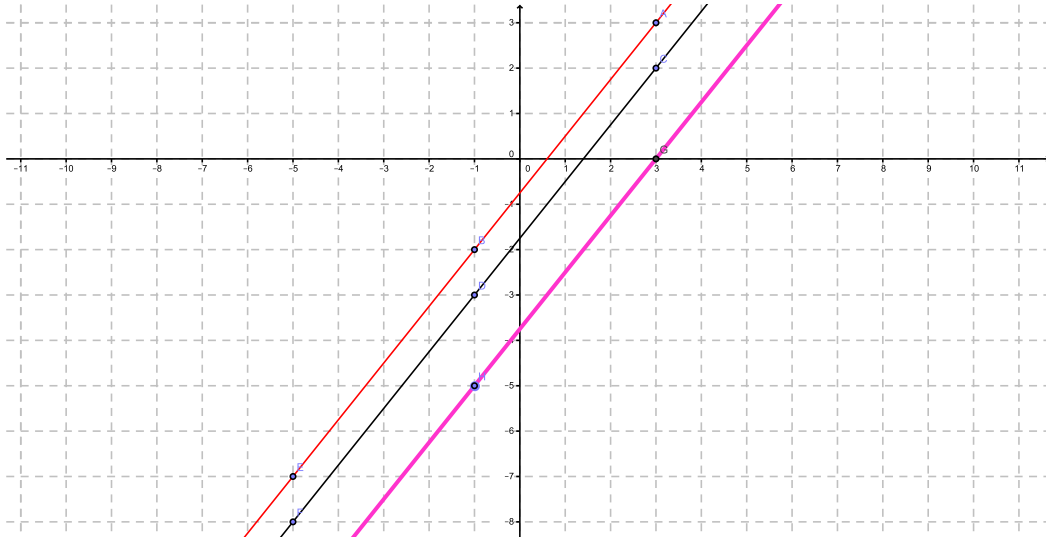


Figura 5 – Gráficos das equações cartesianas $5x - 4y = c$, com $c = 3, 7, 15$ respectivamente

Agora vamos mostrar o gráfico da equação do tipo diofantina (pontos que representam as soluções) e da função afim $0,25X + 0,10Y = 25$, que foi o primeiro exemplo que usamos de equação do tipo diofantina com coeficientes racionais, e através destes gráficos podemos visualizar a semelhança deste tipo de variação da equação diofantina com o seu formato original que permite utilizar somente coeficientes pertencentes ao conjunto dos números inteiros (\mathbb{Z}).

No gráfico apresentado na figura 6, construído no software Geogebra foi usada a escala entre os eixos $x:y$ de 1:5, ou seja, cada unidade de medida no eixo das abscissas corresponde a 5 unidades de medida no eixo das ordenadas. Da mesma forma como foi mostrado nos gráficos anteriores, os pontos representam a solução da equação diofantina $0,25X + 0,10Y = 25$ onde ambas as coordenadas de cada ponto tem valores inteiros, e a reta representa a função afim $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ determinada pela lei $0,25X + 0,10Y = 25$.

Como frisado nos exemplos acima, o gráfico de uma equação diofantina é determinado somente pelos pontos que têm ambas as coordenadas (x, y) pertencente ao conjunto dos números inteiros, ou seja, no software usado para a construção do gráfico que tenha

a opção de mostrar a malha quadriculada (Geogebra e Graphmatica, por exemplo), devemos considerar só os pontos que são interseção das linhas horizontais com as linhas verticais. Estes gráficos podem ser chamados de gráficos discretos.

