UNIVERSIDADE FEDERAL DO MARANHÃO
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM
MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT

EVANILSON SANTOS SILVA

DIAGONALIZAÇÃO DE MATRIZES: uma abordagem no ensino médio

São Luís
2014

EVANILSON SANTOS SILVA

DIAGONALIZAÇÃO DE MATRIZES: uma abordagem no ensino médio

Dissertação apresentada ao curso de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional da Universidade Federal do Maranhão, para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. José Antônio Pires F. Marão

São Luís
2014

Silva, Evanilson Santos

Diagonalização de matrizes: uma abordagem no ensino médio / Evanilson Santos Silva. — 2014.

69 f.

Impresso por computador (Fotocópia).

Orientador: Prof. Dr. José Antônio Pires F. Marão

Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do Maranhão, Programa de Mestrado Profissional em Matemática, 2014.

1. Matrizes 2. Determinantes 3. Sistemas Lineares 4. Espaço Vetorial 5. Produto Interno I. Título

CDU 512.643

EVANILSON SANTOS SILVA

DIAGONALIZAÇÃO DE MATRIZES: uma abordagem no ensino médio

Dissertação apresentada ao curso de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional da Universidade Federal do Maranhão, para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Trabalho aprovado. São Luís, 28 de abril de 2014:

Prof. Dr. José Antônio Pires F. Marão
(Orientador)

Prof. Dr. Félix Silva Costa

Prof. Dr. Moíseis dos Santos Cecconello

São Luís
2014

Aos meus amados pais Edson e Marinilza, aos meus amados irmãos, ao meu grande amor Luzia Maria e aos meus amados filhos Thiago e Sophia.

AGRADECIMENTOS

Aos meus pais Edson e Marinilza pelo dom da vida, amor, incentivo, apoio e encorajamento em toda a minha caminhada pessoal, educacional e profissional;

A minha esposa luzia, a quem amo e admiro, está sempre em sintonia comigo, ouve-me, motiva-me, conforta-me, provoca-me e torce incondicionalmente pelo meu sucesso;

Aos professores do DEMAT-UFMA que aceitaram o desafio de acolher o PROFMAT nessa instituição e não medem esforços para o sucesso do programa e dos alunos;

Ao meu orientador prof. Marão, que com muita atenção, zelo e amizade, me acompanhou nessa etapa;

Aos membros da banca examinadora, pelo tempo despendido na leitura deste trabalho e pelas importantes sugestões apontadas;

À Sociedade Brasileira de Matemática (SBM) e ao Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA) pela concepção do programa que oportuniza o sonho de pós-graduação a muitos professores de matemática;

À coordenação nacional do PROFMAT pela dedicação e comprometimento;

Aos meus queridos colegas do polo, pelos momentos de alegria e tensão que passamos juntos durante o curso, especialmente Walter, João e Josivaldo, e aos colegas de todos os outros polos do país, que mesmo sem nos conhecermos, a união através da plataforma foi decisiva para minha integralização neste curso;

Enfim, agradeço a todos os meus amigos, mesmo aqueles com quem mantenho contato apenas nas redes sociais, aos meus familiares e conhecidos que me querem bem, me ajudam e torcem para que meus sonhos se tornem realidade.

“É fundamental diminuir a distância
entre o que se diz e o que se faz,
de tal maneira que num dado momento
a tua fala seja a tua prática.”
(Paulo Freire)

RESUMO

Busca-se as definições de matrizes, determinantes, sistemas lineares, espaço vetorial com produto interno, autovalores e autovetores de matrizes. Aborda-se, em seguida, a diagonalização de matrizes e sua aplicação na identificação de cônicas não degeneradas, a saber: elipse, hipérbole e parábola.

Palavras-chaves: Matrizes. Determinantes. Sistemas lineares. Espaço vetorial. Produto interno. Autovalor de Matrizes. Autovetor de Matrizes. Diagonalização de matrizes.

ABSTRACT

Search the definitions of matrices, determinants, linear systems, vector inner product space, eigenvalues and eigenvectors of matrices. Is approached-then the diagonalization of matrices and its application in the identification of non-degenerate conic, namely: ellipse, parabola and hyperbola.

Keywords: Matrices. Determiners. Linear systems. Vector space. Inner product. Eigenvalue of matrices. Eigenvector of matrices. Diagonalization of matrices.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

LISTA DE TABELAS

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

O objetivo deste trabalho é explorar as definições de matrizes, determinantes, sistemas lineares, autovalor e autovetor de matrizes, tendo como enfoque principal o processo de diagonalização de matrizes e suas aplicações, em particular a identificação de cônicas não degeneradas. A diagonalização de matrizes não faz parte do currículo do Ensino Médio. No entanto, são vários os conteúdos do currículo do Ensino Médio onde esse fundamento pode ser utilizada. Um deles está relacionado com a identificação de cônicas não degeneradas: elipse, hipérbole e parábola. Segundo os PCN:

> *"Cabe à Matemática do Ensino Médio apresentar ao aluno o conhecimento de novas informações e instrumentos necessários para que seja possível a ele continuar aprendendo".*(PCN, 1999).

Para alcançar os objetivos deste trabalho, ele foi organizado em capítulos, da seguinte forma:

a) O capítulo 1 contém uma breve história sobre matrizes e determinantes organizada, considerando a ordem cronológica e incluindo fatos relacionados a vários conceitos trabalhados no contexto de matrizes, dos determinantes e dos sistemas lineares. O capítulo 1 também traz conceitos como: definição de matriz, matrizes especiais, operações com matrizes, definição e cálculo de determinantes, definição de sistema linear e métodos de resolução de sistemas lineares 2×2. Os conceitos, em sua maioria, são apresentados com exemplos que fixam as ideias definidas.

b) O capítulo 2 aborda os conceitos básicos de Espaço Vetorial e Produto Interno.

c) No capítulo 3, foram abordados os conceitos de Autovalor, Autovetor e Diagonalização de matrizes.

d) No capítulo 4, foi feita uma aplicação da Diagonalização de matrizes, a saber, a identificação de cônicas não degeneradas.

e) A conclusão consiste em sugestões para trabalhos futuros, e ressalta as aplicações de matrizes escopo do trabalho.

1 MATRIZES, DETERMINANTES E SISTEMAS LINARES

1.1 BREVE HISTÓRIA SOBRE MATRIZES E DETERMINANTES

O livro chinês *"Nove capítulos sobre a arte matemática"*, escrito por volta de 250 a.C., é uma das obras mais antigas que faz menção à ideia de matrizes. Nessa obra, surge o primeiro registro de um quadrado mágico cuja soma dos números que estão nas linhas, colunas e diagonais é sempre igual a 15 (tabela 1.1)

2	9	4
7	5	3
6	1	8

Tabela 1 – Quadrado mágico

Segundo Iezzi e Hazzan:

> *O início da teoria das matrizes remota a um artigo de Arthur Cayley (1821-1895) publicado em 1855. Diga-se de passagem, porém, que o termo matriz já fora usado com o mesmo sentido, cinco anos antes por Sylvester (1814-1897). Nesse artigo Cayley fez questão de salientar que, embora logicamente a ideia de matriz preceda a de determinante, historicamente ocorreu o contrário: de fato, os determinantes já eram usados há muito tempo na resolução de sistemas lineares. Quanto às matrizes, Cayley as introduziu para simplificação da notação de uma transformação linear. Assim, em lugar de*
>
> $$\begin{cases} x' = ax + by \\ y' = cx + dy \end{cases}$$
>
> *escrevia*
>
> $$(x', y') = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} (x, y)$$
>
> *A observação do efeito de duas transformações sucessivas sugeriu-lhe a definição de produto de matrizes. Daí chegou à ideia de inversa de uma matriz, o que obviamente pressupõe a de elemento neutro ou identidade (denotado atualmente por I). Curiosamente, foi só em outro artigo, três anos depois, que Cayley introduziu o conceito de adição de matrizes e o de multiplicação de matrizes por*

> *escalares, chamando inclusive a atenção para as propriedades algébricas dessas operações. Ao desenvolver a teoria das matrizes, como outros assuntos, a grande preocupação de Cayley era com a forma e a estrutura em álgebra. O século XX se encarregaria de encontrar inúmeras aplicações para as matrizes.*(2004, p. 77)

Historicamente, os determinantes surgiram no século XVII com os estudos sobre a resolução de um sistema de equações lineares. Segundo Iezzi:

> *"Os primeiros trabalhos sobre determinantes teriam surgido, quase na mesma época, no Oriente e no Ocidente: em 1683, em um artigo do matemático japonês Seki Kowa (1642-1708) e, dez anos depois, com o alemão Leibniz (1646-1716). Ambos desenvolveram expressões matemáticas ligadas aos coeficientes das incógnitas das equações de um sistema linear." [...]* (Iezzi, et al., 2010)

De acordo com Iezzi:

> *"no século XVIII, matemáticos como Gabriel Cramer (1704-1752), Etienne Bézout (1730-1783), Pierre Simon Laplace (1749-1827)e Alexandre T. Vandermonde (1735-1796) publicaram artigos sobre os determinantes e deixaram contribuições valiosas."*(2010, p.121).

Ainda segundo Iezzi:

> *"no século XIX, os trabalhos mais importantes sobre a teoria dos determinantes foram os publicados por Jacobi (1804-1851) e Cauchy (1789-1857). Atribui-se a Cauchy o título de criador do termo determinante. Ele também foi responsável por reunir, em 1812, tudo o que era conhecido até então sobre o assunto."*(2010, p.121).

1.2 MATRIZES

Definição 1.2.1 *Iezzi e Hazzan (2004, p. 44) definem matrizes como: "Dados dois números m e n naturais e não nulos, chama-se matriz m por n (indica-se $m \times n$) toda tabela M formada por números reais distribuídos em m linhas e n colunas."*

Cada elemento (ou entrada) da matriz é um um número real representado por a_{ij}. Essa notação facilita a localização do elemento, pois o índice i indica qual é a linha e o índice j indica qual é a coluna às quais o elemento pertence. Por convenção, as linhas são numeradas de cima para baixo (de 1 até m) e as colunas, da esquerda para a direita (de 1 até n). Assim, uma matriz $m \times n$ (m linhas e n colunas) é representada, de forma geral, por:

$$M = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Exemplo 1.2.1

$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ *é uma matriz* 2×2 *(possui duas linhas e duas colunas).*

Exemplo 1.2.2

$\begin{bmatrix} 1 & 6 & 1 \\ 0 & 3 & 3 \end{bmatrix}$ *é uma matriz* 2×3 *(possui duas linhas e três colunas).*

Exemplo 1.2.3

$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ *é a matriz* 2×1 *(possui duas linhas e uma coluna).*

Também é possível representar a matriz $m \times n$ por $M = (a_{ij})_{m \times n}$ com i variando de 1 até m e j variando de 1 até n.

1.2.1 MATRIZES ESPECIAIS

Veja, agora, algumas matrizes que recebem nomes especiais:

1. Matriz linha: é toda matriz do tipo $1 \times n$, isto é, é uma matriz que tem uma única linha.

   Exemplo:

   $\begin{bmatrix} 1 & 5 & 2 \end{bmatrix}$ é uma matriz linha do tipo 1×3.

2. Matriz coluna: é toda matriz do tipo $m \times 1$, isto é, é uma matriz que tem uma única coluna.

   Exemplo:

   $\begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}$ é uma matriz coluna do tipo 3×1.

