Universidade Estadual de Santa Cruz
Departamento de Ciências Exatas e Tecnólogia
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT

Funções Afim e Quadrática sob a perspectiva do Cálculo Diferencial

por

Silvan Avelino dos Santos. †

sob orientação do

Prof. Dr. Vinicius Augusto Takahashi Arakawa.

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - DCET - UESC, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

†Este trabalho contou com apoio financeiro da Capes - Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior.

Funções Afim e Quadrática sob a perspectiva do Cálculo Diferencial

por Silvan Avelino dos Santos

Mestrado Profissional em Matemática

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - DCET - UESC, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Matemática

Trabalho aprovado. Ilhéus, 24 de abril de 2014

Prof. Dr. Vinicius Augusto Takahashi Arakawa

Prof. Dr. Sérgio Mota Alves

Mariana P. Gomes da Silva

Prof. Dr^a. Mariana Pinheiro Gomes da Silva

Abril/2014

Dedicatória

Ao meu filho Heitor, que na sua ingenuidade e simplicidade infantil, tornou-se meu mestre na arte de amar.

Agradecimentos

Agradeço A Deus, Força maior do Universo, por ter me concedido saúde, sabedoria e aptidão natural à Matemática.

Aos meus pais, Cícero e Carmélia, minhas referências morais e éticas, que abriram mão de seus projetos e realizações pessoais em prol da educação minha de minhas irmãs.

À minha esposa, Hana Paula, pelo carinho, amor, companheirismo e compreensão.

À minhas irmãs e comadres Sirléia e Sirlei, pelo incentivo e pronta ajuda nos momentos de dificuldade.

Aos colegas de gestão e docência do Colégio Modelo de Canavieiras pela compreensão, ajuda e palavras de apóio.

Aos professores e monitores do PROFMAT - UESC, que com comprometimento e dedicação contribuíram para engradecimento do meu conhecimento na Matemática, em especial aos Professores Doutores Sérgio Mota e Vinícius Augusto Takahashi Arakawa, por acreditarem na proposta desse trabalho e ao Professor Doutor Romenique Rocha, colega e amigo desde outrora.

À SBM - Sociedade Brasileira de Matemática, e CAPES- Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior, pela proposta e financiamento desse ousado projeto que é o PROFMAT.

Aos colegas da turma PROFMAT 2012, onde o espírito de companheirismo, suavizou as adversidades encontradas nessa caminhada.

Não posso deixar de agradecer ao Professor Hans, onde os anos que me separam do 1º Ano do Ensino Médio me fez esquecer de seu sobrenome, mas, jamais esquecerei de suas palavras dirigidas a mim, no final das aulas, que me fez abri os olhos para as ciências e despertar esse entusiasmo que tenho pela Matemática.

Resumo

As transformações de ordem política-pedagógica que vêm acontecendo nas últimas décadas no Ensino Básico no Brasil, conduzem o professor a repensar seus planejamentos curriculares. Na dimensão política temos A Lei de Diretrizes, Bases da Educação (LDB) e a instituição do Exame Nacional o Ensino Médio, além de outras avaliações, que colocam o aluno no centro do processo de ensino-aprendizagem. Paralelo a isso, no campo da Matemática, metodologias de ensino voltadas à resolução de problemas, ou com ênfase no cotidiano do aluno vem ganhando cada vez mais espaço nos livros didáticos e sala de aula. Todo esse contexto vem ocasionando uma mudança nos currículos levando a exclusão de alguns tópicos tradicionais do Ensino Médio, tanto do livro didático como do planejamento do professor, dando espaço para uma ensino mais dinâmico com forte tendência para interdisciplinariedade.

Atento a essas mudanças este, trabalho, faz uma reapresentação das funções Afim e Quadrática, que tem apresentado grande destaque nas provas do Emem, sob uma perspectiva do cálculo diferencial, não com intuito de estender o currículo, mas sim, simplificar seu entendimento e aplicação através do estudo do comportamento das variações das funções.

Palavras-chaves: Enem. Ensino Médio. Currículo. Funções. Derivada

Abstract

The transformations of political-pedagogical order that has been happening in recent decades in Basic Brazilian Education, leading the teacher to rethink their curriculum planning. In the political sphere we have the Law of Guidelines and Bases of Education (LDB) and the institution of the High School National Exam, and other tests that put the student at the center of the teaching -learning process. Parallel that in the field of mathematics, teaching methodologies oriented in problem solving, with an emphasis on cotidian stuations of is gaining more space in textbooks and living-class. This whole situation has caused a change in the curriculum leading to exclusion of some traditional topics of high school, both the textbook and the teacher's planning, giving way to a more dynamic teaching with a strong trend towards interdisciplinarity.

Attentive to these changes this, paper is about a resubmission to quadratic functions, which has brought great prominence but evidence of Emem, under a perspective of differential calculus, not with the intention of extending the curriculum , but to simplify their understanding and application through to study of the behavior of the function variations.

Key-words:Enem. High School. Curriculum. Functions. Derived.

Conteúdo

Introdução

Com a reformulação do Enem (Exame Nacional do Ensino Médio), a partir de 2009 o MEC (Ministério da Educacão), traz uma nova proposta de avaliação visando utilizá-lo como um instrumento centralizado para seleção às IFES (instituições federais de ensino superior) e com isso promover uma democratização ao acesso ao Ensino Superior, pois, possibilita aos candidatos menos favorecidos financeiramente, diversificarem suas opções de curso e instituições.

Junto com a reformulação foi apresentada uma Matriz de Referência Curricular para o ensino médio dividida em áreas de conhecimento e baseado em relação de competências e habilidades que os alunos devem adquirir. Em uma proposta apresentada a Associação Nacional dos Dirigentes das Instituições Federais de Ensino Superior, o MEC em [3] diz:

> *"A nova prova do Enem traria a possibilidade concreta do estabelecimento de uma relação positiva entre o ensino médio e o ensino superior, por meio de um debate focado nas diretrizes da prova. Nesse contexto, a proposta do Ministério da Educação é um chamamento. Um chamamento às IFES para que assumam necessário papel, como entidades autônomas, de protagonistas no processo de repensar o ensino médio, discutindo a relação entre conteúdos exigidos para ingresso na educação superior e habilidades que seriam fundamentais, tanto para o desempenho acadêmico futuro, quanto para a formação humana."*

E notório com esse progressivo fim dos vestibulares e adesão ao Enem, por instituições de ensino superior, seja de ordem pública ou privada, vem causando uma diminuição da dificuldade de acesso de alunos egressos de escolas públicas a essa modalidade de ensino, em razão de que as questões do Enem são mais contextualizadas e menos conteudistas. Mas por outro lado, não se pode ser negado ao aluno, que demonstra afinidade com matemática, o contato com aqueles conteúdos que apresentam um maior nível de dificuldade, exige maior abstração e que não estão diretamente relacionados a situações práticas cotidianas, mas, são de grande importância para o desenvolvimento do conhecimento teórico e científico do aluno e também para o progresso e evolução da matemática como ciência.

Dessa forma o problema em questão é seguir as novas tendências da Educação Matemática para o ensino médio e ao mesmo tempo não limitar conteúdos, promover divulgar a matemática e identificar talentos.

Paralelo a essa análise, temos o resultado de um trabalho publicado na sítio eletrônico da Revista Veja em [5] onde foi feito um levantamento sobre as 720 questões do ENEM de 2009 a 2012, no sentido de observar os conteúdos cobrados nas mesmas. Como está explícito na Tabela 0.1.

Apesar de não especificar os critérios e metodologia utilizadas neste trabalho, pode-se verificar no resultado que existe uma considerável concentração de questões em torno de funções e escala, razão e proporção. Já em física, destaca-se o aumento nas provas de 2011 e 2012 de questões que envolvam conhecimento em mecânica. Surge então a questão: O que une esses três tópicos?

A mecânica tratada no ensino básico, baseia-se no movimento uniformemente variado, ou seja, movimento com aceleração constante onde a equação do espaço é modelada em uma função quadrática. Razão e proporção está fortemente relacionado com temas e situações que caracterizam modelo de função afim. E por fim função quadrática e função afim são componentes naturais do estudo de funções.