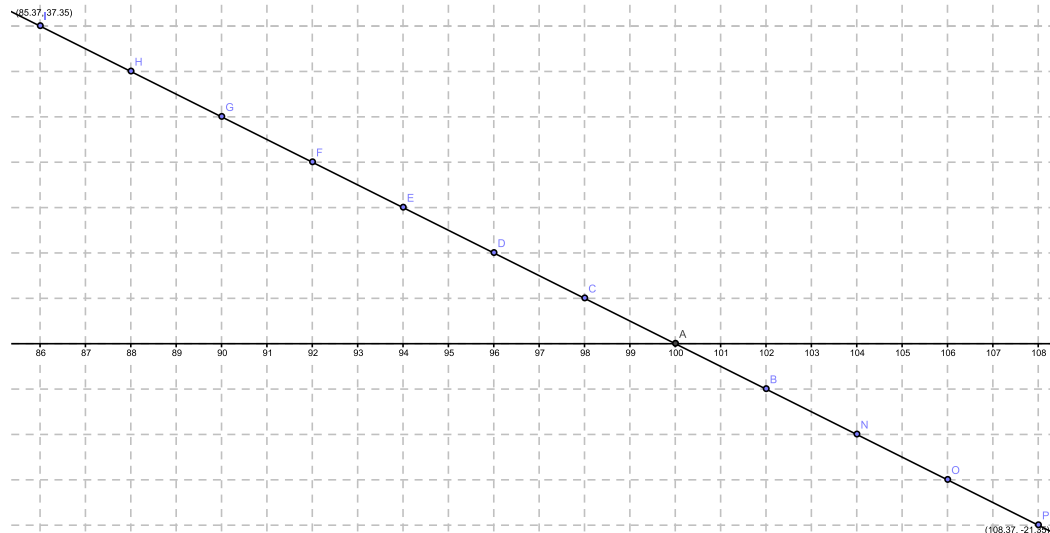


Figura 6 – Gráfico de $0,25X + 0,10Y = 25$ com escala de 1:5 entre os eixos x e y

No Geogebra, para criar um gráfico discreto temos duas maneiras, além da trivial que seria criar a função afim correspondente, marcar os pontos em cima da malha e depois ocultar a função. Mas, esta maneira é muito trabalhosa. As outras duas maneiras são as seguintes:

1ª Maneira - Se já sabemos a solução geral da equação, clicamos em "Exibir - Planilha" e na planilha que surge na tela, criamos uma coluna (A) com os valores de x , outra coluna (B) com os valores de y e outra coluna (C) com o ponto formado pelas duas coordenadas. Tudo isto é feito usando fórmulas da planilha eletrônica, basta inserir as soluções particulares por exemplo, em A2 e B2 respectivamente e na célula abaixo de cada valor montar a fórmula $= A2 + \frac{b}{d}$ e $= B2 - \frac{a}{d}$, arrastando a fórmula para as células abaixo até onde desejar. Na coluna C2 usamos a fórmula $= (A2, B2)$, arrastando-a até a última célula com valores determinados.

2ª Maneira - Quando temos a equação diofantina e queremos construir seu gráfico, podemos proceder do seguinte modo: escrevemos a equação $ax + by = c$ como uma função $f(x) = \frac{-ax + c}{b}$, construindo uma reta. Depois, na entrada escrevemos o comando "Lista

= Sequência [(i, f(i)), i, K, L,P]", onde (i,f(i)) representa os pontos que queremos marcar, 'i' representa a variável que neste caso será x , K significa o valor inicial (este valor deve corresponder a um ponto que é solução da equação) e L o valor final que queremos plotar e P é usado para definir o incremento que neste formato será sempre o valor de $\frac{b}{d}$ da solução geral, ou seja o coeficiente que determina o crescimento de x . Depois basta ocultar a reta da função que teremos o gráfico desejado.

Veja o gráfico da equação $3x + 4y = 5$, que para ser usado o processo acima foi escrito na entrada como $f(x) = \frac{5 - 3x}{4}$. Foi usado o comando "Lista = Sequência [(i, f(i)), i, -5, 9,4]" e a reta não foi ocultada para mostrarmos a coincidência dos pontos em questão.