3. Matriz nula: é toda matriz que tem todos os elementos iguais a zero.

   Exemplo:

$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ é uma matriz nula do tipo 2×2.

4. Matriz quadrada de ordem n: é toda matriz do tipo $n \times n$, isto é, é uma matriz que tem igual número de linhas e colunas.

   Exemplo:
   $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ é uma matriz quadrada de $2^{\underline{a}}$ ordem.

   Chama-se *diagonal principal* de uma matriz quadrada de ordem n o conjunto dos elementos que tem o número da linha igual ao número da coluna, isto é:

   $$\{a_{ij} \backslash i = j\} = \{a_{11}, a_{22}, \cdots, a_{nn}\}$$

   No exemplo acima, os elementos que estão na diagonal principal são os números 1 e 4.

   Chama-se *diagonal secundária* de uma matriz quadrada de ordem n o conjunto dos elementos que tem a soma do número da linha com o número da coluna igual a $n+1$, isto é:

   $$\{a_{ij} \backslash i + j = n + 1\} = \left\{a_{1n}, a_{(2,n-1)}, \ldots, a_{n1}\right\}$$

   No exemplo acima, os elementos que estão na diagonal secundária são os números 3 e 2.

5. Matriz diagonal: é toda matriz quadrada em que os elementos que não pertencem a diagonal principal são iguais a zero.

   Exemplo:
   $\begin{bmatrix} -8 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ é uma matriz diagonal de $2^{\underline{a}}$ ordem.

6. Matriz identidade: é toda matriz diagonal em que os elementos da diagonal principal são todos iguais a um.

   Exemplo:
   $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ é uma matriz identidade de $2^{\underline{a}}$ ordem.

   A matriz identidade é denotada por I_n (onde n é a ordem da matriz), ou simplesmente por I.

1.2.2 IGUALDADE DE MATRIZES

Duas matrizes $A = (a_{ij})_{m\times n}$ e $B = (b_{ij})_{m\times n}$ são iguais quando $a_{ij} = b_{ij}$ para todo $i \in \{1, 2, 3, \cdots, m\}$ e todo $j \in \{1, 2, 3, \ldots, n\}$. Isto significa que para serem iguais duas matrizes devem ser do mesmo tipo e apresentar todos os elementos correspondentes (elementos com os mesmos índices) iguais.

Considere as matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & c \\ -2 & a \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} d & 4 \\ b & 0 \end{bmatrix}$$

Se $A = B$, então, tem-se:

$$\begin{cases} a & = & 0 \\ b & = & -2 \\ c & = & 4 \\ d & = & 1 \end{cases}$$

1.2.3 ADIÇÃO DE MATRIZES

A adição de matrizes é definida somente para matrizes de mesma ordem. Se A e B são duas matrizes de mesma ordem $m \times n$, a soma destas duas matrizes, denotada $A + B$, é também uma matriz $m \times n$, cujo elemento na posição ij é definido como sendo a soma dos elementos de A e B que ocupam a posição ij. Ou seja, se

$$A = (a_{ij})_{m\times n} \text{ e } B = (b_{ij})_{m\times n}$$

então $C = A + B$ é a matriz $C = (c_{ij})_{m\times n}$ definida por:

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$$

Exemplo. Sejam

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

então

$$A + B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+1 & 3+4 \\ 2+2 & 5+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$$

Se A e B são matrizes de mesma ordem, então valem as seguintes propriedades:

1. Comutatividade

$$A + B = B + A$$

2. Associatividade

$$A + (B + C) = (A + B) + C$$

3. Existência de elemento neutro

$$A + 0 = 0 + A = A$$

onde 0 é a matriz nula.

4. Existência de elemento simétrico

$$A + (-A) = 0$$

1.2.4 PRODUTO DE UM NÚMERO POR UMA MATRIZ

Dado um número k e uma matriz $A = (a_{ij})_{m\times n}$, chama-se produto kA a matriz $B = (b_{ij})_{m\times n}$ tal que $b_{ij} = ka_{ij}$ para todo i e todo j. Isto significa que multiplicar uma matriz A por um número k é construir uma matriz B formada pelos elementos de A todos multiplicados por k.

Exemplo. Se

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

então:

$$3A = 3\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3\cdot 1 & 3\cdot 3 \\ 3\cdot 2 & 3\cdot 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 9 \\ 6 & 0 \end{bmatrix}$$

Se A é uma matriz e se α e β são números reais, então valem as seguintes propriedades:

1. Associatividade

$$\alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A$$

2. Distributividade

$$(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$$

$$\alpha(A+B) = \alpha A + \alpha B$$

3. Existência de elemento neutro

$$1A = A$$

1.2.5 MULTIPLICAÇÃO DE MATRIZES

Dadas duas matrizes $A = (a_{ij})_{m\times n}$ e $B = (b_{jk})_{n\times p}$, chama-se produto AB a matriz $C = (c_{ik})_{m\times p}$ tal que:

$$c_{ik} = a_{i1}\cdot b_{1k} + a_{i2}\cdot b_{2k} + \cdots + a_{in}\cdot b_{nk} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jk}$$

para todo $i \in \{1,\ 2,\ 3, \ldots,\ m\}$ e todo $k \in \{1,\ 2,\ 3, \ldots,\ p\}$.

Observações

- A definição dada garante a existência do produto AB somente se o número de colunas de A for igual ao número de linhas de B, pois A é do tipo $m \times n$ e B é do tipo $n \times p$.
- A definição dada afirma que o produto AB é uma matriz que tem o número de linhas de A e o número de colunas de B, pois $C = AB$ é do tipo $m \times p$.

Segue um exemplo:

Dados $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$, calcular AB.

Sendo A do tipo 2×2 e B do tipo 2×2, decorre que existe AB é do tipo 2×2. Fazendo $AB = C$, deve-se calcular c_{11}, c_{12}, c_{21} e c_{22}:

$$C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\cdot 1 + 2\cdot 0 & 1\cdot 3 + 0\cdot 0 \\ 0\cdot 1 + 2\cdot 2 & 0\cdot 3 + 2\cdot 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$$

A multiplicação de matrizes apresenta as seguintes propriedades:

1. Associativa: $(AB)\,C = A(BC)$, quaisquer que sejam as matrizes $A = (a_{ij})_{m\times n}$, $B = (b_{ij})_{m\times n}$ e $C = (c_{ki})_{n\times p}$;

2. Distributiva à direita em relação à adição: $(A+B)\,C = AC + BC$, quaisquer que sejam as matrizes $A = (a_{ij})_{m\times n}$, $B = (b_{ij})_{m\times n}$ e $C = (c_{ki})_{n\times p}$;

3. Distributiva à esquerda em relação à adição: $C(A+B) = CA + CB$, quaisquer que sejam as matrizes $A = (a_{ij})_{m\times n}$, $B = (b_{ij})_{m\times n}$ e $C = (c_{ki})_{p\times m}$;

4. $(kA)B = A(kB) = k(AB)$ quaisquer que sejam as matrizes $A = (a_{ij})_{m\times n}$ e $B = (b_{ij})_{n\times p}$;

Considerações:

- É muito importante notar que a multiplicação de matrizes não é comutativa, isto é, para duas matrizes quaisquer A e B nem sempre é válido que $AB = BA$.
- Quando as matrizes A e B são tais que $AB = BA$, diz-se que as matrizes comutam. Observa-se que uma condição necessária para que as matrizes **A** e **B** comutem é que sejam quadradas e de mesma ordem.
- É importante notar também que a implicação:

$$AB = 0 \Longrightarrow A = 0 \text{ ou } B = 0$$

  não é válido para as matrizes, isto é, é possível encontrar duas matrizes não nulas cujo produto é a matriz nula.

  Exemplo:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

1.2.6 MATRIZ TRANSPOSTA

Dada uma matriz $A = (a_{ij})_{m\times n}$, chama-se transposta de A a matriz $A^T = (a_{ji})_{n\times m}$, tal que $a_{ji} = a_{ij}$, para todo i e todo j. Isto significa que a primeira coluna de A^T é igual a primeira linha de A. Dessa forma, conclui-se que as colunas de A^T são ordenadamente iguais as linhas de A.

Exemplo:

$$A = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \Longrightarrow A^T = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

Se A e B são matrizes convenientes, então são verdadeiras as seguintes propriedades:

1. $\left(A^T\right)^T = A$
2. $(A + B)^T = A^T + B^T$
3. $(AB)^T = B^T A^T$
4. $(\alpha A)^T = \alpha A^T$

1.2.7 MATRIZ INVERTÍVEL

Seja A uma matriz quadrada de ordem n. A matriz A é invertível se existir uma matriz B tal que $AB = BA = I_n$. Se A não é invertível, então A é denominada matriz singular.

Dada uma matriz invertível A, chama-se inversa de A a matriz A^{-1} (que é única) tal que $AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$.

Considere as matrizes A e B abaixo:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} 7 & -3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

Observe que

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 & -3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$BA = \begin{bmatrix} 7 & -3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Portanto, a matriz B é a inversa da matriz A, ou seja, $B = A^{-1}$.

Uma maneira prática de determinar a inversa (se existir) de uma matriz 2×2 é usar a fórmula:

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \Longrightarrow A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

Proposição. Se uma matriz possui inversa, então esta inversa é única.

Prova: Suponha que

$$AB_1 = B_1A = I$$

$$AB_2 = B_2A = I$$

Tomando a equação $B_1A = I$, por exemplo, e multiplicando ambos os lados desta equação à direita por B_2, obtém-se:

$$(B_1A)B_2 = IB_2$$

Como $(B_1A)B_2 = B_1(AB_2)$ e $IB_2 = B_2$, temos:

$$(B_1A)B_2 = IB_2 \Longrightarrow B_1(AB_2) = B_2$$

Se a matriz B_2 é inversa de A, então $AB_2 = I$. Sendo assim, tem-se:

$$B_1(AB_2) = B_2 \Longrightarrow B_1I = B_2 \Longrightarrow B_1 = B_2$$

Logo, se a inversa de uma matriz existir, ela será única.

Propriedades.

1. Se A é invertível, então $(A^{-1})^{-1} = A$
2. Se A e B são invertíveis, então $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$
3. Se A é invertível, então $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$
4. Se $AB = I$ então $BA = I$

A propriedade 4 diz que para verificar se uma matriz é invertível, basta verificar se ela possui uma inversa à direita ou uma inversa à esquerda.

Cabe citar que matrizes podem também possuir inversas à direita e à esquerda, sendo que tais casos estão fora do escopo do presente trabalho. Porém, podem ser analisados com detalhes no apêndice A (página 72)

1.3 DETERMINANTES

A definição de Determinante só é válida para o conjunto das matrizes quadradas cujos elementos são números reais. Sendo assim, seja A uma matriz de ordem $n \leq 3$ pertencente a esse conjunto. O determinante da matriz A (cuja notação é $det\,(A)$ ou $|A|$) é o número obtido operando com os elementos de A da seguinte maneira:

1. Para o caso em que a ordem de A é $n = 1$, seu determinante é justamente seu único elemento, ou seja:

$$A = [a_{11}] \Longrightarrow detA = a_{11}$$

. Exemplo:

$$A = [-5] \Longrightarrow det\,(A) = -5$$

.