0.1 Proposta

Na prática da docência em matemática do ensino médio, principalmente na escola pública, verifica-se uma grande dificuldade em se cumprir os convencionais currículos, Distribuição de questões Matemática e Física nas provas do Enem

Matemática				
	2009	2010	2011	2012
Funções (tabelas e gráficos)	8	13	11	12
Geometria	11	6	14	12
Escala, razão e proporção	6	10	7	9
Porcentagem	2	4	4	6
Estatística	3	2	6	4
Probabilidade	3	4	2	4
Trigonometria	0	2	2	2
Análise combinatória	2	1	2	2
Números inteiros e reais	0	4	1	1
Aritmética	4	0	0	0
Equações elementares	2	0	1	1
Sequências	2	1	0	0
Matriz	0	0	0	0
Notação científica	1	0	0	0
Física				
	2009	2010	2011	2012
Eletricidade e Energia	5	6	2	2
Mecânica	2	2	5	5
Óptica	1	1	4	1
Termologia	3	2	1	1
Ondulatória	2	1	1	2
Cinemática	1	0	0	2
Termodinâmica	1	1	0	0
Astronomia	0	0	0	1

Tabela 0.1. Fonte: [5]-Adaptado

sejam em razão da extensão, da reduzida carga horária, ou da falta de lastro algébrico aritmético do ensino fundamental. Assim essas progressivas mudanças virão para diminuir o sofrimento dos alunos ao estudar matemática e a angústia dos professores, dando sentido prático ao que se estuda na escola. Mas, por outro lado, não é incomum encontrarmos alunos que apresentam afinidade com Matemática e que conseguem êxito na aprendizagem apesar das adversidades.

Assim, a proposta desse trabalho é equacionar essas duas vertentes, manter o foco nas novas tendência, ou seja preparar o aluno para o Exame Nacional do Ensino Médio, sem perder de vista conteúdos tradicionais do ensino médio. Portanto, será feito uma reapresentação dos estudos de função afim e quadrática, valorizando os aspectos de suas variações através da sutil introdução do calculo diferencial.

Este trabalho não visa substituir o livro didático na apresentação dos conteúdos, mas sim expor uma forma alternativa de se estudar funções, que possibilite a aplicação em situações mais realísticas e dê suporte para estudos posteriores. Os conceitos serão apresentados a partir de aplicações e exemplos práticos e as demonstrações formais serão omitidas, substituídas pela aceitação através intuição. Dessa forma, acreditamos que este trabalho poderá ser utilizado como um texto suplementar ao livro didático, como atividade de um núcleo de estudos dirigidos em matemática ou ainda como material de centro de iniciação científica.

0.2 Justificativa

A inserção do estudo do cálculo diferencial no ensino médio não se trata necessariamente de mais um elemento no componente curricular ou um tópico a ser estudado pelo aluno. Pelo contrário, a derivada como ferramenta tornará mais fácil resolução de problemas que envolva as mais diversas aplicações de funções quadráticas. E também não se trata de um estudo formal como se vê nas disciplinas de introdução ao cálculo no ensino superior, onde se inicia com um pesado estudo de limites e com demonstrações exaustivas.

E ainda, o estudo da derivada no primeiro ano do ensino médio, poderá favorecer um tratamento interdisciplinar dos conteúdos, possibilitando sua aplicação na física, no estudo dos movimentos ou qualquer outro assunto que envolva taxa de variação.

Capítulo 1

Noções Básicas de Funções

A noção intuitiva matemática de função é basicamente uma relação entre os elementos de dois conjuntos quaisquer. Em nosso cotidiano, estamos cercados de fenômenos que podem servir de exemplos de função. O tempo que uma pedra leva para atingir o chão quando é lançada do alto de uma torre, depende da altura da torre, assim podemos dizer que o tempo está em função da altura. Da mesma forma podemos dizer que a área de um quadrado está em função do comprimento do lado, ou que o valor da conta de energia elétrica está em função do consumo. É importante perceber que não basta uma simples relação para que exista função, é fundamental que se perceba a relação de dependência, que se identifique o que é livre e o é que dependente. Ora, não teremos um valor para a conta de energia, quando não se existe um consumo, este deve existir mesmo que seja zero.

Tratando-se de números, uma função pode ser entendida também como uma máquina que transforma valores, onde para cada valor de entrada existe necessariamente um único valor de saída.

De uma maneira formal podemos dizer que:

Uma função f é uma lei que associa cada elemento x de um conjunto A exatamente a um elemento $f(x)$ em um conjunto B.

Quando estudamos resolução de equações no ensino fundamental, denominamos o x de incógnita ou valor desconhecido. No estudo de funções podemos escolher para

x qualquer um dos elementos do conjunto A, assim x é denominado *variável independente da função f* e A é denominado *conjunto domínio de f* (notação $D(f)$). A função associa um valor x a um único valor $f(x)$ (lê-se f de x) ao qual denominamos *variável dependente* e o conjunto formados por todos seus possíveis valores é denominado *conjunto imagem de f.*

Não se pode confundir f e $f(x)$. f refere-se à função em si, ou seja, à máquina que transforma um número em outro. Já o $f(x)$ é o valor de saída produzido pela máquina f a partir do valor de entrada x. Conforme a figura 1.1.

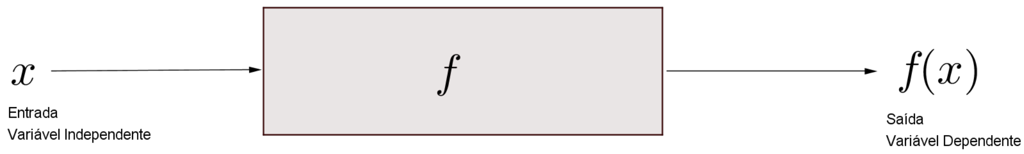

Figura 1.1

O conjunto B denomina-se Contra-domínio de f (notação $CD(f)$). Observemos que o conjunto imagem de f é diferente do contra-domínio de f, isto é, pode existir elementos no conjunto B que não pertença a imagem de f.

Para que uma função esteja bem definida é importante que fique explícito seu domínio, contra-domínio e uma lei que relaciona suas variáveis. Observemos os exemplos abaixo:

(i) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = 2x + 1$;

(ii) $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ tal que $g(x) = 2x + 1$;

(iii) $h : \{-1, 0, 1, 2, 3\} \to \mathbb{R}$ tal que $h(x) = 2x + 1$;

Aqui temos três funções às quais denominamos função f, g e h, que executam a mesma operação: duplicam o valor de entrada e adicionam um. Pensando ainda em função como uma máquina, o que as diferenciam é que f está programada para operar qualquer número real, g, está restrita a números não negativos e h opera somente sobre o conjunto $\{-1, 0, 1, 2, 3\}$.

Para simplificação da escrita, é comum representarmos uma função apenas pela equação de sua lei de formação escrevendo apenas $f(x) = x^2$, quando não há dúvida sobre seu domínio. Neste exemplo subentende-se que se trata de um função de domínio$\mathbb{R}$.

1.1 Representação gráfica de uma função

Para visualização gráfica de uma função, de uma variável, usamos algumas técnicas da Geometria Analítica, que é método de tratamento de figuras geométricas. Os elementos estão dispostos num plano onde cada ponto está associado a um único par de número, que funciona como seu endereço, conforme figura 1.2:

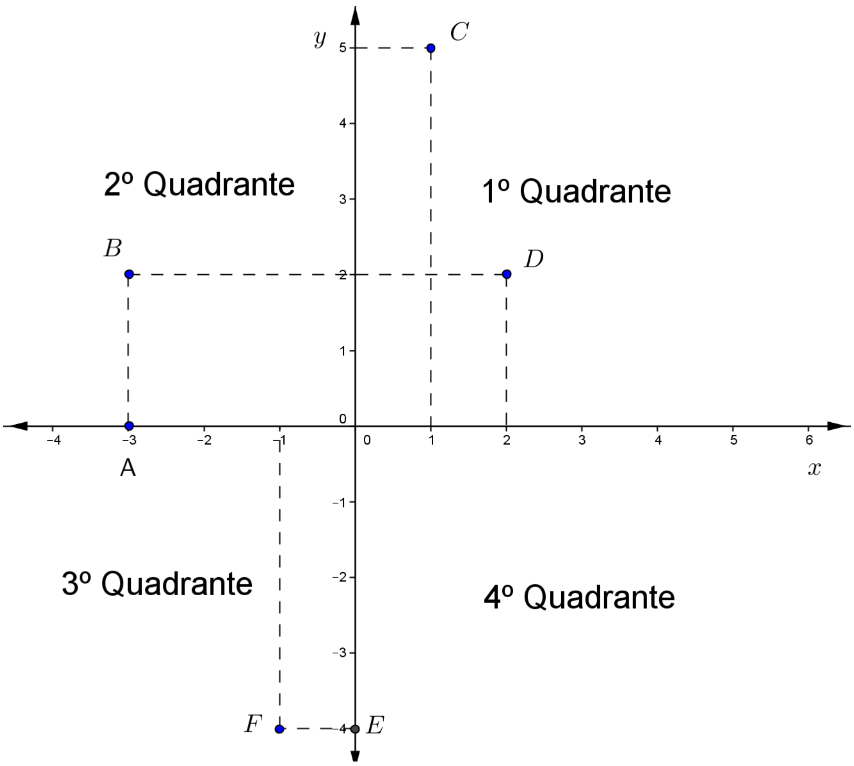

Figura 1.2

Vemos que cada ponto pode ser identificado por dois valores numéricos, que são as coordenadas desse ponto assim temos $A(-3, 0)$, $B(-3, 2)$, $C(1, 5)$, $D(2, 2)$, $E(0, -4)$ e $F(-1, -4)$. A primeira coordenada que corresponde ao valor no eixo horizontal denomina-se *abscissa* a segunda sobre o eixo vertical denomina-se *ordenada*. Dessa forma o ponto B tem abscissa -3 e ordenada 2.