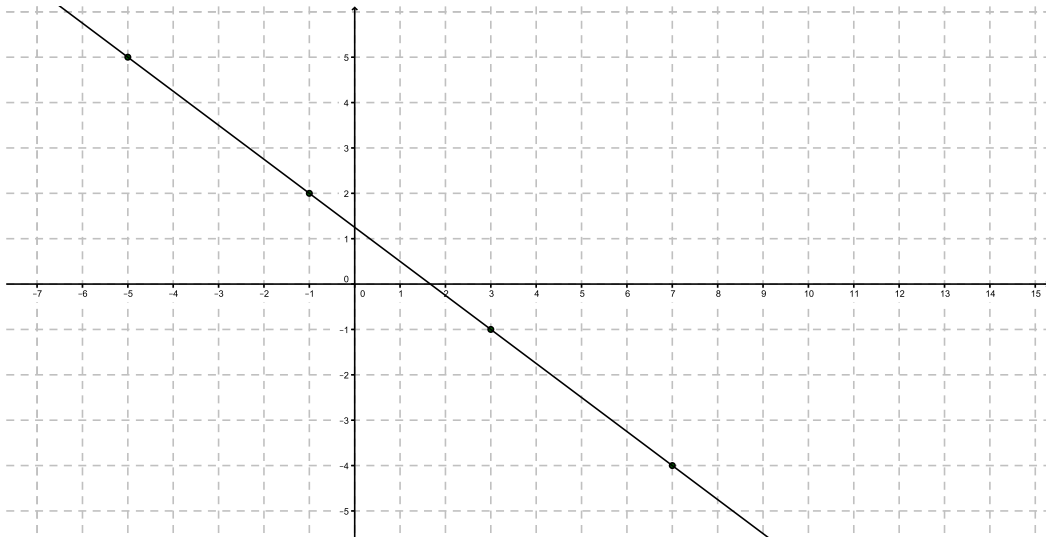


Figura 7 – Construção do gráfico usando o comando Lista = Sequência [(i, f(i)), i, K, L,P]

Estas duas maneiras de construção de gráficos discretos servem para as equações diofantinas, mas também servem para o ensino de um outro conteúdo que é ensinado no ensino médio e que apresentam uma estreita relação com estas equações. Veremos esta relação na próxima seção.

6.2 Relação entre equações diofantinas e progressão aritmética (P.A.)

No ensino médio o estudo das sequências numéricas é amplamente difundido, principalmente nas turmas de 1º ano do ensino médio. As primeiras sequências que são ensinadas de forma sistemática e aprofundada, com formulações e problemas interessantes de aplicação são as progressões aritméticas de primeira ordem (P.A.). Uma P.A. é uma sequência numérica em que a diferença entre um termo e seu antecessor é sempre a mesma, para qualquer termo da sequência.

O termo geral de uma P.A. é encontrado através da fórmula $a_n = a_1 + (n - 1).r$, onde a_n é o termo geral, a_1 é o primeiro termo da P.A., $n \in \mathbb{N}^*$ é a posição do termo procurado e r é a razão da P.A. que é definida por $r = a_2 - a_1 = \dots = a_n - a_{n-1}$. Para facilitar a associação que pretendemos fazer, vamos escrever o termo geral da P.A. como $a_n = a_1 - r + rn$. E o fato de $n \in \mathbb{N}^*$ é condição necessária em uma P.A. pois n é a ordem do elemento a_n .

Para representar uma progressão aritmética no plano cartesiano podemos escrever a P.A. como função de x e y onde $a_n = y$ e $n = x$. Mas como n pertence ao conjunto $\mathbb{N}^* = 1, 2, 3, 4, 5, \dots$, podemos perceber que seu gráfico será discreto, ou seja será igual ao gráfico de uma equação diofantina. Então, podemos estabelecer uma relação entre estes assuntos de matemática. Fazendo as substituições de x e y temos:

$$\begin{aligned}a_n &= a_1 - r + rn \\ y &= a_1 - r + rx\end{aligned}$$

e portanto

$$-rx + y = a_1 - r$$

A equação $-rx + y = a_1 - r$ é uma equação diofantina, onde $a = -r$, $b = 1$ e $c = a_1 - r$. Como $\text{mdc}(-r, 1) = 1$ e $1|a_1 - r$ então a equação tem solução. É a solução

geral será $x = x_0 + t = 1 + t$, pois sempre teremos $x_0 = 1$ e $y = y_0 + rt$, com $t \in \mathbb{N}$, $y_0 = a_1$ e r é a razão da P.A. que da origem a esta equação.

Pelo que foi provado acima, podemos concluir que toda equação diofantina da forma $ax + y = c$ que obedecem as restrições adicionais de só admitir $x \in \mathbb{N}^*$ e $t \in \mathbb{N}$, representam também, automaticamente, uma progressão aritmética (P.A.). Mas é fácil verificar que a recíproca não é verdadeira, ou seja, nem toda P.A. de termo geral $a_n = a_1 + (n - 1).r$ gera uma equação diofantina. Basta tomar uma P.A. em que o primeiro termo é um número decimal.

Veja o exemplo abaixo de uma progressão aritmética que pode ser trabalhada como uma equação diofantina, relacionando os dois conteúdos e mostrando graficamente a correspondência entre os dois formatos.

Exemplo 6.2.1. Seja a P.A. (4,7,10,13,...). Encontre a equação diofantina correspondente a esta P.A., calcule sua solução geral, e construa o gráfico discreto que representa esta sequência e equação simultaneamente.