2. Para o caso em que a ordem de A é $n = 2$, seu determinante será o produto dos elementos da diagonal principal menos o produto dos elementos da diagonal secundária, isto é,

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \Longrightarrow det\,(A) = ad - bc$$

   Exemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{bmatrix} \Longrightarrow det\,(A) = 1 \cdot 7 - 3 \cdot 2 = 7 - 6 = 1$$

3. Para o caso em que a ordem de A é $n = 3$, usa-se o dispositivo prático conhecido como regra de Sarrus para o cálculo do determinante da matriz A. Assim, considerando:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

   tem-se

$$det\,(A) = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} - a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} - a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32} - a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33}$$

   Exemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 1 \\ 2 & 5 & 0 \end{bmatrix}$$

$$det\,(A) = 1 \cdot 4 \cdot 0 + 2 \cdot 1 \cdot 2 + 0 \cdot 5 \cdot 3 - 2 \cdot 4 \cdot 3 - 2 \cdot 0 \cdot 0 - 5 \cdot 1 \cdot 1 = -25$$

Observações:

- A fórmula usada para calcular a inversa de uma matriz 2×2 pode ser simplificada usando a definição de determinante.

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \Longrightarrow A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

  como $det\,(A) = ad - bc$, segue que

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \Longrightarrow A^{-1} = \frac{1}{det\,(A)} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

- Os determinantes citados acima são aqueles necessários para as aplicações propostas no trabalho presente. No entanto, é possível obter o determinante de matrizes quadradas de ordem $n \geq 4$ aplicando-se o conceito de cofator.

  Considere A uma matriz quadrada de ordem n. Denota-se por M_{ij} a submatriz quadrada de ordem $n-1$ obtida de A pela eliminação da *i-ésima* linha e *j-ésima* coluna. O determinante $det(M_{ij})$ é chamado de menor relativo ou determinante menor ao elemento a_{ij} de A. O cofator de a_{ij}, denotado por A_{ij}, é o determinante menor com o sinal correspondente:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j}\, det\,(M_{ij})$$

Exemplo 1:

Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \end{bmatrix}$

Considere a matriz M_{13} obtida pela eliminação da primeira linha e da terceira coluna de A. Então, a matriz M_{13} é dada por:

$$M_{13} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \text{ e } det\,(M_{13}) = 9$$

Logo, $A_{13} = (-1)^{1+3}\, det\,(M_{13}) = 1 \cdot 9 = 9$

O Determinante da matriz A é igual a soma dos produtos obtidos pela multiplicação dos elementos de qualquer linha (ou coluna) por seus respectivos cofatores, ou seja:

$$det\,(A) = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in},\; i = 1, 2, \ldots, n$$

ou

$$det\,(A) = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj},\; j = 1, 2, \ldots, n$$

Exemplo 2. Calcule o determinante da matriz A:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

Escolhendo a primeira linha, o determinante da matriz A será igual a:

$$det\,(A) = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} + a_{14}A_{14}$$

Como

$$M_{11} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix} \Longrightarrow det\,(M_{11}) = -9 \Longrightarrow A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot (-9) = -9$$

$$M_{12} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 4 \end{bmatrix} \Longrightarrow det\,(M_{12}) = 12 \Longrightarrow A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot 12 = -12$$

$$M_{13} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \Longrightarrow det\,(M_{13}) = 27 \Longrightarrow A_{13} = (-1)^{1+3} \cdot 27 = 27$$

$$M_{14} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \end{bmatrix} \Longrightarrow det\,(M_{14}) = 0 \Longrightarrow A_{14} = (-1)^{1+4} \cdot 0 = 0$$

Segue que

$det\,(A) = 1 \cdot (-9) + 2 \cdot (-12) + 0 \cdot 27 + 3 \cdot 0 = -33$

1.4 SISTEMAS LINEARES

1.4.1 EQUAÇÃO LINEAR

Define-se equação linear, nas incógnitas $x_1, x_2, \cdots, x_n$, como toda equação da forma $a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b$, onde $a_1, a_2, \cdots, a_n$ são números reais denominados de coeficientes da equação e b é o termo independente.

Exemplos:

a) $2x_1 - 3x_2 + 10x_3 = 4$

b) $x_1 - x_2 + x_3 = 0$

c) $-5x_1 + x_2 - \frac{1}{2}x_3 - 15 = 0$

1.4.2 SOLUÇÃO DE UMA EQUAÇÃO LINEAR

Uma sequência de números reais $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ é solução de uma equação linear $a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b$ se for verdadeira a sentença:

$$a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + \cdots + a_n\alpha_n = b$$

Considere a equação linear $2x_1 - 3x_2 + 12x_3 = 4$. Observe que a sequência $(5, -2, -1)$ é solução desta equação, pois:

$$2 \cdot 5 - 3 \cdot (-2) + 12 \cdot (-1) = 10 + 6 - 12 = 4$$

1.4.3 SISTEMA DE EQUAÇÕES LINEARES

Um conjunto com m equações lineares e n incógnitas é chamado de sistema linear. Assim, uma forma de representar um sistema linear é:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{cases}$$

Usando a definição de multiplicação de matrizes, pode-se escrever o sistema linear na forma matricial. Veja:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

Exemplo:

Considere o sistema de equações lineares

$$\begin{cases} 2x + y + 2z = 3 \\ 5x + y + 3z = 6 \\ x + y + z = 2 \end{cases}$$

Escrevendo-o na forma matricial, tem-se:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 5 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix}$$

1.4.4 SOLUÇÃO DE UM SISTEMA LINEAR

Uma sequência de números reais $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ é solução de um sistema linear

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & = & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{cases}$$

se essa sequência for solução de todas as equações do sistema.

Exemplo:

Considere o sistema linear

$$\begin{cases} 2x + y + 2z & = & 3 \\ 5x + y + 3z & = & 6 \\ x + y + z & = & 2 \end{cases}$$

Observe que a sequência $(1, 1, 0)$ é solução do sistema, pois satisfaz todas as equações. Veja:

$2 \cdot 1 + 1 + 2 \cdot 0 = 2 + 1 + 0 = 3$
$5 \cdot 1 + 1 + 3 \cdot 0 = 5 + 1 + 0 = 6$
$1 + 1 + 2 \cdot 0 = 1 + 1 + 0 = 2$

1.4.5 SISTEMA LINEAR HOMOGÊNEO

Um sistema linear será dito homogêneo se o termo independente de todas as equações for igual a zero.

Exemplo:

$$\begin{cases} 2x + y + 2z & = & 0 \\ 5x + y + 3z & = & 0 \\ x + y + z & = & 0 \end{cases}$$

1.5 MÉTODOS DE RESOLUÇÃO DE SISTEMAS LINEARES 2×2

Um sistema linear 2×2, nas incógnitas x e y , é um conjunto de duas equações lineares em que x e y são as incógnitas de cada uma dessas equações.

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

Tem-se, a seguir, alguns métodos para resolver esse tipo de sistema.

1.5.1 MÉTODO DA ADIÇÃO

O método da adição consiste em eliminar uma das incógnitas (x ou y) através da soma das equações. Para que isso seja possível, é necessário que os coeficientes da incógnita x (ou y) sejam simétricos.

Veja como proceder para eliminar uma das incógnitas usando o método da adição.

Considere o sistema

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

Para eliminar, por exemplo, a incógnita x, deve-se multiplicar a primeira equação por a_2 e a segunda equação por $-a_1$. Assim, tem-se:

$$\begin{cases} \quad a_2a_1x + a_2b_1y & = & a_2c_1 \\ (-a_1)a_2x + (-a_1)b_2y & = & (-a_1)c_2 \end{cases}$$

Agora, somando as equações, tem-se:

$$(a_2a_1 - a_1a_2)x + (a_2b_1 - a_1b_2)y = a_2c_1 - a_1c_2$$

Como $a_2a_1 - a_1a_2 = 0$, resulta que

$$y = \frac{a_2c_1 - a_1c_2}{a_2b_1 - a_1b_2}$$

Para determinar o valor de x, basta substituir o valor de y em qualquer uma das equações do sistema. Observe que também poder-se-ia ter multiplicado a primeira equação por $-a_2$ e a segunda equação por a_1. Para eliminar a incógnita y o procedimento é análogo.

Segue um exemplo:

Resolver o sistema pelo método da adição:

$$\begin{cases} x + 4y = 100 \\ 2x + 3y = 90 \end{cases}$$

Para eliminar a incógnita x, por exemplo, deve-se multiplicar todos os termos da equação $x + 4y = 100$ por (-2) e depois somar o resultado com a equação $2x + 3y = 90$, isto é:

$$\begin{cases} (-2)\cdot x + (-2)\cdot 4y & = & (-2)\cdot 100 \\ 2x+3y & = & 90 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} -2x-8y=-200 \\ 2x+3y=90 \end{cases}$$

Agora, somando as equações, tem-se:

$$-2x+2x-8y+3y=-200+90 \Longrightarrow -5y=-110 \Longrightarrow y=\frac{-110}{-5}=22$$

Agora, substituindo $y=22$ na equação $x+4y=100$, resulta:

$$x+4\cdot 21=100 \Longrightarrow x+88=100 \Longrightarrow x=100-88 \Longrightarrow x=12$$

Logo, $(12,22)$ é a solução do sistema.

1.5.2 MÉTODO DA SUBSTITUIÇÃO

O objetivo desse método é o mesmo do método da adição, ou seja, deve-se eliminar uma das incógnitas. A estratégia é isolar uma das incógnitas (da primeira ou segunda equação) e substituí-la na outra equação.

Veja como proceder para eliminar uma das incógnitas usando o método da substituição.

Considere o sistema

$$\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{cases}$$

Para eliminar, por exemplo, a incógnita x, isola-se a incógnita x na primeira equação, isto é:

$$a_1x+b_1y=c_1 \Longrightarrow a_1x=c_1-b_1y \Longrightarrow x=\frac{c_1-b_1y}{a_1}$$

Agora, substituindo x na segunda equação, tem-se:

$$a_2x+b_2y=c_2 \Longrightarrow a_2\frac{c_1-b_1y}{a_1}+b_2y=c_2$$

que resulta em:

$$y=\frac{a_1c_2-a_2c_1}{a_1b_2-a_2b_1}$$

Para determinar o valor de x, basta substituir o valor encontrado para y na expressão:

$$x=\frac{c_1-b_1y}{a_1}$$

O procedimento é análogo para eliminar a incógnita y .

Segue um exemplo:

Resolver o sistema abaixo usando o método da substituição:

$$\begin{cases} x + 4y = 100 \\ 2x + 3y = 90 \end{cases}$$

Para eliminar a incógnita x, deve-se, primeiro, isolar x na primeira equação, isto é:

$$x + 4y = 100 \Longrightarrow x = 100 - 4y$$

Agora, deve-se substituir esse resultado na segunda equação, ou seja:

$$2x + 3y = 90 \Longrightarrow 2(100 - 4y) + 3y = 90 \Longrightarrow 200 - 8y + 3y = 90 \Longrightarrow -5y = 90 - 200 \Longrightarrow y = \frac{-110}{-5} = 22$$

Agora, substituindo $y = 22$ na equação $x = 100 - 4y$, tem-se:

$$x = 100 - 4y \Longrightarrow x = 100 - 4 \cdot 22 \Longrightarrow x = 100 - 88 \Longrightarrow x = 12$$

Logo, $(12, 22)$ é a solução do sistema, que cabe lembrar, verifica as duas equações do sistema de forma simultânea[1].