Na representação gráfica de uma função, para cada valor do domínio constituiremos um único ponto sobre o plano. Admitindo o valor do domínio como abscissa e sua respectiva imagem como ordenada, o gráfico de uma função f é formando pelo subconjunto $GR(f)$ do plano cartesiano de pontos da forma $P(x, f(x))$ onde x é elemento do domínio, ou seja:

$$GR(f) = \{(x, f(x))\,; x \in D(f)\}$$

Podemos perceber que, o comportamento do gráfico da função depende necessariamente da lei de relação entre x e y, assim como seu domínio. Dadas as funções f, g e h, da sessão anterior, escolhendo com um certa conveniência alguns valores de x, (tabela 1.1) verificaremos o comportamento do gráfico dessas funções conforme as figuras 1.3, 1.4 e 1.5.

x	y	(x, y)
$x = -3$	$y = 2(-3) + 1 = -5$	(-3,-5)
$x = -2$	$y = 2(-2) + 1 = -3$	(-2,-3)
$x = -1$	$y = 2(-1) + 1 = -1$	(-1,-1)
$x = 0$	$y = 2(0) + 1 = 1$	(0,-1)
$x = 1$	$y = 2(1) + 1 = 3$	(1,3)
$x = 2$	$y = 2(2) + 1 = 5$	(2,5)
$x = 3$	$y = 2(3) + 1 = 7$	$(3, 7)$

Tabela 1.1

Gráfico da função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = 2x + 1$

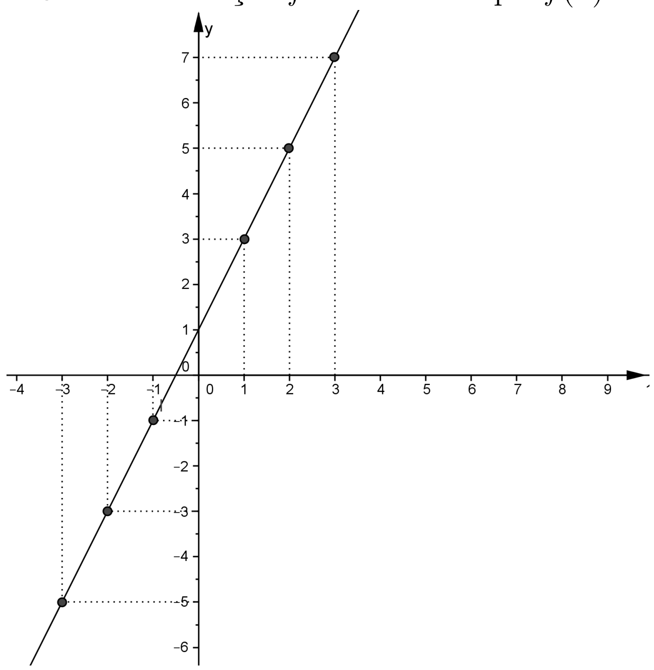

Figura 1.3

Gráfico da função $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ tal que $g(x) = 2x + 1$

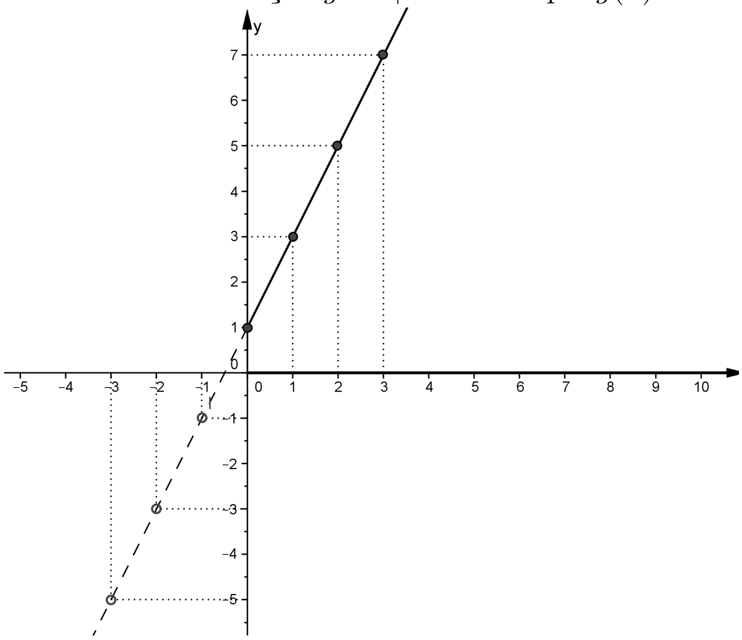

Figura 1.4

Gráfico da função $h : \{-1, 0, 1, 2, 3\} \to \mathbb{R}$ tal que $h(x) = 2x + 1$

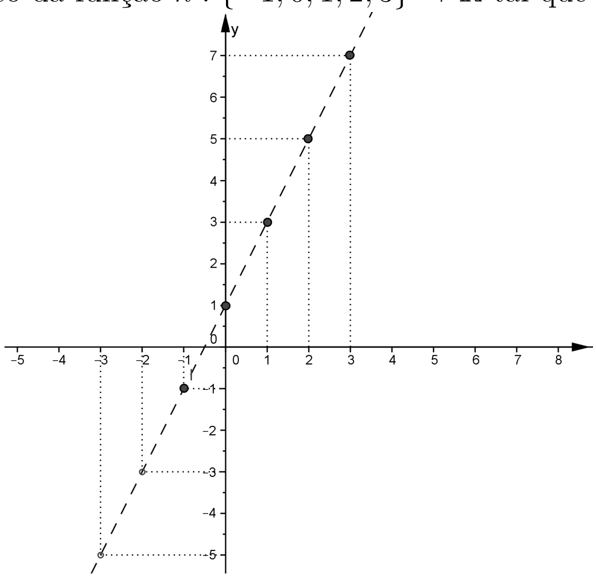

Figura 1.5

Observemos que, todos os três gráficos estão sobre a mesma reta que serve de suporte, característica esta dada pela da lei formação $y = 2x + 1$ comum às três. A diferença está nos domínios de cada uma. Na função f, o domínio é toda reta real consequentemente o gráfico é igual a reta suporte (figura 1.3), já na função g o gráfico inicia-se a partir do ponto $(0, 1) = (0, f(0))$ (figura 1.4), para a função h o gráfico restringe-se a alguns pontos (figura 1.5).

Capítulo 2

Função Afim

Uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é dita *afim* quando existem constantes $m \neq 0$, $b \in \mathbb{R}$ tais que $f(x) = mx + b$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Seguindo esse conceito, podemos afirmar que a função f descrita no capítulo anterior é uma função afim. O gráfico de uma função afim é sempre uma reta. A demonstração formal dessa afirmação será omitida, sendo substituída pela análise de exemplos, o importante aqui é esclarecer as relações entre as funções do tipo $y = mx + b$ e seu respectivo gráfico.

Um reta é determinada conhecendo-se dois pontos distintos, da mesma forma, uma função afim pode ser determinada conhecendo-se as imagens $f(x_1)$ e $f(x_2)$, para x_1 , x_2 distintos. Ou seja, sabendo-se que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função afim e que para x_1 e x_2 distintos temos $y_1 = f(x_1)$ e $y_2 = f(x_2)$, podemos determinar m e b, a partir da resolução do seguinte sistema linear:

$$\left\{\begin{array}{l} mx_2 + b = y_2 \\ mx_1 + b = y_1 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} mx_2 + b = y_2 \\ -mx_1 - b = -y_1 \end{array}\right. \Rightarrow m(x_2 - x_1) = y_2 - y_1 \Rightarrow m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \tag{2.1}$$

Conhecendo-se o valor de m e substituindo em qualquer uma das equações facilmente encontramos o valor de b.

Construção de uma reta a partir de dois de seus pontos é uma tratamento comum da geometria. Aqui com o método analítico e com o uso do plano cartesiano podemos construir uma reta, também a partir de um seus pontos e com a determinação de sua inclinação em relação a um dos eixos ordenados, por convenção adotaremos o eixo das abscissas. Para melhor entendimento façamos uma análise de algumas funções e seus respectivos gráficos. Sejam as funções:

Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $y = 2x$. Escolheremos alguns valores de x para construção gráfica, conforme tabela 2.1.

x	y	(x, y)
$x = 0$	$y = 2.0 = 0$	$(0, 0)$
$x = 1$	$y = 2.1 = 2$	$(1, 2)$
$x = 2$	$y = 2.2 = 4$	$(2, 4)$

Tabela 2.1

Desse modo obtemos o gráfico2.1.