Resolução

Na P.A. acima temos $a_1 = 4$, $r = 3$ e então o termo geral será $a_n = 1 + 3n$. Fazendo as substituições de $a_n = y$ e $n = x$ chegamos na equação desejada:

$$\begin{aligned}y &= 1 + 3x \\ -3x + y &= 1\end{aligned}$$

A solução geral neste caso pode ser calculada utilizando as informações da P.A.

destacados nas fórmulas citadas acima:

$$x = 1 + t, \text{ com } t \in \mathbb{N}$$

$$t = 4 + 3t, \text{ com } t \in \mathbb{N}$$

O gráfico abaixo que representa a P.A de termo geral $a_n = 1 + 3n$ e a solução da equação diofantina $-3x + y = 1$ foi construído utilizando a 1ª maneira de construção que citamos, utilizando as funções de uma planilha eletrônica no Geogebra.

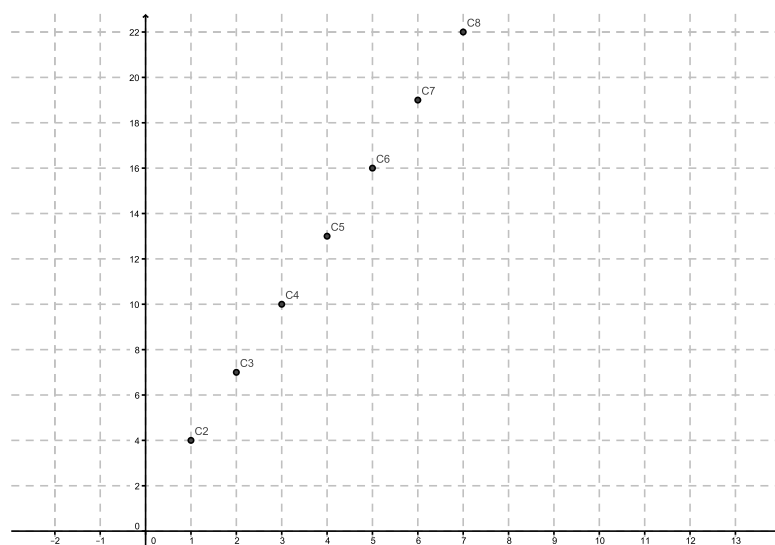


Figura 8 – Gráfico da P.A $a_n = 1 + 3n$ e solução da equação $-3x + y = 1$

Exemplo 6.2.2. Uma P.A. é determinada pelo termo geral $a_n = 3 + 6n$. Encontre a equação diofantina correspondente e sua solução geral, e represente graficamente esta P.A..

Resolução

$a_n = 3 + 6n$ é o termo geral da P.A. que se transforma através da fórmula $-rx + y = a_1 - r$ na equação diofantina $-6x + y = 3$ que tem a solução geral $x = 1 + t$ e $y = 9 + 6t$, com $t \in \mathbb{N}$.

Agora o gráfico desta progressão e equação diofantina será construído utilizando uma lista de pontos em sequência, que é a 2ª maneira de construção que citamos, conforme apresentado na figura 9.