1.6 INTERPRETAÇÃO GEOMÉTRICA E CLASSIFICAÇÃO DE UM SISTEMA LINEAR 2×2

Uma equação linear com duas variáveis pode ser interpretada como a lei de formação de uma função afim cujo gráfico é uma reta. Assim, pode-se classificar os sistemas de acordo com a posição relativas de duas retas.

1. As retas são concorrentes: Quando isso ocorrer, haverá um ponto apenas em comum e diz-se que o sistema é possível e determinado (SPD), visto que só existirá uma única solução.

   Segue um exemplo.

   Observe o sistema:

   $$\begin{cases} x + y = 5 \\ 2x - y = 1 \end{cases}$$

[1] Tal fato pode ser interpretado por retas que têm interseções no ponto $(12, 22)$ tal que $x + 4y = 100$ e $2x + 3y = 90$ são equações de retas. Fatos mais gerais serão analisados em seguida.

Observem que a equação linear $x + y = 5$ é equivalente a $y = 5 - x$, que é a lei de formação de uma função afim, cujo gráfico é uma reta que passa pelos pontos $(0, 5)$ e $(5, 0)$. A equação $2x - y = 1$ é equivalente a $y = 2x - 1$, cujo gráfico é a reta que passa pelos pontos $(0, -1)$ e $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$. Construindo os gráficos dessas funções, tem-se:

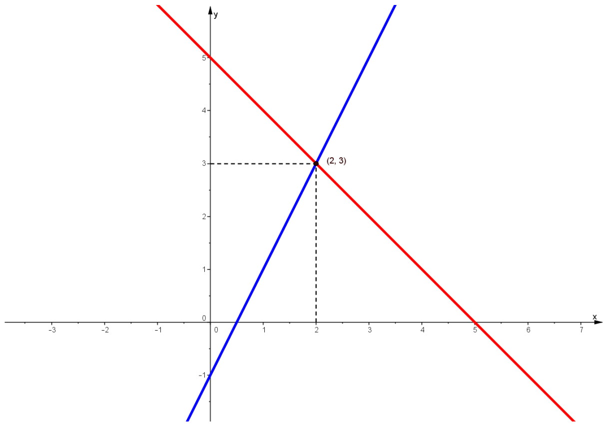

Figura 1 – Sistema Possível e Determinado

Observando a figura 1, nota-se que o ponto (2,3) é o único ponto de intersecção dessas retas, ou seja, as retas são concorrentes. Portanto, o sistema é possível e determinado cuja única solução é o ponto (2,3).

2. As retas são paralelas: Quando isso ocorrer, as retas não terão pontos em comum e diz-se que o sistema é impossível (SI).

   Segue um exemplo.

   Observe o sistema:

$$\begin{cases} x + y = 5 \\ x + y = 4 \end{cases}$$

   Observem que a equação linear $x + y = 5$ é equivalente a $y = 5 - x$, que é a lei de uma função afim, cujo gráfico é uma reta que passa pelos pontos $(0, 5)$ e $(5, 0)$. A equação$x + y = 4$ é equivalente a $y = x - 4$, cujo gráfico é a reta que passa pelos pontos$(0, -4)$ e $(4, 0)$. Construindo os gráficos dessas funções, tem-se:

   Observando a figura 2, nota-se que as retas são paralelas, ou seja, não possuem pontos em comum. Portanto, o sistema é impossível.

3. As retas são coincidentes: Quando isso ocorrer, as retas terão infinitos pontos em comum e diz-se que o sistema é possível e indeterminado (SPI), visto que existirão soluções (possível), porém infinitas (indeterminado).

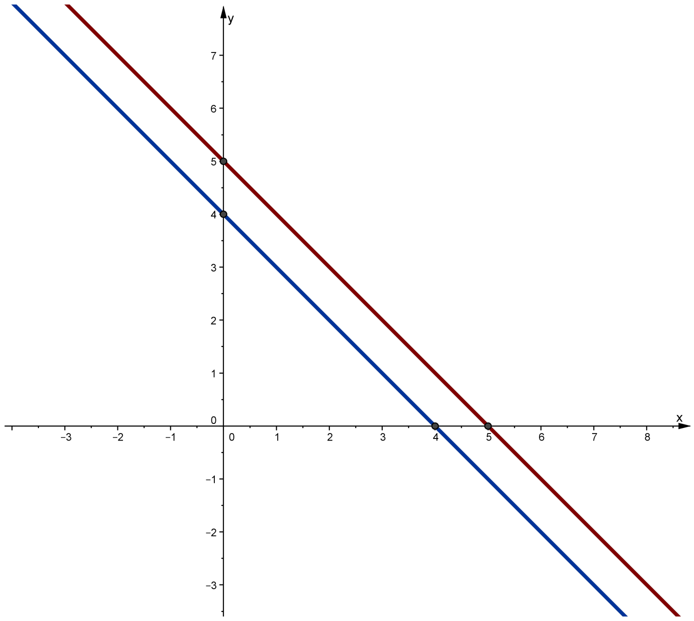

Figura 2 – Sistema Impossível

Segue um exemplo.

Observe o sistema:

$$\begin{cases} x + y = 5 \\ 4x + 4y = 20 \end{cases}$$

Procedendo de maneira análoga ao que foi feito nos exemplos anteriores, constrói-se (figura 3) os gráficos das funções $y = 5 - x$ e $y = \frac{20-4x}{4}$.

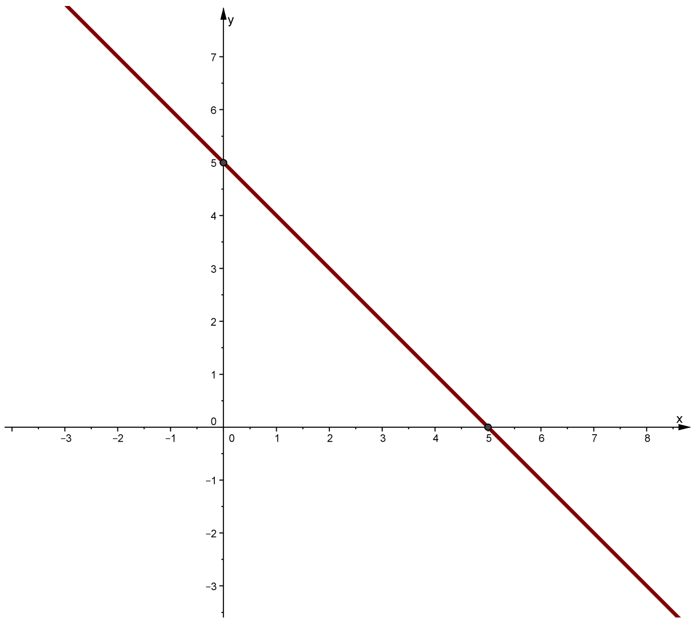

Figura 3 – Sistema Possível e Indeterminado

Observando a figura 3, nota-se que as retas possuem infinitos pontos em comum, ou seja, as retas são coincidentes. Portanto, o sistema é possível e indeterminado.

Resumindo:

1. Sistema possível e determinado (SPD).
    - Tem solução única.
    - Retas concorrentes.

2. Sistema Possível e Indeterminado (SPI).
    - Tem infinitas soluções.
    - Retas coincidentes.

3. Sistema Impossível (SI).
    - Não tem solução.
    - Retas paralelas.

1.7 REGRA DE CRAMER

A regra de Cramer é um dos métodos mais tradicionais para resolver sistemas lineares. A vantagem dessa regra está no fato de explicitar o valor das incógnitas através da divisão de dois determinantes. Porém, há desvantagens: o determinante da matriz dos coeficientes deve ser diferente de zero; o número de equações deve ser igual ao número de incógnitas; o custo operacional é elevado, uma vez que requer o cálculo de vários determinantes.

A seguir, a regra de Cramer para um sistema com duas equações e duas incógnitas. Considere o sistema:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

Segundo a regra de Cramer, a solução (x, y) desse sistema é dada por:

$$x = \frac{det\,(D_x)}{det\,(D)}$$

$$y = \frac{det\,(D_y)}{det\,(D)}$$

onde D é a matriz dos coeficientes, ou seja,

$$D = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix}$$

D_x e D_y são as matrizes obtidas substituindo, respectivamente, a 1ª e a 2ª colunas da matriz D pela coluna dos termos independentes, isto é

$$D_x = \begin{bmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{bmatrix}$$

$$D_y = \begin{bmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{bmatrix}$$

Exemplo:

Considere o sistema

$$\begin{cases} 3x + y = 7 \\ x + 2y = 4 \end{cases}$$

Tem-se que

$$D = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \Longrightarrow det\,(D) = 3 \cdot 2 - 1 \cdot 1 = 6 - 1 = 5$$

Como $det\,(D) \neq 0$, pode-se usar a regra de Cramer. Sendo assim, deve-se calcular $det\,(D_x)$ e $det\,(D_y)$:

$$D_x = \begin{bmatrix} 7 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \Longrightarrow det\,(D_x) = 7 \cdot 2 - 1 \cdot 4 = 14 - 4 = 10$$

$$D_y = \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \Longrightarrow det\,(D_y) = 3 \cdot 4 - 7 \cdot 1 = 12 - 7 = 5$$

Assim, tem-se:

$$x = \frac{det\,(D_x)}{det\,(D)} = \frac{10}{5} = 2$$

$$y = \frac{det\,(D_y)}{det\,(D)} = \frac{5}{5} = 1$$

Logo, a solução do sistema será (2,1).

2 ESPAÇOS VETORIAIS COM PRODUTO INTERNO

2.1 ESPAÇO VETORIAL

Definição 2.1.1 *Seja um conjunto V, não vazio, sobre o qual estão definidas as operações de adição e multiplicação por um escalar, ou seja,*

$$\forall u, v \in V \Longrightarrow u + v \in V$$

$$\forall \lambda \in \mathbf{R}, \forall u \in V \Longrightarrow \lambda u \in V$$

O conjunto V com essas duas operações é chamado ***espaço vetorial real*** *(ou espaço vetorial sobre $\mathbf{R}$) se as seguintes propriedades forem satisfeitas:*

1. *Em relação à adição: $\forall u, v, w \in V$*

   a) $(u + v) + w = u + (v + w)$

   b) $u + v = v + u$

   c) $0 \in V$ *tal que* $u + 0 = u$

   d) $-u \in V$ *tal que* $u + (-u) = 0$

2. *Em relação à multiplicação por escalar: $\forall u, v \in V$ e $\forall \alpha, \beta \in \mathbf{R}$*

   a) $(\alpha\beta)u = \alpha(\beta u)$

   b) $(\alpha + \beta)u = \alpha u + \beta u$

   c) $\alpha(u + v) = \alpha u + \alpha v$

   d) $1u = u$

Exemplo 2.1.1 $V = \mathbf{R}^2 = \{(x, y)/x, y \in \mathbf{R}\}$ *é um espaço vetorial com as operações usuais de adição e multiplicação por escalar:*

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$
$$\alpha(x, y) = (\alpha x, \alpha y)$$

2.1.1 PROPRIEDADES DOS ESPAÇOS VETORIAIS

Da definição de espaço vetorial V decorrem as seguintes propriedades:

1. Existe um único vetor nulo em V (elemento neutro da adição)
2. Cada vetor $u \in V$ admite apenas um simétrico $(-u) \in V$.
3. Para quaisquer $u, v, w \in V$, se $u + v = u + w$, então $v = w$.
4. Qualquer que seja $v \in V$, tem-se $-(-v) = v$.
5. Quaisquer que sejam $u, v \in V$, existe um e somente um $w \in V$ tal que $u + w = v$. Esse vetor w será representado por $w = v - u$.
6. Qualquer que seja $v \in V$, tem-se $0v = 0$.
7. Qualquer que seja $\alpha \in \mathbf{R}$, tem-se $\alpha 0 = 0$.
8. Se $\alpha v = 0$, então $\alpha = 0$ ou $v = 0$.
9. Qualquer que seja $v \in V$, tem-se $(-1)v = -v$.
10. Quaisquer que sejam $u, v \in V$ e $\alpha \in \mathbf{R}$, tem-se $(-\alpha)v = \alpha(-v) = -(\alpha v)$.