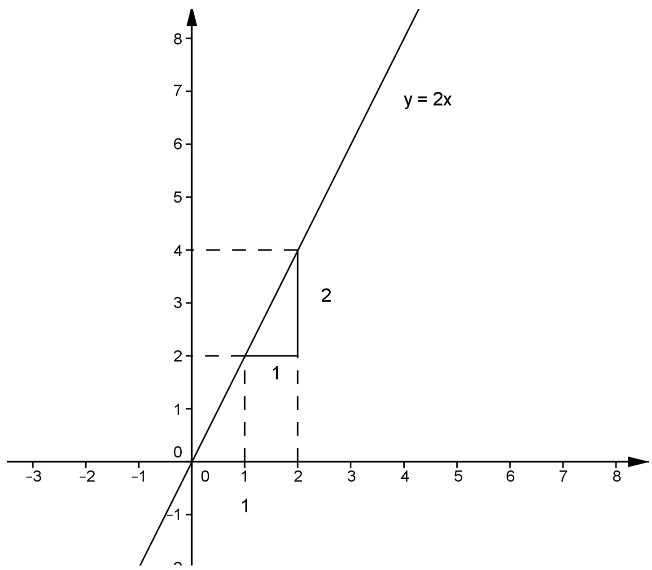

Figura 2.1

Observa-se que a variação do valor de y ao longo de todo gráfico é uniforme em relação a variação de x, ou seja, enquanto x avança uma unidade para direita, y sempre avança duas unidade para cima. Assim podemos definir a inclinação da reta como a razão entre a variação de y e a respectiva variação de x. Utilizando a notação Δx (delta x) e Δy (delta y) para representar as respectivas variações de x e y, podemos escrever:

$$\textbf{inclinação} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{3-1}{2-1} = 2$$

Podemos generalizar esta relação da seguinte forma:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Onde e $f(x_1) = y_1$ e $f(x_2) = y_2$ para quaisquer $x_1 \neq x_2$

Observemos que a relação acima coincide com o valor do coeficiente m encontrada em 2.1, por essa razão este é denominado *coeficiente angular*. Quando se utiliza a notação $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ denominamos taxa de variação. Por sua vez, o coeficiente b determina a abscissa o ponto onde o gráfico intersecta o eixo y, pois, $f(0) = m0 + b = b$, assim toda função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, com $f(x) = mx + b$ passa pelo ponto $(0, b)$.

Utilizando o conceito da taxa de variação podemos facilitar a construção do gráfico da função afim.

Exemplo 2.1. Construir o gráfico da função f afim onde $y = 3x + 1$.

Como $b = 1$, temos que o gráfico passa por $(0, 1)$ e como $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = 3 = \dfrac{3}{1}$, temos que quando x tem um acréscimo de uma unidade por sua vez, y tem um acréscimo de 3 unidades, assim, a partir do ponto $(0, 1)$ desloca-se uma unidade para direita e três unidade para cima, chegando ao ponto $(1, 4)$, logo o gráfico de f é a reta que passa pelos pontos $(0, 1)$ e $(1, 4)$, conforme a figura 2.2.

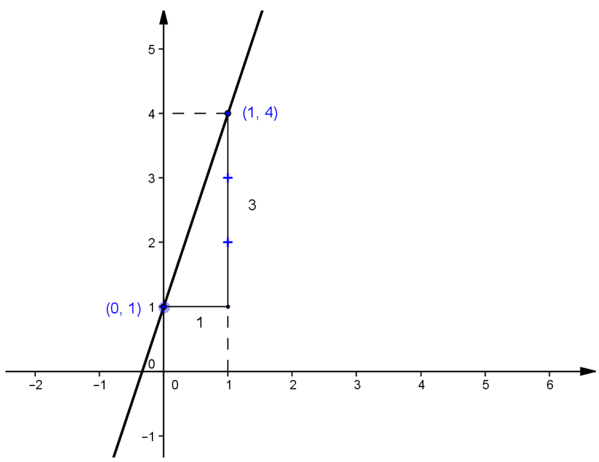

Figura 2.2

Exemplo 2.2. Construir o gráfico da função f afim dada por $f(x) = -\dfrac{2}{3}x - 1$.

Aqui temos $(0, -1)$, um ponto do gráfico, e $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{-2}{3} = \dfrac{2}{-3}$. Desse modo teremos que um dos dois deslocamento terá sentido negativo. Assim partindo de $(0, -1)$ podemos deslocar três unidades para esquerda e duas unidade para cima chegando ao ponto $(-3, 1)$ ou então deslocamos três unidades para direita e duas para baixo chegando no ponto $(3, -3)$. Vejamos a figura 2.3.

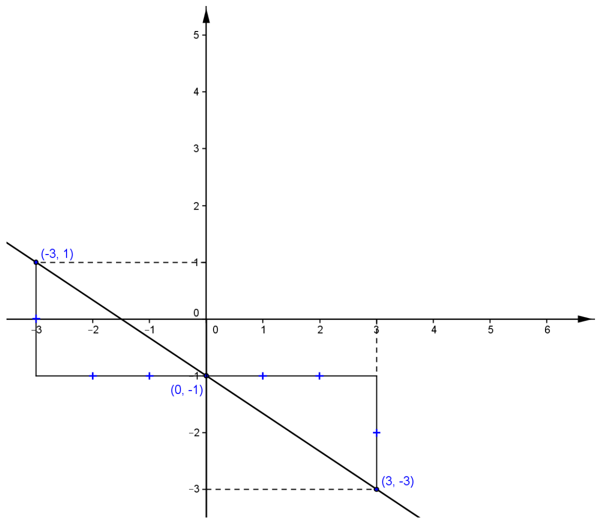

Figura 2.3

Com o exemplo acima podemos introduzir dois conceitos importantes para funções afins:

- *Uma função afim será dita crescente quando o coeficiente angular for positivo, ou seja, quando há um acréscimo no valor de x, o valor de y também cresce.*

- *Uma função afim será dita decrescente quando o coeficiente angular for negativo, ou seja, quando há um acréscimo no valor de x, acarreta em um decréscimo no valor y.*

Desse modo vemos que o coeficiente angular ou taxa de variação nos dá o comportamento do gráfico da função afim.

2.1 Modelos e Caracterização de uma Função Afim

No estudo da matemática, ou mesmo no cotidiano, é comum depararmos com situações-problema em que existe uma relação entre duas grandezas e para um melhor entendimento temos que determinar um modelo matemático para situação dada.

Existem algumas situações que podemos facilmente encontrar uma relação do tipo $y = ax + b$, como no exemplo a seguir:

Exemplo 2.3. Em uma loja, o salário mensal dos vendedores é calculado da seguinte forma: Uma parte fixa de $R\$800,00$, mais uma comissão de 5% sobre o somatório das vendas realizadas pelo vendedor no mês. Assim podemos escrever o salário y do vendedor em função da soma x das vendas realizadas, da seguinte forma:

$$y = \frac{5}{100}x + 800$$

.

Similarmente a este problema, uma série de outras situações podem ser modeladas por uma função do tipo $f(x) = ax + b$. Outros situações:

- Valor pago em uma corrida de taxi onde b corresponde a bandeirada (valor fixo) e a valor pago por cada km rodado;
- Custo total para produção de x unidades de certo produto onde b é custo fixo, que independe da produção, e a é o custo associado à produção de uma unidade.

Mas existem situações em que o valor de a e b não estão explícitos, como no exemplo a seguir:

Exemplo 2.4. Em um laboratório, um estudante dispõe de dois termômetros de modelos e tamanhos diferentes, sendo que um mede a temperatura na escala Celsius e o segundo, pelo tempo de uso não apresentava as marcas da escala. Esse estudante resolveu criar uma nova escala M de temperatura, para que pudesse aproveitar o termômetro e procedendo da seguinte forma: estipulou um medida linear que corresponderia à uma unidade da nova escala e marcou-a ao longo de todo termômetro e ainda atribuiu 0^0M(zero grau na escala M) à marcação central do termômetro. Observando a variação de temperatura nos dois termômetros ao colocá-los em um refrigerador, foi anotando as correspondências entre as duas escalas, conforme a tabela 2.2.

A intensão do estudante era de estabelecer uma função que relacionasse as duas escalas, para qualquer qualquer pessoa pudesse usar o termômetro na escala M e conhecer o valor correspondente na escala Celsius. Dessa forma, resolveu marcar esses valores em um plano cartesiano, obtendo o gráfico 2.4.