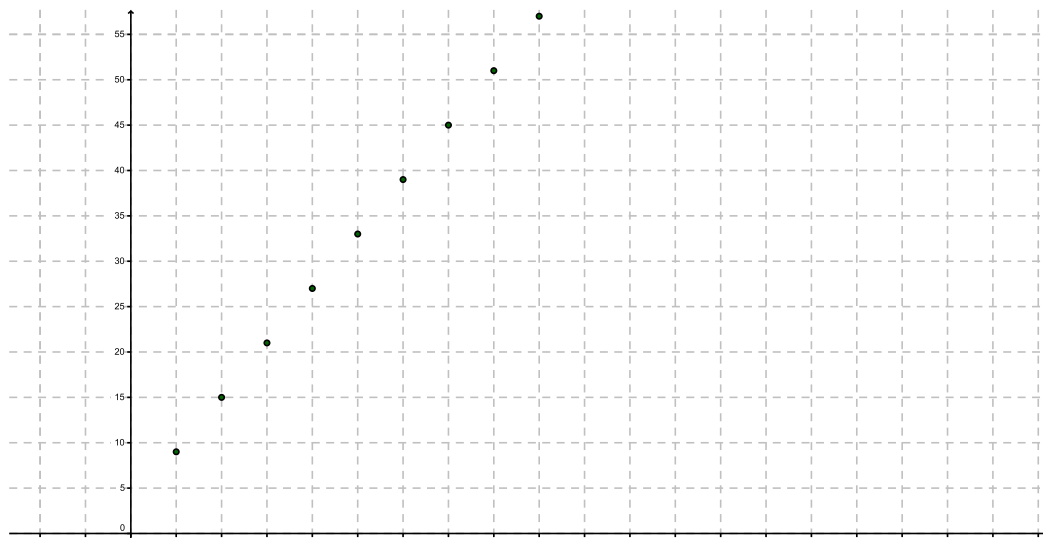


Figura 9 – Gráfico da P.A. (9,15,21,...) e solução da equação $-6x + y = 3$ com escala entre os eixos de 1:5

O próximo exemplo mostrará como percorrer o caminho inverso, ou seja, transformar uma equação diofantina em uma progressão aritmética. Lembrando que o formato $ax + y = c$ da equação é necessária para que se possa transformar em uma P.A. devido ao fato do valor de $x = 1, 2, 3, 4, 5, \dots$ aparecer na sequência natural e assim o coeficiente $\frac{b}{d} = 1$ surge naturalmente. É claro que se $\text{mdc}(a, b) = d = b$, também teremos uma diofantina que representa uma P.A., mas neste caso podemos dividir toda a equação por d para encontrar a equação primitiva que terá o formato desejado para a resolução do problema.

Exemplo 6.2.3. Transforme a equação diofantina $4x + y = 12$ em uma P.A. e represente-a com o gráfico discreto correspondente.

Resolução

A equação deve respeitar a fórmula $-rx + y = a_1 - r$, então temos que $r = -4$ e $a_1 - r = 12 \rightarrow a_1 = 8$. Portanto o termo geral da P.A. será representado por $a_n = 12 - 4n$ e a P.A. = 8, 4, 0, -4, -8, Agora veremos o gráfico que representa esta P.A., na figura 10.

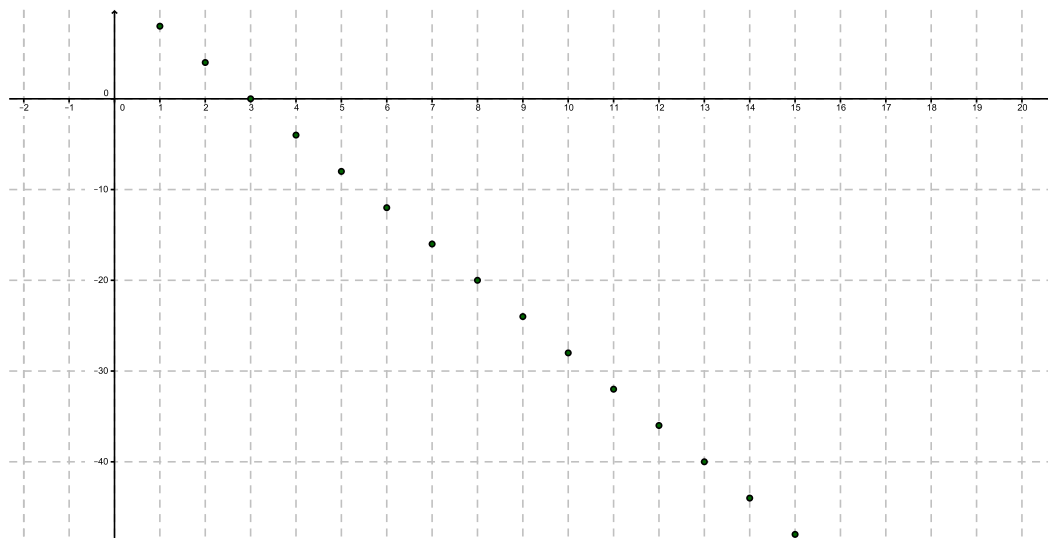


Figura 10 – Gráfico da P.A. $(8, 4, 0, -4, \dots)$ e solução da equação $4x + y = 12$ com escala entre os eixos de 1:5

Os exemplos que relacionam uma P.A. com uma equação diofantina foram explicados de maneira mais simplificada porque esta relação é realmente simples devido às restrições adicionais que aplicamos às equações diofantinas para explorar apenas uma situação que pode ser ensinada tranquilamente em qualquer turma de 1º ano do ensino médio. Mas fica o questionamento se é possível transformar todas as equações diofantinas em progressões aritméticas.