2.1.2 COMBINAÇÃO LINEAR

Definição 2.1.2 *Sejam os vetores $v_1, v_2, \cdots, v_n$ do espaço vetorial V e os escalares $a_1, a_2, \cdots, a_n$. Qualquer vetor $v \in V$ da forma $v = a_1v_1, a_2v_2, \cdots, a_nv_n$ é uma combinação linear dos vetores $v_1, v_2, \cdots, v_n$.*

Exemplo 2.1.2 *Em $\mathbf{R}^2$, o vetor $v = (4, 3)$ é uma combinação linear de $v_1 = (1, 2)$ e $v_2 = (2, -1)$, pois $v = (4, 3) = (2+2, 4-1) = (2, 4)+(2, -1) = 2(1, 2)+(2, -1) = 2v_1+v_2$.*

2.1.3 DEPENDÊNCIA E INDEPENDÊNCIA LINEAR

Definição 2.1.3 *Sejam V um espaço vetorial, $A = \{v_1, v_2, \cdots, v_n\} \subset V$ e $a_1v_1 + a_2v_2 + \cdots + a_nv_n = 0$.*

O conjunto A diz-se linearmente independente (L.I.), ou os vetores $v_1, v_2, \cdots, v_n$ são ditos L.I., caso a equação acima admita apenas a solução trivial $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 0$. Se existirem soluções $a_i \neq 0$, para algum $i \in (1, 2, \cdots, n)$, diz-se que o conjunto é linearmente dependente (L.D.).

Exemplo 2.1.3 *Em $V = \mathbf{R}^2$, os vetores $u = (2, -1)$ e $v = (-3, \frac{3}{2})$ são L.D., pois podemos escrever a combinação linear $3u + 2v = 0$.*

Exemplo 2.1.4 *Em $V = \mathbf{R}^2$, os vetores $i = (1, 0)$ e $j = (0, 1)$ são L.I., pois $a_1i+a_2j = 0$ somente se $a_1 = a_2 = 0$*

2.1.4 PROPRIEDADES DA DEPENDÊNCIA E DA INDEPENDÊNCIA LINEAR

Seja V um espaço vetorial.

1. Se $A = \{v\} \subset V$ e $v \neq 0$, então A é $L.I.$
2. Considera-se, por definição, que o conjunto vazio $\varnothing$ é $L.I.$
3. Se um conjunto $A \subset V$ contém o vetor nulo, então A é $L.D.$
4. Se uma parte de um conjunto $A \subset V$ é $L.D.$, então A é também $L.D.$
5. Se um conjunto $A \subset V$ é $L.I.$, então qualquer parte de A é também $L.I.$
6. Se $A = \{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ é $L.I$ e $B = \{v_1, v_2, \cdots, v_n, w\}$ é $L.D.$, então w é combinação linear dos vetores $v_1, v_2, \cdots, v_n$.

2.1.5 BASE DE UM ESPAÇO VETORIAL

Definição 2.1.4 *Um conjunto $B = \{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ é uma base do espaço vetorial V se:*

1. *B é LI;*
2. *B gera V.*

Exemplo 2.1.5 $B = \{(1, 1), (-1, 0)\}$ *é base do* $\mathbf{R}^2$.

Observação 2.1.1 *Quaisquer dois vetores não colineares do $\mathbf{R}^2$, portanto L.I., formam uma base desse espaço.*

Exemplo 2.1.6 $B = \{(1, 0), (0, 1)\}$ *é base do $\mathbf{R}^2$, denominada* ***base canônica****.*

Exemplo 2.1.7 $B = \{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$ *é base canônica do $\mathbf{R}^n$, onde* $e_1 = (1, 0, 0, \cdots, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0, \cdots, 0)$, $\cdots$, $e_n = (0, 0, \cdots, 1)$ *são vetores LI e qualquer vetor* $v = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\} \in \mathbf{R}^n$ *pode ser escrito como* $v = x_1e_1 + x_2e_2 + \cdots + x_ne_n$.

Observação 2.1.2 *Todo conjunto LI de um espaço vetorial V é base do subespaço por ele gerado.*

Teorema 2.1.1 *Se $B = \{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ for uma base de um espaço vetorial V, então:*

1. *todo conjunto com mais de n vetores será L.D.;*
2. *todo conjunto com menos de n vetores não gera V.*

Corolário 2.1.1 *Duas bases quaisquer de um mesmo espaço vetorial têm o mesmo número de vetores.*

2.1.6 MATRIZ DE TRANSIÇÃO DE UMA BASE PARA UMA OUTRA BASE

O desenvolvimento a seguir considera duas bases do $\mathbf{R}^2$, no entanto, o mesmo raciocínio pode ser utilizado para qualquer espaço vetorial V $n - dimensional$.

Sejam $A = \{u_1, u_2\}$ e $B = \{w_1, w_2\}$ bases do $\mathbf{R}^2$. Para qualquer vetor $v \in \mathbf{R}^2$, tem-se:

$$v = au_1 + bu_2 \tag{2.1}$$

Escrevendo o vetor v na forma matricial, tem-se:

$$[v]_A = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \tag{2.2}$$

Como são u_1 e u_2 vetores do $\mathbf{R}^2$, então podem ser escritos como combinação linear dos vetores da base B. Sendo assim, tem-se:

$$\begin{cases} u_1 = a_{11}w_1 + a_{21}w_2 \\ u_2 = a_{12}w_1 + a_{22}w_2 \end{cases} \tag{2.3}$$

Substituindo (2.3) em (2.1), tem-se:

$$v = a\left(a_{11}w_1 + a_{21}w_2\right) + b\left(a_{12}w_1 + a_{22}w_2\right) \tag{2.4}$$

que resulta em

$$v = \left(aa_{11} + ba_{12}\right)w_1 + \left(aa_{21} + ba_{22}\right)w_2 \tag{2.5}$$

Observe que $(aa_{11} + ba_{12})$ e $(aa_{21} + ba_{22})$ são as coordenadas de v em relação à base B. Assim, tem:

$$[v]_B = \begin{bmatrix} aa_{11} + ba_{12} \\ aa_{21} + ba_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \tag{2.6}$$

A matriz (2.7) (denotada por $[I]_B^A$) é denominada a matriz de transição da base A para a base B.

$$[I]_B^A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \tag{2.7}$$

As colunas da matriz (2.7) são as coordenadas dos vetores da base A em relação à base B. Dessa forma, obtém-se a equação matricial:

$$[v]_B = [I]_B^A [v]_A \tag{2.8}$$

Analogamente, para mudança da base B para a base A, tem-se:

$$[v]_A = [I]_A^B [v]_B \tag{2.9}$$

2.1.7 DIMENSÃO DE UM ESPAÇO VETORIAL

Definição 2.1.5 *A dimensão de um espaço vetorial V (denotado por $dimV$) é igual ao número de vetores da base de V.*

Exemplo 2.1.8 *Se $B = \{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ for uma base de um espaço vetorial V, então $dimV = n$.*

Observação 2.1.3 *Se $dimV = n$ e W é subespaço de V, então $dimW \leq n$. Se $dimW = n$, então $W = V$.*

Observação 2.1.4 *Se $dimV = n$, então qualquer subconjunto de V com mais de n vetores é L.D..*

Observação 2.1.5 *Sabendo que a $dimV = n$, para obter uma base de V basta que apenas uma das condições de base esteja satisfeita, pois a outra ocorrerá como consequência, ou seja:*

a) Se $dimV = n$, então qualquer subconjunto de V com n vetores $L.I.$ é uma base de V.

b) Se $dimV = n$, então qualquer subconjunto de V com n vetores geradores de V é uma base de V.

2.2 PRODUTO INTERNO EM ESPAÇOS VETORIAIS

Definição 2.2.1 *Seja V um espaço vetorial. Um produto interno em V é uma função*

$$\langle\, ,\, \rangle : V \times V \longrightarrow \mathbf{R}$$

que satisfaz as seguintes propriedades:

1. *$\langle u, v\rangle = \langle v, u\rangle$ para todos $u, v \in V$;*

2. *$\langle u, v + w\rangle = \langle u, v\rangle + \langle u, w\rangle$ para todos $u, v, w \in V$;*

3. $\langle \alpha u, v \rangle = \alpha \langle v, u \rangle$ *para todos* $u, v \in V$ *e todo* $\alpha \in \mathbf{R}$*;*

4. $\langle u, u \rangle \geq 0$ *para todo* $u \in V$ *e* $\langle u, u \rangle = 0$ *se, e somente se,* $u = 0$

Exemplo 2.2.1 $\langle (a, b), (c, d) \rangle = ac + bd$ *é um produto interno em* $\mathbf{R}^2$*, pois satisfaz todas as propriedades da definição. Este produto interno é facilmente generalizado para* $\mathbf{R}^n$*.*

2.3 PRODUTO INTERNO

Considere o espaço vetorial $\mathbf{R}^2$ munido do produto interno usual, também chamado de produto escalar.

2.3.1 PRODUTO VETORIAL

Definição 2.3.1 *Dados os vetores* $u = (x_1, y_1)$ *e* $v = (x_2, y_2)$*, com* $u, v \in \mathbf{R}^2$*, define-se o produto vetorial entre* u *e* v *como*

$$\langle u, v \rangle = x_1 x_2 + y_1 y_2$$

Usando matrizes, os vetores u e v passam a figurar como matrizes colunas, ou seja:

$$u = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} \text{ e } v = \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

Assim, o produto vetorial entre u e v será:

$$u \cdot v = x_1 x_2 + y_1 y_2 = \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} = u^T v$$

2.3.2 NORMA DE UM VETOR

Definição 2.3.2 *A norma de um vetor* $u = (x, y) \in \mathbf{R}^2$ *é dada por:*

$$||u|| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Exemplo 2.3.1 *Calculando a norma do vetor* $u = (3, 4)$*, tem-se:*

$$||u|| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$$

Observação 2.3.1 *Se* $||u|| = 1$*, então* u *é denominado de vetor unitário.*

Exemplo 2.3.2 *O vetor* $u = (\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}})$ *é unitário, pois*

$$||u|| = \sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2 + \left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{5} + \frac{4}{5}} = \sqrt{\frac{5}{5}} = \sqrt{1} = 1$$

Observação 2.3.2 *Dado um vetor não-nulo u, o vetor unitário na direção de u é o vetor dado por:*

$$\hat{u} = \frac{u}{||u||}$$

diz-se, assim, que o vetor u foi normalizado.