^0C	^0M
6	6
4	2
2	-2
0	-6

Tabela 2.2

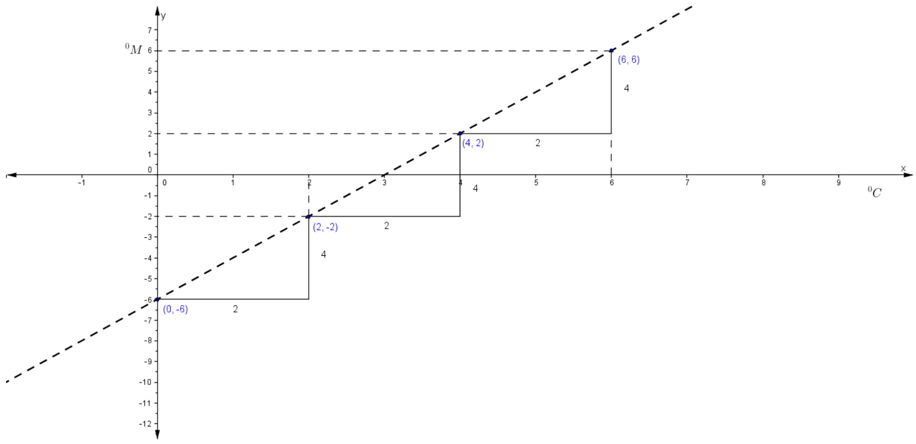

Figura 2.4

O aluno verificou que a cada variação em duas unidade na escala Celsius corresponde a uma variação em quatro unidades na escala M, ou seja:

$$\frac{\Delta M}{\Delta C} = \frac{4}{2} = 2$$

Assim o estudante concluiu facilmente que se trata de uma função afim e como $(0, -6)$ é uma ponto do gráfico, chegou-se a relação:

$$M = 2C - 6$$

Mas esse função não é conveniente pois tem como variável independente, o valor da temperatura na escala M e variável dependente, a temperatura na escala Celsius. Ele percebeu que é mais funcional que se tenha o contrário: Valor de entrada em M e valor de saída em Celsius.

Para contornar essa situação, sem refazer todo problema o estudante verificou que a temperatura 0^0M corresponde a 3^0C e $\dfrac{\Delta C}{\Delta M} = \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2}$, concluindo que:

$$C = \frac{1}{2}M + 3$$

Comparando as duas as variações das duas grandezas o estudante percebeu que quando a temperatura sofre uma variação em duas unidades na escala Celsius sempre acarretará uma variação em 4 unidades na escala M, ambos em sentido positivo, o que é fundamental para determinar a função, seja a temperatura em M ou em C o valor de entrada.

Capítulo 3

Função Quadrática

As *funções quadráticas* são as funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dadas por $f(x) = ax^2 + bx + c$, com $a \neq 0$, b, $c \in \mathbb{R}$, admitindo as formas incompletas:

- $f(x) = ax^2$
- $f(x) = ax^2 + c$
- $f(x) = ax^2 + bx$

O gráfico da função quadrática apresenta uma forma básica a qual denominamos de *parábola*, com algumas variações da forma que dependem dos valores dos coeficientes a, b e c. Para o início do estudo gráfico, tomaremos um caso particular quando $a = 1$ e $b = c = 0$, ou seja, $f(x) = x^2$ que nos gerará uma parábola mestre, onde todas as outras serão variação desta.

Tomaremos como partida o ponto $(0, 0)$, já que é fácil verificar que satisfaz a condição $f(x) = x^2$, e tomemos alguns valores simétrico para x no entorno da origem conforme a tabela 3.1, gerando o gráfico da figura 3.1.

Vemos que o gráfico da função quadrática apresenta simetria em relação a um eixo vertical, para o caso de $y = x^2$ coincide com os valores onde $x = 0$, e ainda, para os valores negativos de x, o gráfico apresenta um comportamento de decrescimento (valor de x aumenta enquanto y diminui), alterando esse comportamento para um crescimento

x	$f(x) = x^2$
-3	9
-2	4
-1	1
0	0
1	1
2	4
3	9

Tabela 3.1

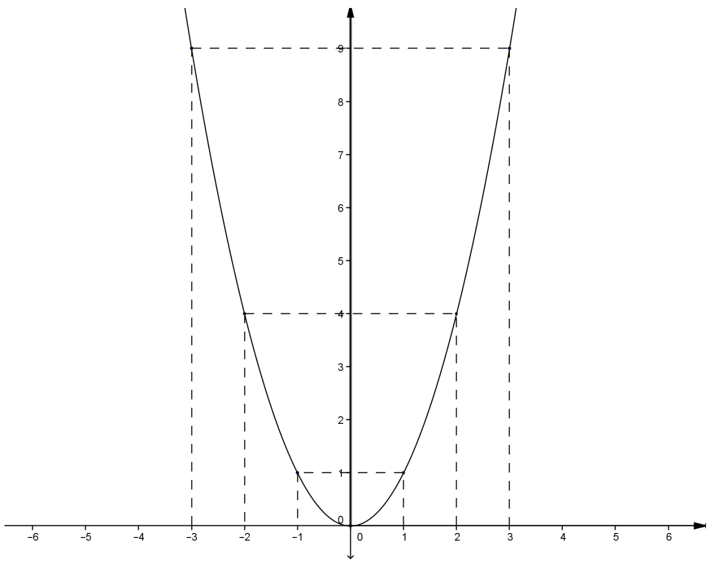

Figura 3.1

após o ponto $(0,0)$, quando x assume valores positivos. Em qualquer parábola, o ponto onde ocorre esse mudança denominamos *vértice*.

Neste exemplo, a parábola está limitada ao intervalo $[-3,3]$ para o valores de x, mas, o que nos garante que esse comportamento se manterá para um intervalo maior? Esse quesito será garantido a partir do estudo do comportamento da variação da função quadrática. Para tanto precisamos entender o conceito de retas tangente e secante para uma curva qualquer. Stewart em [17] diz:

> *A palavra tangente vem do latim , que significa "tocando". Assim uma tangente a uma curva é uma reta que toca a curva. Ou seja, uma reta que deve ter a mesa direção que a curva no ponto de contato [...].Para um círculo, poderíamos simplesmente, como Euclides, dizer que a tangente é uma reta que intercepta o círculo uma única vez, conforme figura 3.2* (a). *Para as curvas mais complexas essa definição é inadequada. A figura 3.2 (b), mostra duas retas l e t, passando sobre o ponto P da curva C. A reta l intercepta C somente uma vez, mas certamente não aparenta ser o que pensamos ser uma reta tangente. A reta t, por outro lado, aparenta ser uma tangente, mas intercepta C duas vezes* (em P e P').

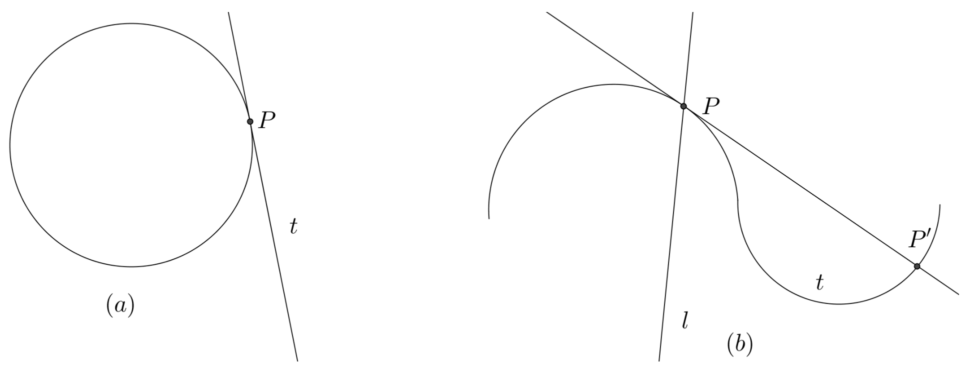

Figura 3.2-Fonte [17]-ADAPTADO

Nessa perspectiva retas paralelas a uma parábola são as da forma apresentadas na figura 3.3.

O conceito de reta secante de uma curva qualquer é similar ao estudado na geometria plana (aquela reta que corta a curva em dois ou mais pontos), não admitindo ambiguidade para a situação em questão.

De posse desses conceitos e com o que estudamos até aqui, vamos determinar a equação da reta que passa tangenciando a parábola dada por $y = x^2$, no ponto $P(1,1)$. A determinação da equação de uma reta se dá encontrando os valores dos coeficientes angular e linear. Podemos iniciar tentando encontrar o valor de m, pois de posse deste e sabendo que a reta passa por $(1,1)$ torna-se fácil determinar b. O nosso primeiro

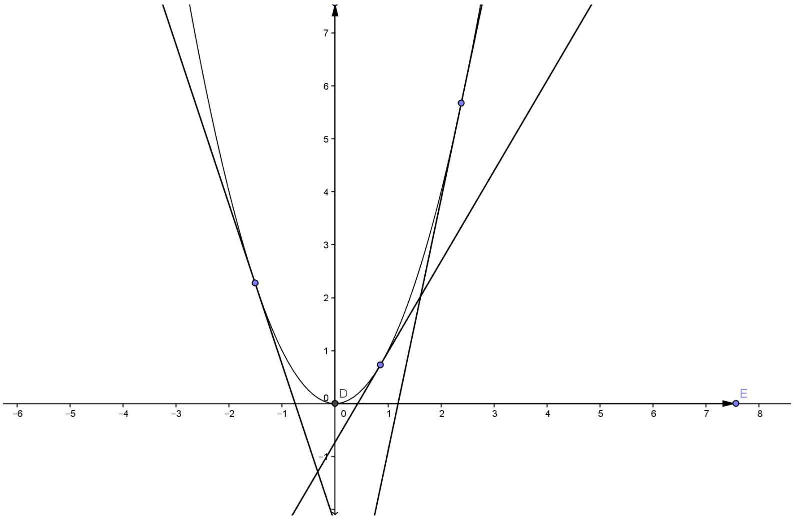

Figura 3.3

problema reside em termos apenas um ponto sobre a reta t e precisamos de dois para determinar o coeficiente angular de uma reta. Assim podemos achar uma aproximação para m somando um valor $h > 0$ a x, para determinar o segundo ponto Q e calcular o coeficiente angular m_{PQ} da reta secante PQ. Conforme a figura 3.4.