Para responder esta pergunta poderíamos argumentar que como os gráficos são idênticos então, podemos estabelecer esta relação para todas as diofantinas e todas as P.A.. Mas, o fato é que temos duas restrições muito importantes: uma é que os valores de x e y destas equações são exclusivamente números inteiros, e outra é que o valor de $n = x$ da P.A. é sempre o conjunto $\mathbb{N}^* = 1, 2, 3, 4, 5, \dots$. Desse modo, os ajustes que devem ser feitos são muitos, e como existem progressões aritméticas que têm termos pertencentes ao conjunto dos racionais podemos afirmar que não existe uma correspondência biunívoca entre diofantinas e P.As. no sentido de que não podemos transformar toda P.A. em uma equação diofantina com solução nos inteiros. Por fim, se estabelecermos uma relação do valor de x com o conjunto \mathbb{N}^* teríamos condições de transformar toda equação em uma P.A., mas isto não será estudado neste momento, por considerarmos este conhecimento desnecessário em vista da nossa proposta de trabalho na educação básica e talvez complexo demais para uma turma de 1º ano do ensino médio por exemplo.

Considerações Finais

Ao longo desta proposta de trabalho que se destina, principalmente, a auxiliar o trabalho dos professores de matemática da educação básica, tivemos a oportunidade de esclarecer e desenvolver o estudo das equações diofantinas lineares em duas variáveis, um tipo de equação que se mostra eficaz na resolução de vários problemas do cotidiano dos estudantes e rica em relação à quantidade, diversidade e proporções destes problemas.

Outro fator importante que foi apresentado e comprovado, é o fato de estas equações se relacionarem diretamente com outros conteúdos de outras áreas de conhecimento da matemática que já são abordadas normalmente na educação básica. Neste contexto mostramos que a equação diofantina resolve problemas que, muitas vezes, são solucionados através de um sistema de equações lineares em duas variáveis, mas quando não é possível encontrar nas informações do problema uma segunda equação o único recurso é a resolução através da solução geral da equação diofantina.

A relação destas equações com as funções afins e com as progressões aritméticas mostram a sua versatilidade e abrem caminho para que o desenvolvimento dos conhecimentos em torno destas equações seja inserido no contexto escolar da educação básica, neste caso, o trabalho poderá ser aplicado com êxito nas turmas de 1º ano do ensino médio. Uma relação interessante é citada, também, com o estudo de retas na geometria analítica, com enfoque nas equações cartesianas e paramétricas de uma função do 1º grau e estudo de retas paralelas e perpendiculares.

Nesta relação com as funções e com a geometria analítica, devemos tomar o cuidado quanto a representação gráfica de uma função afim e de uma equação diofantina, pois esta última apresenta um gráfico discreto que representa somente o conjunto de pontos (x, y) em que suas coordenadas sejam solução da equação em questão, e isto ocorre especifica-

mente quando ambas as coordenadas são inteiras, ao passo que em uma função afim o conjunto solução pertence ao conjunto dos números reais, que determinam no plano uma reta contínua.

A aceitação de um novo conjunto de coeficientes para estas equações se baseia na fundamentação teórica de um novo conceito de *mdc*, o máximo divisor comum generalizado (*mdcg*), que possibilita explorar o conjunto dos números racionais \mathbb{Q} em sua totalidade e com amostras práticas de utilização dos conhecimentos adquiridos sobre este assunto. E a partir deste conceito, elevamos as equações diofantinas a outro patamar de aplicabilidade, tendo em vista a quantidade de situações dentro e fora do ambiente escolar que são modeladas em duas variáveis e quase sempre com a utilização de valores decimais em seus coeficientes. Para exemplificar isto, basta tomar qualquer situação cotidiana destinada a calcular valores referentes a dinheiro, onde os décimos e os centésimos estão presentes quase que obrigatoriamente.

Como a generalização do conceito de *mdc* apresenta algumas ressalvas, poderíamos ter a sensação de que este conhecimento não tem utilidade visto que contrasta com os conceitos de divisores em anéis e corpos. Mas, com base em (??) e (??), os conhecimentos algébricos de anel e grupo não são estipulados para seu ensino no ensino médio, até por causa da complexidade e nível abstrato deste conteúdo. com base nisso podemos afirmar que a validade dos conceitos generalizados do *mdc* pode ser mostrada no ensino médio, e ensinada sem prejuízo nenhum aos outros ramos da matemática que o aluno poderá ter acesso em um curso de ensino superior.