Exemplo 2.3.3 *Normalizando o vetor $u = (3, 4)$, tem-se:*

$$\hat{u} = \frac{u}{||u||} = \frac{(3,4)}{5} = \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$$

Observação 2.3.3 *O ângulo entre os vetores não-nulos $u, v \in \mathbf{R}^2$ é dado por:*

$$\cos\theta = \frac{\langle u, v\rangle}{||u|| \cdot ||v||}$$

Exemplo 2.3.4 *Calculando o ângulo $0 \le \theta \le 90^o$ entre os vetores $u = \left(1, \sqrt{3}\right)$ e $v = (1, 0)$ tem-se:*

$$\cos\theta = \frac{\langle u, v\rangle}{||u|| \cdot ||v||} = \frac{1 \cdot 1 + \sqrt{3} \cdot 0}{\sqrt{1^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2} \cdot \sqrt{1^2 + 0^2}} = \frac{2}{\sqrt{4} \cdot \sqrt{1}} = \frac{1}{2}$$

Logo, $\theta = 60^o$.

Observação 2.3.4 *Dois vetores não-nulos $u, v \in \mathbf{R}^2$ são ortogonais se o ângulo entre eles é de 90. Como $\cos 90 = 0$, tem-se que:*

$$\frac{\langle u, v\rangle}{||u|| \cdot ||v||} = 0 \Longrightarrow \langle u, v\rangle = ||u|| \cdot ||v|| \cdot 0 \Longrightarrow \langle u, v\rangle = 0$$

Logo, se u e v são vetores ortogonais, então $\langle u, v\rangle = 0$.

Observação 2.3.5 *Diz-se que o conjunto $\{u, v\} \in \mathbf{R}^2$ é uma base ortogonal do $\mathbf{R}^2$ se $\langle u, v\rangle = 0$.*

Observação 2.3.6 *Diz-se que o conjunto $\{u, v\} \in \mathbf{R}^2$ é uma base ortonormal do $\mathbf{R}^2$ se $\langle u, v\rangle = 0$ e $||u|| = ||v|| = 1$.*

Exemplo 2.3.5 *O conjunto mais simples de base ortonormal do $\mathbf{R}^2$ é a base $\{e_1, e_2\}$, onde $e_1 = (1, 0)$ e $e_2 = (0, 1)$, conhecida como base canônica.*

3 AUTOVALOR, AUTOVETOR E DIAGONALIZAÇÃO DE MATRIZES 2X2

3.1 AUTOVALORES E AUTOVETORES DE UMA MATRIZ

Definição: Seja A uma matriz quadrada. Diz-se que um escalar λ é um autovalor de A se o sistema homogêneo $(A - \lambda I)X = 0$, onde I é a matriz identidade e X é uma matriz coluna, tem solução não trivial. Toda solução não trivial (quando X não é a matriz nula) do sistema homogêneo $(A - \lambda I)X = 0$ é chamada de autovetor de A, associado ao escalar λ.

Colocando a equação $(A - \lambda I)X = 0$ na forma matricial, tem-se:

$$\begin{bmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}-\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

O sistema homogêneo terá solução diferente da trivial se, e somente se, o determinante da matriz dos coeficientes for igual a zero, isto é:

$$det(A - \lambda I)X = 0.$$

Calculando-se esse determinante, obtém-se uma equação polinomial de grau n na incógnita λ. O polinômio $p(\lambda) = det(A - \lambda I)$ é chamado de polinômio característico da matriz A. Conclui-se assim que λ é um autovalor de A se, e somente se, λ é raiz do polinômio característico da matriz A.

Assim, para obter os autovalores de uma matriz A, determina-se primeiro seu polinômio característico e em seguida calcula-se suas raízes. As raízes do polinômio característico são os autovalores da matriz. Cada autovalor gera um sistema linear homogêneo. Portanto, será necessário resolver os sistemas lineares para assim obter os autovetores da matriz A.

Alguns exemplos importantes:

1) Determine os autovalores e os autovetores da matriz A.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

- Determinação dos autovalores

  Inicialmente, determina-se o polinômio característico da matriz A:

$$A - \lambda I = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-\lambda & 4 \\ 1 & 1-\lambda \end{bmatrix}$$

$$p(\lambda) = det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 4 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix}$$

$$p(\lambda) = (1-\lambda)(1-\lambda) - 4 \cdot 1 = (1-\lambda)^2 - 4 = (\lambda - 3)(\lambda + 1)$$

  Logo, as raízes de $p(\lambda)$ são $\lambda = -1$ e $\lambda = 3$. Portanto, os autovalores da matriz A são -1 e 3.

- Determinação dos autovetores

  Para calcular os autovetores da matriz A, escreve-se a equação $(A - \lambda I)X = 0$ na forma matricial, isto é:

$$(A - \lambda I)X = 0 \Longrightarrow \begin{bmatrix} 1-\lambda & 4 \\ 1 & 1-\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

  A expressão acima gera o sistema:

$$\begin{cases} (1-\lambda)x_1 + 4x_2 = 0 \\ x_1 + (1-\lambda)x_2 = 0 \end{cases}$$

  Para $\lambda = -1$, o sistema resulta em:

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 = 0 \\ x_1 + 2x_2 = 0 \end{cases}$$

  A solução desse sistema é $x_1 = -2x_2$. Fazendo $x_2 = c$, onde c é uma constante arbitrária, resulta que $x_1 = -2c$. Dessa forma, tem-se:

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \Longrightarrow X = \begin{bmatrix} -2c \\ c \end{bmatrix}$$

Tomando $c = 1$, resulta que:

$$X = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Portanto, a matriz X é um autovetor associado ao autovalor $\lambda = -1$.

Para $\lambda = 3$, o sistema resulta em:

$$\begin{cases} -2x_1 + 4x_2 = 0 \\ x_1 - 2x_2 = 0 \end{cases}$$

A solução desse sistema é $x_1 = 2x_2$. Fazendo $x_2 = c$, onde c é uma constante arbitrária, resulta que $x_1 = 2c$. Dessa forma, tem-se:

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \Longrightarrow X = \begin{bmatrix} 2c \\ c \end{bmatrix}$$

Tomando $c = 1$, resulta que:

$$X = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Portanto, a matriz X é um autovetor associado ao autovalor $\lambda = 3$.

2) Determinar os autovalores e os autovetores da matriz B:

$$B = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

- Determinação dos autovalores

  Determinando o polinômio característico:

$$B - \lambda I = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{bmatrix}$$

$$p(\lambda) = det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix}$$

$$p(\lambda) = (-\lambda)(-\lambda) - (-1) \cdot 1 = \lambda^2 + 1$$

Como $\Delta = 0^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = -4 < 0$, $p(\lambda)$ não possui raízes reais. Logo, a matriz B não possui autovalores reais.

A tabela 4.1 descreve as etapas que devem ser seguidas para encontrar os autovalores e autovetores associados de uma matriz.

Etapa 1	Determine o polinômio característico $p(\lambda) = det(A - \lambda I)$
Etapa 2	Encontre as raízes de $p(\lambda) = det(A - \lambda I)$
Etapa 3	Encontre todas as soluções não triviais do sistema $(A - \lambda I)\, X = 0$

Tabela 2 – Procedimento para encontrar autovalores e autovetores de uma matriz

3.2 DIAGONALIZAÇÃO DE MATRIZES 2×2

Duas matrizes quadradas e de mesma ordem A e B são semelhantes se existir uma matriz invertível P tal que:

$$B = P^{-1}AP$$

Uma matriz A é diagonalizável se for semelhante a uma matriz diagonal D. Isto é, existe uma matriz invertível P tal que

$$D = P^{-1}AP$$

Dessa forma, diz-se que a matriz P diagonaliza a matriz A.

Segue um exemplo.

1) Considere as matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix},\ P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \text{ e } P^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Observe que

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Logo, a matriz A é diagonalizável e P é a matriz diagonalizadora de A.

Supondo que a matriz A seja diagonalizável, isto é, que existem as matrizes P (invertível) e D (matriz diagonal) tal que:

$$D = P^{-1}AP$$

Multiplicando à esquerda por P ambos os membros da equação anterior, obtém-se:

$$PD = PP^{-1}AP \Longrightarrow PD = AP$$

Agora, considere

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \text{ e } P = \begin{bmatrix} v_1 & w_1 \\ v_2 & w_2 \end{bmatrix}$$

Fazendo com que as colunas de P sejam

$$V = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \text{ e } W = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix}$$

tem-se

$$P = \begin{bmatrix} V & W \end{bmatrix}$$

Observe que

$$AP = \begin{bmatrix} AV & AW \end{bmatrix}$$

e que

$$PD = \begin{bmatrix} \lambda_1 V & \lambda_2 W \end{bmatrix}$$

Como $AP = PD$, tem-se

$$\begin{bmatrix} AV & AW \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 V & \lambda_2 W \end{bmatrix}$$

Da igualdade acima, resulta que

$$AV = \lambda_1 V$$

$$AW = \lambda_2 W$$

Como $\lambda_1 V = \lambda_1 I V$ e $\lambda_2 W = \lambda_2 I W$, tem-se

$$AV = \lambda_1 V \Longrightarrow AV = \lambda_1 IV \Longrightarrow AV - \lambda_1 IV = 0 \Longrightarrow (A - \lambda_1 I)V = 0$$

$$AW = \lambda_2 W \Longrightarrow AW = \lambda_2 IW \Longrightarrow AW - \lambda_2 IW = 0 \Longrightarrow (A - \lambda_2 I)W = 0$$

Portanto, as colunas da matriz P são justamente os autovetores da matriz A. Já os autovalores da matriz A formam, ordenadamente, a diagonal da matriz D.

Segue um exemplo.

Encontrar a matriz que diagonaliza a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -12 \\ -12 & 11 \end{bmatrix}$$

A matriz que diagonaliza a matriz A é a matriz P cujas colunas são os autovetores de A. Assim, deve-se proceder da seguinte forma:

1º) Cálculo dos autovalores da matriz A.

- Determinação do polinômio característico

$$p(\lambda) = det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 4-\lambda & -12 \\ -12 & 11-\lambda \end{vmatrix}$$

$$p(\lambda) = (4-\lambda)(11-\lambda) - 144 = (\lambda+5)(\lambda-20)$$

Logo, as raízes de $p(\lambda)$ são $\lambda = -5$ e $\lambda = 20$. Portanto, os autovalores da matriz A são -5 e 20.

2) Cálculo dos autovetores da matriz A.

- Para $\lambda = -5$, o sistema $(A - \lambda I)V = 0$ resulta em

$$\begin{cases} 9v_1 - 12v_2 = 0 \\ -12v_1 + 16v_2 = 0 \end{cases}$$

cuja solução é $v_1 = \frac{4}{3}v_2$. Fazendo $v_2 = 3$, tem-se

$$V = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}$$

- Para $\lambda = 20$, o sistema $(A - \lambda I)W = 0$ resulta em

$$\begin{cases} -16w_1 - 12w_2 = 0 \\ -12w_1 - 9w_2 = 0 \end{cases}$$

cuja solução é $w_1 = \frac{-3}{4}w_2$. Fazendo $v_2 = 4$, tem-se

$$W = \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

3º) Montando a matriz diagonalizadora P.

- Como a matriz $P = \begin{bmatrix} V & W \end{bmatrix}$, tem-se

$$P = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

4º) Verificação do resultado.

- A matriz P diagonaliza a matriz A se $P^{-1}AP$ for igual a uma matriz diagonal. Veja

$$P^{-1}AP = \frac{1}{25}\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 & -12 \\ -12 & 11 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & 0 \\ 0 & 20 \end{bmatrix}$$

- Portanto, a matriz P diagonaliza a matriz A. Observe que os elementos que estão na diagonal principal da matriz diagonal são justamente os autovalores da matriz A.