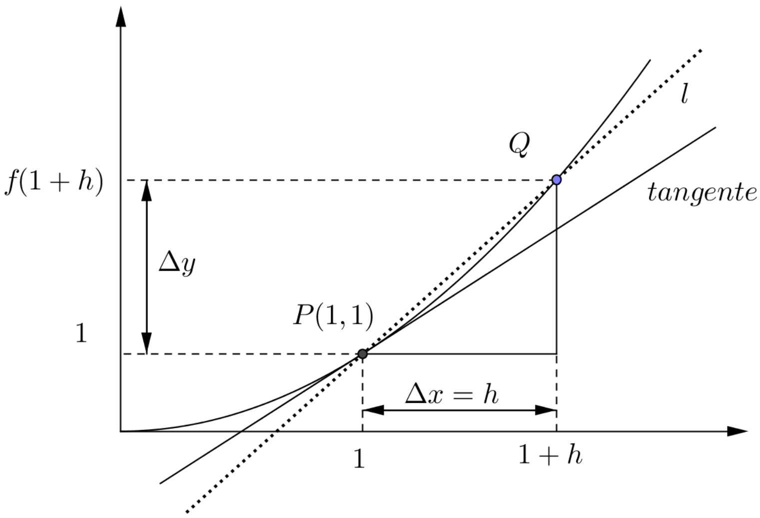

Figura 3.4

Pela figura, percebemos intuitivamente que fixando o ponto P e diminuindo progressivamente o valor de h, leva a reta l, secante ao gráfico, a se aproximar da tangente, como se o ponto Q deslizasse sobre a parábola em direção a P. A tabela 3.2, que mostra os valores de m_{PQ} para alguns valores de h.

A figura 3.4 nos mostra geometricamente que com a redução do valor de h, mantendo P fixo, a reta secante se aproxima progressivamente da tangente. Já na tabela 3.2 com essa mesma condição leva o valor de m_{PQ} a se aproximar de 2, o que nos leva a deduzir que o coeficiente angular da reta tangente é igual a 2.

Tomando (x, y) um ponto qualquer da reta tangente e $(1, 1)$ (ponto de tangência), e aplicando a equação 2.1 podemos encontrar a equação da tangente:

$$2 = \frac{y-1}{x-1} \Rightarrow y - 1 = 2(x-1) \Rightarrow y = 2x - 1$$

Podemos ressumir: *A equação da reta tangente à parábola $y = x^2$ no ponto $P(1, 1)$ é descrita pela equação $y = 2x - 1$* . Conforme a figura 3.5.

h	$(1+h)^2$	$Q\left(1+h, (1+h)^2\right)$	m_{PQ}
1	4	$Q(2, 4)$	$m_{PQ} = \frac{4-1}{2-1} = 3$
0.5	2.25	$Q(1.5, 2, 25)$	$m_{PQ} = \frac{2.25-1}{1.5-1} = 2.5$
0.1	1.21	$Q(1.1, 1.21)$	$m_{PQ} = \frac{1.21-1}{1.1-1} = 2.1$
0.01	1.0201	$Q(1.01, 1.0201)$	$m_{PQ} = \frac{1.0201-1}{1.01-1} = 2.01$
0.001	1.002001	$Q(1.001, 1.002001)$	$m_{PQ} = \frac{1.002001-1}{1.001-1} = 2.001$
0.0001	1.0002	$Q(1.0001, 1.0002)$	$m_{PQ} = \frac{1.0002-1}{1.0001-1} = 2.0001$

Tabela 3.2

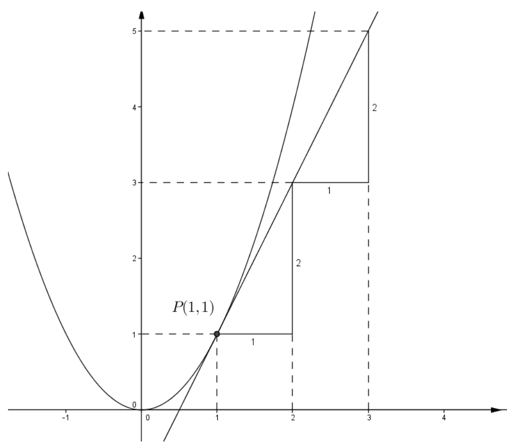

Figura 3.5

Admitiremos agora $P(x, f(x))$ um ponto qualquer sobre a parábola $y = x^2$ e com $h > 0$, tomemos um segundo ponto $Q(x+h, f(x+h))$. Aplicando o equação 2.1 temos que:

$$m_{PQ} = \frac{f(x+h) - f(x)}{(x+h) - x} = \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \frac{x^2 + 2xh - x^2}{h} = \frac{h(2x+h)}{h} = 2x + h$$

Como o coeficiente angular m da reta tangente é o limite[1] da coeficiente angular m_{PQ} da reta secante, quando aproximamos h de zero. Podemos afirmar que:

A equação da reta tangente à parábola $y = x^2$ no ponto $P(x, y)$ e descrita pela equação $y = 2x$.

Esse fenômeno de tornar m_{PQ} tão próximo de m pegando um valor de h, suficientemente pequeno está relacionado com um importante conceito da matemática o conceito de limite. Verbalmente dizemos que: m é limite de $m_{MP} = 2x + h$ quando h tende a zero e é igual a $2x$. Simbolicamente:

$$m = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{(x+h) - x} = \lim_{h\to 0} 2x + h = 2x, \text{ para } f(x) = x^2$$

Utilizando desse atalho torna-se fácil determinar a equação da tangente qualquer que seja o ponto. Vejamos a equação da reta tangente a $y = x^2$ para alguns pontos distintos, sabendo-se que agora que o valor do coeficiente linear é o dobro do valor da abscissa do ponto $(2x)$, conforme a tabela 3.3.

x	$P(x, y)$	Coef. Angular (m)	Eq. da Tangente em $P(x, y)$
2	$P(2, 4)$	$m = 2.2 = 4$	$4 = \frac{y-4}{x-2} \Rightarrow y = 4x - 4$
3	$P(3, 9)$	$m = 2.3 = 6$	$6 = \frac{y-9}{x-3} \Rightarrow y = 6x - 9$
-2	$P(-2, 4)$	$m = 2.(-2) = -4$	$-4 = \frac{y-4}{x+2} \Rightarrow y = -4x - 4$

Tabela 3.3

As retas tangentes anteriores (dadas nos exemplos) foram definidas para o caso da função quadrática específica $y = x^2$, que é apanas um caso particular diante das infinitas possibilidades de composição de uma função quadrática, a partir da variação dos coeficientes de uma função quadrática completa $y = ax^2 + bx + c$. Assim como em $y = x^2$, que encontramos $m = 2x$, buscaremos também a equação da tangente para $y = ax^2 + bx + c$. Temos:

[1]Não entende-se limite como um valor final, mas como está expresso na tabela é aquele valor para o qual a sequência se aproxima. No caso da secante de $y = x^2$ no ponto $P(1, 1)$ temos a sequência (3, 2.5, 2.1, 2.01, 2.001, 2.001,...), que vai tomando valores cada vez menores a medida que h se aproxima de zero. A sequência nunca atingirá seu limite, da mesma forma que h nunca é zero pois do contrário a expressão $m_{PQ} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{h}$ não faria sentido.

m$=\lim_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{(x+h)-x} = \lim_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} =$

$$\lim_{h\to 0}\frac{a(x+h)^2+b(x+h)+c-(ax^2+bx+c)}{h} =$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{\cancel{ax^2}+2axh+h^2+\cancel{c}+\cancel{bx}+bh\cancel{-ax^2}\cancel{-bx}\cancel{-c}}{h} =$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{\cancel{h}(2ax+b+h)}{\cancel{h}} = \lim_{h\to 0} 2ax+b+h = 2ax+b.$$

(3.0)

O limite $\lim_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$ *é conhecido também como derivada da função* $y=f(x)$*, recebendo a notação* $y'=f'(x)$

Obervação: *Seguindo esse processo, é possível estabelecer a derivada de várias funções e composição de funções (trigonométricas, produtos, quocientes), mas que estão além da proposta desse trabalho. A exemplo das funções polinomiais onde em cada uma de suas parcelas é aplicada a regra* $(x^n)'=nx^{n-1}$.