Nos exemplos de aplicação das equações do tipo diofantinas com coeficientes racionais trabalhamos com situações que realmente podem acontecer no dia a dia, seja na zona urbana ou na zona rural. Consideramos esta seção importantíssima não só pelo fato de mostrar que os novos conceitos de *mdc* podem ser desenvolvidos em situações reais, abordando os problemas que envolvem o conjunto \mathbb{Q} com mais confiança e com base em uma técnica eficaz, mas também pelo fato de que alguns problemas necessitam a utilização de valores na casa dos milhões para a sua resolução. Isto é importante porque mostra para os estudantes que a matemática contida na vida real, às vezes, é mais difícil de ser resolvida

do que os exercícios estudados em sala de aula, onde tomando como base as referências (??) e (??), podemos perceber que muitos exercícios trabalham somente com valores pequenos, passando a impressão, muitas vezes, de que sabendo usar matemática até a casa dos milhares já é suficiente para resolver todos os problemas existentes. Acreditamos, então, que alguns destes exemplos poderão causar espanto nos alunos em um primeiro momento, mas que uma de suas funções será cumprida depois do seu entendimento que é mostrar a realidade da matemática.

Concluimos de modo geral que esta proposta de trabalho visa a evolução do ensino da matemática na rede pública, seja com uma abordagem significativa das operações com números racionais, seja com a adaptação de novas teorias em conteúdos que podem ser ensinados na educação básica e que podem proporcionar uma nova visão por parte dos alunos sobre o estudo da matemática. Mostrar aos alunos que a matemática está sempre evoluindo, e que esta evolução depende da evolução de toda a sociedade, servirá para incentivar os alunos a estudar, entender e construir matemática, que ao nosso ver, são três ações que em alguns momentos parecem se perder na educação básica.

Referências

- BIANCHINI, E. *Matemática bianchini*. 7. ed. São Paulo: Moderna, 2011. Citado na página 93.
- BRASIL. *Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática*. Brasília: MEC, 1998. 57 p. Citado na página 30.
- BRASIL. *Parâmetros curriculares nacionais para o Ensino Médio: Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias*. Brasília: MEC, 1999. Citado na página 93.
- BRASIL. *Orientações educacionais complementares aos parâmetros curriculares nacionais: Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias*. Brasília: MEC, 2002. Citado 2 vezes nas páginas 18 e 93.
- CAMPOS, G. D. M. *Equações diofantinas lineares*. Mato Grosso: UFMT, 2013. Disponível em: <[http://bit.proformat - sbm.org:br/xmlui/bitstream/handle/123456789-558](http://bit.proformat-sbm.org:br/xmlui/bitstream/handle/123456789-558)>. Acesso em: 03.3.2014. Citado na página 40.
- EVES, H. *Introdução à história da matemática*. 5. ed. São Paulo: Editora da Unicamp, 2011. Citado na página 22.
- HEFEZ, A. *Elementos de Aritmética*. 2. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2011. Citado na página 25.
- OLIVEIRA, S. A. *Uma exposição didática das equações diofantinas lineares de duas e três incógnitas com estudantes de cursos de licenciatura em matemática*. Minas Gerais: PUC, 2010. Disponível em: <<http://www.biblioteca.pucminas.br/teses-EnCiMatOliveiraSA1.pdf>>. Acesso em: 23.2.2014. Citado na página 40.
- OLIVEIRA, S. B. *As Equações diofantinas lineares e o livro didático de matemática para o ensino médio*. São Paulo: PUC, 2006. Disponível em: <<http://www.sapientia.pucsp.br/tdebusca/arquivo.php?codArquivo=2840>>. Acesso em: 26.2.2014. Citado na página 14.
- RIBEIRO, J. *Matemática 7º ano; Coleção Projeto Radix*. São Paulo: SCIPIONE, 2009. Citado na página 31.
- RIPOLL, J.; RIPOLL, C.; SANT'ANA, A. O mínimo múltiplo comum e o máximo divisor comum generalizados. 2006. Saraiva, São Paulo, p. 59–74, 2006. Citado 3 vezes nas páginas 16, 34 e 38.
- SOUZA, J. R. de. *Matemática: Novo Olhar*. São Paulo: FTD, 2010. Citado 2 vezes nas páginas 15 e 93.