3.2.1 DIAGONALIZAÇÃO DE MATRIZES SIMÉTRICAS 2×2

Os autovalores de uma matriz quadrada nem sempre são reais. Uma prova disso é a matriz $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ cujos autovalores são complexos ($-i$ e i). Assim, nem sempre é possível diagonalizar uma matriz. Essa situação muda se as matrizes são simétricas.

Considerações a respeito das matrizes simétricas:

- Toda matriz simétrica de elementos reais tem autovalores reais.

  Prova. De fato, considere a matriz simétrica

$$\begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}$$

com a, b e c reais. O polinômio característico dessa matriz é

$$p(\lambda) = det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} a - \lambda & b \\ b & c - \lambda \end{vmatrix}$$

$$p(\lambda) = (a - \lambda)(c - \lambda) - b^2 = ac - a\lambda - c\lambda + \lambda^2 - b^2$$

$$p(\lambda) = \lambda^2 - (a + c)\lambda + ac - b^2$$

Calculando o discriminante Δ, tem-se

$$\Delta = [-(a + c)]^2 - 4 \cdot 1 \cdot (ac - b^2) = a^2 + 2ac + c^2 - 4ac + 4b^2$$

$$\Delta = a^2 - 2ac + c^2 + 4b^2 = (a - c)^2 + 4b^2 \geq 0$$

Como $\Delta \geq 0$, as raízes de $p(\lambda)$ são reias. Portanto, os autovalores de uma matriz simétrica são reais.

- Toda matriz simétrica pode ser diagonalizada por uma matriz ortogonal (*Teorema Espectral*).

  Esse teorema diz que toda matriz simétrica é diagonalizável. E além disso, afirma que a matriz diagonalizadora pode ser ortogonal. A demonstração deste teorema foge aos nossos objetivos. No decorrer deste trabalho, será mostrado as fantásticas propriedades das matrizes ortogonais.

3.2.2 MATRIZES ORTOGONAIS

Definição: Uma matriz A é dita ortogonal se $A^T = A^{-1}$, onde A^T é a matriz transposta de A e A^{-1} é a matriz inversa de A. Da definição, decorre que $A^T A = AA^T = I$.

Exemplo: A matriz

$$P = \begin{bmatrix} \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \\ \\ \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \end{bmatrix}$$

é uma matriz ortogonal, pois

$$P^{-1} = P^T = \begin{bmatrix} \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \\ \\ -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} \end{bmatrix}$$

Se A é um matriz ortogonal, então os vetores coluna (ou linha) de A são ortonormais e, portanto, formam uma base ortonormal do $\mathbf{R}^2$.

Prova: Seja A uma matriz ortogonal 2×2

$$A = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{bmatrix}$$

Deve-se mostrar que os vetores coluna

$$u = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} \text{ e } v = \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

são ortonormais. Decorre da definição que $A^T A = I$, isto é:

$$\begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

que resulta em

$$\begin{bmatrix} x_1^2 + y_1^2 & x_1x_2 + y_1y_2 \\ x_1x_2 + y_1y_2 & x_2^2 + y_2^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Observe que $u \cdot u = x_1^2 + y_1^2$, $v \cdot v = x_2^2 + y_2^2$ e $u \cdot v = x_1x_2 + y_1y_2$. Assim, tem-se:

$$\begin{bmatrix} u \cdot u & u \cdot v \\ u \cdot v & v \cdot v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Da igualdade acima, resulta que $u \cdot u = v \cdot v = 1$ e $u \cdot v = 0$. Portanto, os vetores u e v são ortonormais e formam uma base ortonormal do $\mathbf{R}^2$. Esta propriedade é de grande valia na identificação de matrizes ortogonais.

Exemplo: Verificar se a matriz abaixo é ortogonal.

$$A = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \\ -\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}$$

Para saber se a matriz A é ortogonal, deve-se verificar se os vetores coluna

$$u = \begin{bmatrix} \dfrac{2}{\sqrt{5}} \\ \\ -\dfrac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} \text{ e } v = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{5}} \\ \\ \dfrac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}$$

são ortonormais. Para isso, deve-se calcular

$$u \cdot u = \left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2 + \left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2 = \frac{4}{5} + \frac{1}{5} = 1$$

$$v \cdot v = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2 + \left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2 = \frac{1}{5} + \frac{4}{5} = 1$$

$$u \cdot v = \frac{2}{\sqrt{5}} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} + \left(-\frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \frac{2}{\sqrt{5}}\right) = \frac{2}{5} - \frac{2}{5} = 0$$

Como $u \cdot u = v \cdot v = 1$ e $u \cdot v = 0$, os vetores u e v são ortonormais. Portanto, a matriz A é ortogonal.

Seguem algumas propriedades sobre matrizes ortogonais.

Seja A uma matriz ortogonal e sejam $u, v \in \mathbf{R}^2$.

1. A matriz A preserva o produto interno, isto é, $\langle Au, Av \rangle = \langle u, v \rangle$. Em particular, se u e v são vetores ortogonais, então Au e Av também são ortogonais.

   De fato, pois

   $$\Big\langle Au, Av \Big\rangle = (Au)^T(Av) = u^T A^T A v$$

   Como a matriz A é ortogonal, segue que $A^T A = I$. Assim, tem-se:

   $$\Big\langle Au, Av \Big\rangle = (Au)^T(Av) = u^T A^T A v = u^T I v = u^T v = \langle u, v \rangle$$

2. A matriz A preserva a norma, isto é, $||Av|| = ||v||$.

   De fato, pois

   $$||Av|| = \sqrt{Av \cdot Av}$$

Como $Av \cdot Av = v \cdot v$, pois basta tomar $Av = Au$. Assim, tem-se:

$$||Av|| = \sqrt{Av \cdot Av} = \sqrt{v \cdot v} = ||v||$$

Segue um exemplo.

Considere a matriz ortogonal

$$A = \begin{bmatrix} \dfrac{2}{\sqrt{5}} & \dfrac{1}{\sqrt{5}} \\ \\ -\dfrac{1}{\sqrt{5}} & \dfrac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}$$

e o vetor $v = (1, 2)$. Assim, tem-se:

$$Av = \begin{bmatrix} \dfrac{2}{\sqrt{5}} & \dfrac{1}{\sqrt{5}} \\ \\ -\dfrac{1}{\sqrt{5}} & \dfrac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{4}{\sqrt{5}} \\ \\ \dfrac{3}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}$$

Observe que:

$$||Av|| = \sqrt{\left(\frac{4}{\sqrt{5}}\right)^2 + \left(\frac{3}{\sqrt{5}}\right)^2} = \sqrt{5} = \sqrt{1^2 + 2^2} = ||v||$$

3. A matriz A transforma bases ortonormais em bases ortonormais, isto é, se $\{u, v\}$ é uma base ortonormal de $\mathbf{R}^2$, então $\{Au, Av\}$ também é base ortonormal do $\mathbf{R}^2$.

4 RECONHECIMENTO DE CÔNICAS

O presente capítulo mostrará a identificação de cônicas e será aplicada a diagonalização de matrizes para um estudo mais aprofundado.

Sabe-se da geometria elementar que a parábola, a elipse e a hipérbole têm a designação geral de *seções cônicas*, ou simplesmente *cônicas*, pelo fato de serem obtidas por meio de seções planas feitas em uma superfície cônica. Considerando um cone circular reto de vértice V, sendo α o ângulo de uma de suas geratrizes com o eixo. Admitindo uma esfera, inscrita nesse cone segundo uma circunferência c, determinada pelo plano σ que corta a superfície cônica perpendicularmente ao eixo VE. Seja π um plano tangente à esfera inscrita, no ponto F.

Considere β o menor ângulo entre o plano π e o eixo do cone. Traçando a geratriz VMP, sendo M um ponto da circunferência c e P o ponto correspondente da seção cônica, produzida pelo plano π. Ligando F a P e traçando PN perpendicular ao plano π e PQ a d, interseção dos planos σ e π. O plano determinado por PN e PQ interceptará σ segundo a reta NQ, perpendicular a d.

Isto posto, tem-se:

O ângulo $N\hat{P}M$ do triângulo PMN é igual a $M\hat{V}E = \alpha$, uma vez que PN é paralela a VE; logo tem-se

$$PN = PM\cos\alpha$$

O ângulo $N\hat{P}Q$ do triângulo PNQ é igual a β, logo tem-se também:

$$PN = PQ\cos\beta$$

Portanto:

$$PM\cos\alpha = PQ\cos\beta$$

E, sendo $PM = PF$, por serem tangentes traçadas de P à mesma esfera, vem:

$$PF\cos\alpha = PQ\cos\beta$$

Resultando em:

$$\frac{PF}{PQ} = \frac{\cos\alpha}{\cos\beta}$$

A um dado plano secante correspondem um determinado valor de β, um ponto fixo F e uma reta d.

Tomando-se outro ponto $P^{'}$ da seção cônica e repetindo-se a construção feita para o ponto P, os valores de $P^{'}F$ e $P^{'}Q$ são diferentes de PF e PQ, mas a sua razão

$$\frac{P'F}{P'Q} = \frac{\cos\alpha}{\cos\beta}$$

permanece constante, o que permitir concluir que a seção cônica é o lugar geométrico dos pontos de um plano cuja razão das distâncias a um ponto fixo e a uma reta fixa do mesmo plano é constante.

O ponto fixo denomina-se foco, a reta fixa denomina-se diretriz e a constante

$$\frac{\cos\alpha}{\cos\beta}$$

denomina-se excentricidade e representa-se por e.

Variando a posição do plano secante, ou seja, fazendo variar β, o valor de e também vai variar, mudando a natureza da seção cônica. Assim:

1. Se $\beta > \alpha$ (o plano secante corta todas as geratrizes), tem-se $\cos\beta < \cos\alpha$, resultando em $e < 1$; a seção cônica formada é denominada *elipse*. No caso especial de $\beta = 0$ (o plano secante perpendicular ao eixo), tem-se $e = 0$; a seção se transforma na circunferência, que é um caso particular de elipse.

2. Se $\alpha = \beta$ (plano secante paralelo às geratrizes), tem-se $\cos\alpha = \cos\beta$, resultando em $e = 1$; a seção cônica formada é denominada *parábola*.

3. Se $\beta < \alpha$ (o plano secante corta as duas folhas do cone), tem-se $\cos\beta > \cos\alpha$, resultando em $e > 1$; a seção cônica formada é denominada *hipérbole*.

As figuras abaixo ilustram estes fatos:

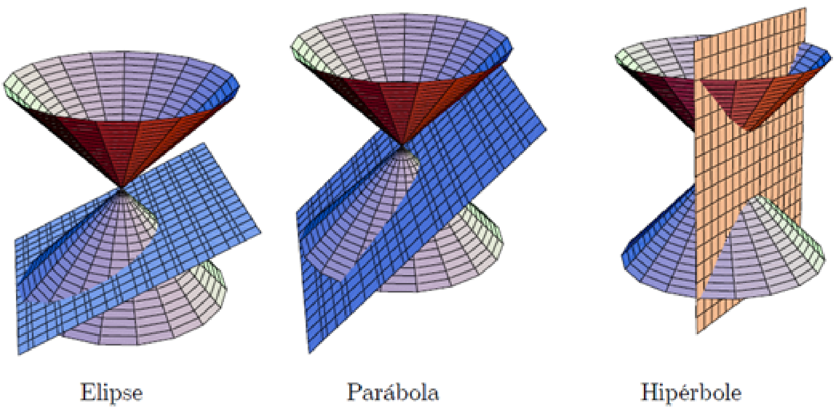

Figura 4 – Cônicas não degeneradas

Observações:

1ª) O ângulo α está compreendido entre 0 e 90°, isto é $0 < \alpha < 90°$; da mesma forma $0 < \beta < 90°$. Em consequência disso, a excentricidade

$$e = \frac{\cos\alpha}{\cos\beta}$$

é sempre positiva.