Isto é de grande utilidade para analisar como se comporta o crescimento de uma função, pois a derivada diz o que está acontecendo com a função naquele exato momento. A medida que o ponto de tangência se aproxima do vértice, tanto pela direita quanto pela esquerda, a inclinação da reta vai diminuindo (em módulo)[2] ou seja a derivada tende a zero. Seguindo o mesmo raciocínio de limites é fácil deduzir que, *no vértice a derivada(inclinação da reta tangente) é igual a zero.* Para uma função quadrática qualquer, como vimos acima, $f'(x)=2ax+b$, assim para encontrar o valor de x que faz com que essa derivada seja zero, devemos encontrar a solução para a equação:

$$2x+b=0 \Rightarrow 2x=-b \Rightarrow x=-\frac{b}{a}$$

[2]lembremos que *módulo* é o mesmo que distância de um número qualquer ao número zero, gerando sempre um valor positivo, assim módulo de $|-2|=2$.

O ponto onde $x = \dfrac{-b}{a}$ geometricamente é identificado como coordenada do vértice da parábola, já de forma algébrica determina o valor máximo ou mínimo da função. Como a derivada descreve o comportamento de crescimento da função podemos resumir:

- *No intervalo onde a derivada é positiva a função é crescente*
- *No intervalo onde a derivada é negativa a função é decrescente*
- *A derivada é nula no vértice da parábola*

Geometricamente podemos verificar a partir da figura 3.6.

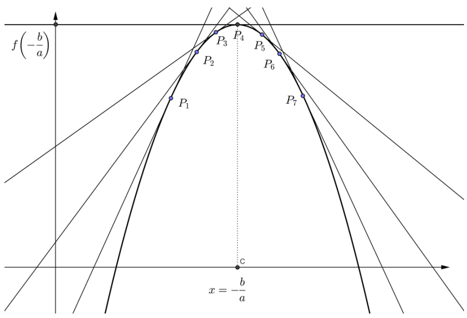

Figura 3.6

Em P_1, a reta tangente apresenta maior inclinação, diminuindo progressivamente em P_2 e P_3, até tornar-se zero em P_4. A partir do vértice a função torna-se decrescente com diminuição do valor da inclinação.
Ou seja:

$$\underbrace{m_1 > m_2 > m_3 >}_{\textbf{intervalo crescente}} m_4 = 0 > \underbrace{m_5 > m_6 > m_7}_{\textbf{intervalo decrescente}}$$

Onde m_i corresponde ao coeficiente angular da reta tangente no ponto P_i.

Capítulo 4

Espaço, Velocidade e Aceleração

Um dos motivos que validam a introdução derivada no ensino médio é sua aplicação na física quando se estuda as relações entre espaço, velocidade e aceleração em função do tempo. O objetivo desse capítulo é rever alguns conceitos básicos de *movimento* da física e aplicar noções de cálculo estudadas até aqui.

Consideraremos um móvel, deslocando-se em um trajetória sob condições ideais, sem influência de sua massa, volumes e qualquer outra força que interfira no seu movimento. Seja $s : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ com $t \to s(t)$ a função de que determina o espaço percorrido pelo móvel durante t unidades de tempo a partir de um certo ponto O e $\Delta s = s(t + \Delta t) - s(t)$ o espaço percorrido no intervalo de tempo de t até $t + \Delta t$.

A razão:

$$v_m = \frac{s(t + \Delta t) - s(t)}{\Delta t} = \frac{\text{percurso precorrido}}{\text{tempo do percurso}} \qquad (4.1)$$

é a *velocidade média* do móvel no intervalo de tempo de t até $t + \Delta t$, que relaciona a variação de posição em relação ao tempo, ou seja, a velocidade diz o quão rápido o móvel faz o percurso.

E:

$$a_m = \frac{v(t + \Delta t) - v(t)}{\Delta t} = \frac{\text{variação de velocidade.}}{\text{tempo do percurso.}} \qquad (4.2)$$

é a aceleração média no intervalo de tempo de t até $t + \Delta t$.

Esta razão determina o comportamento da variação de velocidade do móvel no intervalo, se a velocidade é constante (não há variação de velocidade) a aceleração é nula

Mas, podemos estudar essas grandezas não em um intervalo de tempo, mas sim pontualmente. Podemos encontrar a *velocidade instantânea* $v(t)$ e *aceleração instantânea* $a(t)$, que são a velocidade e a aceleração do móvel no instante t específico, calculando os limites:

$$v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{s(t+\Delta t) - s(t)}{\Delta t} \Rightarrow \textit{A função velocidade é a derivada do função espaço;} \tag{4.3}$$

$$a(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{= v(t+\Delta t) - v(t)}{\Delta t} \Rightarrow \textit{ A função aceleração é derivada da função velocidade} \tag{4.4}$$

Como no movimento uniforme a aceleração é constante, logo a aceleração instantânea tem o mesmo valor que a aceleração média. Tomando $v_0 = v(0)$ (velocidade no instante zero ou velocidade inicial), $v(t)$ velocidade no instante t , a aceleração constante e $\Delta t = t$ temos:

$$a = \frac{v(0+t) - v_0}{t} = \frac{v(t) - v_0}{t} \Rightarrow at = v(t) - v_0 \Rightarrow v(t) = v_0 + at \tag{4.5}$$

Igualando o resultado da equação (4.3) com a equação (4.5), temos:

$$v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{s(t+\Delta t) - s(t)}{\Delta t} = v(t) = v_0 + at$$

$$s'(t) = v_0 + at \qquad (4.6)$$

Obtemos aqui a derivada da função espaço s. Agora, da equação (3.1) temos que

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{(x+h) - x} = 2ax + b \text{ para } f(x) = ax^2 + bx + c$$

.

Vejamos a semelhança entre a derivada de uma função quadrática e a derivada de s expressa na equação (4.6). Derivar uma função polinomial, o resultado é sempre um outro polinômio de grau imediatamente inferior, ou seja, derivando uma função quadrática resulta numa função afim, derivando uma função afim resulta em uma função constante (monômio de grau zero). Observado isso, podemos afirmar que s é uma função quadrática da forma $s(t) = \alpha t^2 + bt + c$ e $s'(t) = 2\alpha t + b$ resta então encontrar os valores de α, b e c resolvendo a igualdade $s'(t) = 2\alpha t + b = v_0 + at$, ou seja:

$$2\alpha t = at \Rightarrow \alpha = \frac{a}{2}$$

$$b = v_0$$

Dessa forma podemos escrever a função do espaço percorrido pelo móvel como:

$$s(t) = \frac{1}{2}at^2 + v_0 + c$$

A constante c corresponde ao ponto de partida do movimento que se torna necessário caso este ponto não corresponda a origem do sistema, como se estivéssemos estudando a distancia percorrida por um automóvel que parte do km c de uma rodovia.

Capítulo 5

Proposta de Abordagem

Neste Capítulo resolveremos exercícios quem envolvem função afim ou quadrática fazendo as duas abordagens, a tradicional e outra utilizando a derivada, a fim de mostrar como a inserção da derivada logo no ano inicial do ensino médio não somente é viável como também é um elemento facilitador da aprendizagem.

Para função afim selecionamos um exercício e sua solução extraído de Lima et.al em [14]:

Exemplo 1. *A escala da figura abaixo é linear. Calcule o valor corresponde ao ponto assinalado.*

Ao dizer que "a escala é linear", estamos afirmando que há deslocamentos iguais ao longo da linha correspondem acréscimos iguais nos números acima dessa linha. Se x é a distância de um ponto ao extremo esquerdo da linha e $f(x)$ é o número acima desse ponto, então $f(x) = ax + b$. Como $f(0) = 17 e f(8) = 59$, temos b=17 e $8a + 17 = 59$, donde $a = 5,25$. Portanto $f(3) = 5,25.3 + 17 = 32,75$.

Agora vejamos uma resolução que aborde as características das variações das grandezas envolvidas na questão.

Utilizando-se da definição dada de "escala linear", podemos afirmar que se trata de modelo de função afim, assim devemos estabelecer uma relação do tipo $f(x) = ax + b$. Um possível entrave está em determinar quem é variável dependente e quem é a independente. Ora, observando a figura 5.1, temos que zero (origem da escala) está relacionado com 17, 8 está relacionado com 59, o problema quer que encontremos o valor de saída quando o valor de entada é 3. Desse modo a função em questão tem domínio $D = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ e contra-domínio o intervalo fechado $CD = [17, 59]$. Resumindo:

$$a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{59 - 17}{8 - 0} = \frac{42}{8} = 5,25 \text{ e } b = f(0) = 17$$

Logo $f(x) = 5,25x + 17$ e $f(3) = 5,25.3 + 17 = 32,75$

Para função quadrática selecionamos um exercício extraído de Penteado e Torres em [18]:

> **Exemplo 2.** *A função horária do espaço de um móvel é dado por*
>
> $$s = 10 - 5t + 5t^2$$
>
> Determine:
>
> **a)** *A função horária da velocidade;*
>
> **b)** *O instante em que o móvel inverte o sentido do seu movimento.*

Em uma abordagem tradicional, no item (a) fazemos a comparação dos coeficientes da função horária do espaço onde $s(t) = c + v_o t + \frac{1}{2}at^2$, com função dada, e concluímos que $v_0 = -5$ e $a = 10$, logo $v(t) = -5 + 10t$. No item (b), o móvel inverte o sentido do movimento no instante em que s atinge seu ponto mínimo que corresponde ao vértice da parábola descrita por $s = 10 - 5t + 5t^2$, assim $t_v = \frac{-(-5)}{2.5} = \frac{1}{2}$ (t do vértice).

Numa solução utilizando-se derivada,no item (a) temos que que $v(t) = s'(t) = -5 + 10t$. e no item b basta saber que o instante onde a derivada é nula corresponde ao instante onde a função do espaço muda de sentido, assim: $v(t) = -5 + 10t = 0 \Rightarrow t = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$

Capítulo 6

Considerações Finais

Este trabalho fez uma apresentação diferenciada de função Afim e Quadrática, com uma sucinta introdução do Cálculo Diferencial, não com intuito de se somar mais conteúdos ao currículo do ensino médio, mas sim ampliar o campo de conhecimento e conceitos da matemática moderna, mostrar novas possibilidades de aplicação e ainda criar um *link* com o ensino superior, já que o Cálculo Diferencial é matéria básica para diversos cursos de nível superior.

Na elaboração e escrita foi-se pensado sempre no leitor do texto: O aluno do 1ª Ano do Ensino Médio de escola pública. É de conhecimento de todos, o baixo índice de proficiência apresentado pelos alunos de escolas públicas que chegam ao ensino médio sem as devidas competências e habilidades para o acompanhamento do currículo, que nesse nível de ensino exige-se mais abstração para compreensão de conceitos, demonstrações e aplicações mais refinadas. Já que no Ensino Fundamental esse aluno trabalhou essencialmente com operações e cálculos numéricos. Por essa razão, o texto foi escrito em uma linguagem menos formal apelando pelo entendimento intuitivo e excluindo, desde que possível, notações, demonstrações e definições mais rebuscadas.

Pela sua estrutura e por não cobrir todo o conteúdo de funções afim e quadrática, esse trabalho deve ser apresentado aos alunos, posteriormente ao estudo tradicional dessas funções, como normalmente aparecem nos livros didáticos e também por ter sido omitido algumas definições importantes levando o aluno a buscá-las em outras fontes.

Em função afim, além de uma forma diferenciada de construção e análise gráfica, foi exposto também a sua caracterização, que é uma ferramenta prática e rápida de se identificar situações concretas que podem ser modeladas a esse tipo de função, que por sua vez que abarca um grande percentual de questões comuns nas provas do ENEM. Em função quadrática, foi omitido a caracterização, pois em sua modelagem exige resolução de sistema linear quadrado de ordem 3 para determinação dos coeficientes a, b e c, que está fora da proposta desse trabalho.

Apêndice A

Um breve descrição histórica do Cálculo

As grandes descobertas da humanidade podem ser divididas em dois grandes blocos: no primeiro bloco, as descobertas são fruto de lampejos de genialidade de um pesquisador ou até um pequeno grupo de pesquisa, já no segundo bloco as invenções ou descobertas são fruto do trabalho árduo de várias mentes ao longo de décadas ou até mesmo de séculos. A teoria do Cálculo, apesar de historicamente ser atribuída a Isaac Newton (1642-1727) e a Gottfried Wilhelm Leibniz (1647-1716), na verdade pertence ao segundo grande bloco. O princípio básico do cálculo pode ser encontrado em trabalhos como de Arquimedes de Siracusa (287-212 a.C), que para calcular áreas e volumes de várias formas planas e sólidas, utilizou-se de um processo similar à moderna teoria de limites. Na verdade, se não fosse pela falta de uma linguagem algébrica, e por não admitirem a existência do infinito, os antigos matemáticos da Grécia teriam plenas condições de desenvolverem a Teoria do Cálculo.

A geometria elementar euclidiana, através do processo de triangulação, nos permite calcular apenas área e o perímetro de qualquer figura poligonal. Mas esse processo se torna inútil, quando estamos tratando de uma figura circular ou curvilínea como uma circunferência. Por outro lado, por uma necessidade de se resolver problemas que envolva esse tipo de figuras, como podemos citar os problemas de navegação e astrologia, ou por pura curiosidade científica, os antigos matemáticos sempre estiveram em busca de soluções para os mistérios das curvas. Qualquer aluno do colegial conhece a aparentemente simples, fórmula para o cálculo de área da uma circunferência. A constante irracional π que aparece ao longo da história como o grande mistério da circunferência. Ela é determinada pela razão do comprimento da circunferência pelo diâmetro e ao longo do séculos foi a razão de exaustivos trabalhos para se determinar seu valor exato, o que nunca era conseguido, quanto mais os cálculos eram apurados mais algarismos significativos eram encontrados. Em um texto egípcio de 1650 a.C conhecido por Papiro de Rhind , foi encontrado um problema de cálculo de área em que se pode deduzir o valor de aproximadamente de $\pi = 3,16049$ que está bem próximo do valor verdadeiro aproximando para 5 casas decimais que é de 3,1459 (MAOR,2008 p.62). Atualmente com utilizando-se um C.A.S (sistema algébrico computacional), como o Maple, ou Derive em um computador pessoal, pode-se encontrar uma aproximação de centenas de milhares de casas decimais. Apesar da exaustiva busca por valores cada vez mais refinados o valor encontrado no Papiro de Rhind, é suficiente para solução da maioria do problemas de engenharia da atualidade.

Bibliografia

[1] BRASIL, Ministério da Educação. **Parâmetros Curriculares Nacionais**. ensino Médio: Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias - PCNEM. Brasília: MEC, 2000.

[2] ________. **PCN+ Ensino Médio**. Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais. Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Brasília: MEC, 2002.

[3] ________. **Proposta à Associação Nacional dos Dirigentes das Instituições Federais de Ensino Superior**. Brasília: MEC, [2008?]. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/index.php?option=com_docman&task=doc_download&gid=768&Itemid=>. Acesso em: 09 dez. 2013.

[4] ________. **Matriz de Referência para Enem 2009**. Brasília: MEC, [2008?]. Disponível em:<http://portal.mec.gov.br/index.php?option=com_docman&task=doc_download&gid=841&Itemid= >. Acesso em: 09 dez. 2013.

[5] MAGGI, Lectícia. Raio-x do Enem: os conteúdos mais cobrados desde 2009. **VEJA**, [São Paulo?], 02, 2013. Disponível em: <http://veja.abril.com.br/noticia/educacao/raio-x-do-enem-os-conteudos-mais-cobrados-desde-2009>. Acesso em 10 de dezembro de 2013.

[6] IEZZI, Gersom. et al. **Matemática Ciência e Aplicações**, vol. 1, 6 ed. São Paulo: Saraiva, 2010.

[7] ________. **Matemática Ciência e Aplicações**, vol. 2, 6 ed. São Paulo: Saraiva, 2010.

[8] ________. **Matemática Ciência e Aplicações**, vol. 3, 6 ed. São Paulo: Saraiva, 2010.

[9] PAIVA, Manoel. **Matemática**, vol. 1, São Paulo: Moderna, 2009.

[10] ________. **Matemática**, vol. 2, São Paulo: Moderna, 2009.

[11] ________. **Matemática**, vol. 3, São Paulo: Moderna, 2009.

[12] ÁVILA, Geraldo **Várias Faces da Matemática:Tópicos para licenciatura e leitura em geral**. 2 ed. São Paulo:Edgard Blucher, 2010.

[13] LIMA, Elon L. et al. **A Matemática do Ensino Médio**. vol.1, 9 ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006.

[14] ________. **A Matemática do Ensino Médio**. vol.4. Rio de Janeiro: SBM, 2010. Volume 1, Capítulo 5; p.23-32.

[15] HOWARD, Eves **Introdução à história da matemática**. São Paulo: Unicamp, 2004.

[16] BOYER, Carl B. **História da matemática**. 2 ed.São Paulo:Edgard Blucher Paulo, 1996.

[17] STEWART, James. **Cálculo**, vol. 1,.6 ed. São Paulo: Cengage Learning, 2010.

[18] PENTEADO, Paulo César M., e TORRES, Carlos Magno A., **Física Ciência e Tecnologia**. vol. 1, São Paulo:Moderna, 2005. p.57.

[19] MAOR, Eli. ***e*: A História de um número** . vol.1, 9 ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006.