2ª) Quando o plano π passa pelo vértice, a seção cônica apresenta as seguintes formas:

i. Se $\beta = \alpha$, duas retas coincidentes.

ii. Se $\beta > \alpha$, um ponto.

iii. Se $\beta < \alpha$, duas retas concorrentes.

As cônicas padrão são dadas pelas equações:

1. A elipse de equação $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$
2. A hipérbole de equação $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$
3. A parábola de equação $y^2 = 4cx$

A expressão geral de uma cônica é uma equação do 2º grau da forma:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

O termo xy da equação geral das cônicas é o responsável por rotacionar a cônica. Utilizando a diagonalização de matrizes é possível eliminar esse termo, facilitando a identificação e o esboço do gráfico.

Considere novamente a expressão geral de uma cônica

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0,$$

onde A, B, C, D, E e F são constantes reais. Para o caso em que $B \neq 0$, a classificação da cônica não é trivial como no caso onde $B = 0$. Para tanto, será visto que tal situação pode ser simplificada usando a diagonalização de matrizes.

Percebe-se claramente que:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & \frac{B}{2} \\ \frac{B}{2} & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D & E \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

lembrando que

$$[v]_\beta = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

com $\beta = \{(1,0),(0,1)\}$. Pode-se agora escrever

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

como segue:

$$[v]_\beta^T \begin{bmatrix} A & \dfrac{B}{2} \\ \dfrac{B}{2} & C \end{bmatrix} [v]_\beta + \begin{bmatrix} D & E \end{bmatrix} [v]_\beta + [F] = [0]$$

Observe a matriz logo abaixo:

$$P = \begin{bmatrix} A & \dfrac{B}{2} \\ \dfrac{B}{2} & C \end{bmatrix}$$

como P é simétrica ela é sempre diagonalizável. Além disso, pelo Teorema Espectral, é possível encontrar uma base ortonormal de autovetores de P. Considerando M a matriz formada pelas coordenadas dos autovetores de P (que formam uma base ortonormal), tem-se:

$$M^{-1}PM = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$$

como a matriz M é ortogonal, então $M^{-1} = M^T$. Assim, resulta que:

$$M^T PM = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$$

Fazendo a mudança da base canônica β para uma base α, de modo que M seja a matriz de mudança de base, tem-se:

$$[v]_\beta = M\,[v]_\alpha$$

$$[v]_\beta^T \begin{bmatrix} A & \dfrac{B}{2} \\ \dfrac{B}{2} & C \end{bmatrix} [v]_\beta + \begin{bmatrix} D & E \end{bmatrix} [v]_\beta + [F] = [0]$$

$$[v]_\alpha^T M^T \begin{bmatrix} A & \dfrac{B}{2} \\ \dfrac{B}{2} & C \end{bmatrix} M[v]_\alpha + \begin{bmatrix} D & E \end{bmatrix} M[v]_\alpha + [F] = [0]$$

Observe que

$$M^T \begin{bmatrix} A & \frac{B}{2} \\ \frac{B}{2} & C \end{bmatrix} M = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$$

substituindo em

$$[\upsilon]_\alpha^T M^T \begin{bmatrix} A & \dfrac{B}{2} \\ \dfrac{B}{2} & C \end{bmatrix} M[\upsilon]_\alpha + \begin{bmatrix} D & E \end{bmatrix} M[\upsilon]_\alpha + [F] = [0]$$

que resulta em

$$[\upsilon]_\alpha^T \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} [\upsilon]_\alpha + \begin{bmatrix} D & E \end{bmatrix} M[\upsilon]_\alpha + [F] = [0]$$

Considerando as novas coordenadas de υ na base α como

$$[\upsilon]_\alpha = \begin{bmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{bmatrix}$$

e fazendo

$$\begin{bmatrix} D & E \end{bmatrix} M = \begin{bmatrix} \bar{D} & \bar{E} \end{bmatrix}$$

tem-se que

$$[\upsilon]_\alpha^T \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} [\upsilon]_\alpha + \begin{pmatrix} D & E \end{pmatrix} M[\upsilon]_\alpha + [F] = [0]$$

$$\begin{bmatrix} \bar{x} & \bar{y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{D} & \bar{E} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{bmatrix} + [F] = [0]$$

Agora, efetuando as multiplicações com matrizes em

$$\begin{bmatrix} \bar{x} & \bar{y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{D} & \bar{E} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{bmatrix} + [F] = [0]$$

que resulta em

$$\lambda_1 \bar{x}^2 + \lambda_2 \bar{y}^2 + \bar{D}\bar{x} + \bar{E}\bar{y} + F = 0$$

Observe que, nessa nova base, o termo xy foi eliminado. Isso facilitará a identificação da cônica. Segue um exemplo.

Considerando o caso da cônica dada por:

$$-7x^2 + 6xy + y^2 + \sqrt{10}x - \sqrt{10}y - 8 = 0.$$

Será feita agora a sua identificação. Fazendo:

$$-7x^2 + 6xy + y^2 = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -7 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

e

$$\sqrt{10}x - \sqrt{10}y = \begin{bmatrix} \sqrt{10} & -\sqrt{10} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Vamos, agora, encontrar os autovalores e os autovetores da matriz simétrica

$$P = \begin{bmatrix} -7 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

A equação característica da matriz P é

$$\lambda^2 + 6\lambda - 16 = 0$$

Portanto, as raízes são $\lambda_1 = -8$ e $\lambda_2 = 2$.

Para $\lambda_1 = -8$, tem-se

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Resolvendo o sistema acima, tem-se o autovetor associado ao autovalor $\lambda_1 = -8$:

$$X_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Normalizando esse autovetor, tem-se

$$V_1 = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Procedendo de maneira análoga, encontramos o outro autovetor (já normalizado) associado ao autovalor $\lambda_2 = 2$.

$$V_2 = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

A matriz ortogonal M é formada pelos autovetores (já normalizados) da matriz simétrica P. Assim, tem-se

$$M = \begin{bmatrix} V_1 & V_2 \end{bmatrix}$$

$$M = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

Lembrando que

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 = \lambda_1 \bar{x}^2 + \lambda_2 \bar{y}^2$$

$$Dx + Ey = \begin{bmatrix} D & E \end{bmatrix} M \begin{bmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{bmatrix}$$

Assim, tem-se

$$-7x^2 + 6xy + y^2 = -8\bar{x}^2 + 2\bar{y}^2$$

$$\sqrt{10}x - \sqrt{10}y = \begin{bmatrix} \sqrt{10} & -\sqrt{10} \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{bmatrix} = 4\bar{x} - 2\bar{y}$$

Portanto, a equação da cônica será:

$$-8\bar{x}^2 + 2\bar{y}^2 + 4\bar{x} - 2\bar{y} - 8 = 0$$

ou ainda,

$$-\left(\bar{x}^2 - \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{1}{4}\left(\bar{y}^2 - \frac{1}{2}\right)^2 = 1$$

Fazendo

$$\bar{x}^2 - \frac{1}{4} = \bar{\bar{x}}$$

$$\bar{y}^2 - \frac{1}{2} = \bar{\bar{y}}$$

Tem-se

$$\frac{\bar{\bar{y}}^2}{4} - \bar{\bar{x}}^2 = 1$$

que é a equação de uma hipérbole.

CONSIDERAÇÕES FINAIS E SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

O domínio dos conceitos matemáticos, das demonstrações, das definições é importante para a construção de novos conceitos e isso permite ao estudante a validação de intuições na construção de técnicas aplicadas em diversas situações. De acordo com o PCNEM (BRASIL, 2002, p. 84), o estudante deve: *"compreender os conceitos, procedimentos e estratégias Matemáticas que permitam a ele desenvolver estudos posteriores e adquirir uma formação científica geral"*.

A Matemática, diante disso, tem um papel importante no Ensino Médio, pois cabe a ela a apresentação de novas informações e instrumentos que deem condições ao estudante de continuar aprendendo.

Entende-se a importância do estudo das matrizes, determinantes e sistemas lineares. No entanto, os conhecimentos adquiridos pelos alunos ficam limitados em sua maioria a cálculos abstratos. A estrutura do trabalho busca a intra disciplinaridade percebida quando a Geometria Analítica pode ser estudada com o uso de matrizes, especificamente, as matrizes simétricas e as matrizes ortogonais como foi mostrado nesse trabalho.

Portanto, a perspectiva é que o trabalho aqui apresentado seja usado para futuras aplicações no último ano do Ensino Médio no estudo das cônicas. Isso representará um ganho para os alunos uma vez que serão recordados conceitos de matrizes, determinantes e sistemas lineares no enfoque da geometria analítica.

Além disso, buscar técnicas para a identificação de cônicas de modo geral aumenta a quantidade de conteúdos adquiridos pelos alunos, possibilitando, assim, uma visão geral do conteúdo de cônicas.

Logo, sendo o trabalho utilizado em uma abordagem no Ensino Médio, os alunos terão os seguintes conceitos novos:

- Matrizes inversas (direita e esquerda).
- Autovalor e autovetor de uma matriz.
- Cônicas Gerais (rotacionadas).

que, sem dúvida, aumentarão seus conhecimentos de matemática de um modo geral, e responderão a perguntas que até então não tinham respostas concretas.

Como sugestão, indico a utilização da diagonalização de matrizes no estudo das superfícies quadráticas. A quadrática ou superfície quadrática é o conjunto dos pontos do espaço tridimensional cujas coordenadas formam um polinômio de segundo grau de no máximo três variáveis denominada de equação cartesiana da superfície:

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Eyz + Fxz + Gx + Hy + Iz + J = 0$$

REFERÊNCIAS

NETO, AREF Antar. Combinatória, Matrizes e Determinantes. Noções de Matemática. 2ª ed. São Paulo: Moderna, vol. 4, 2009.

IEZZI, Gelson. Fundamentos de matemática elementar 4: sequências, matrizes, determinantes, sistemas. 7ª ed. São Paulo: Atual, 2004.

IEZZI, Gelson et al. Ciência e Aplicações. 6ª ed. São Paulo: Saraiva, vol. 2, 2010.

LIMA, Elon Lages. A matemática do ensino médio-volume 3/Elon Lages Lima, Paulo Cezar Pinto Carvalho, Eduardo Wagner, Augusto César Morgado. 2006.

LIMA, Elon Lages. Geometria Analítica e Álgebra Linear. Rio de Janeiro: IMPAR, 2011.

ANTON, Howard; RORRES, Chris. Álgebra linear com aplicações. Bookman, 2001.

BOLDRINI, José Luiz; COSTA, Sueli I. Rodrigues; FIGUEIREDO, Vera Lúcia; WETZLER, Henry G.. Álgebra Linear. São Paulo: Editora HARBRA ltda., 1986.

NACIONAIS, Parâmetros Curriculares. Ensino Médio. Brasília: Ministério da Educação, 1999.

BRASIL. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. PCN+ Ensino Médio: Orientações Educacionais complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais. Ciências da Natureza, Matemática e suas tecnologias. Brasília:MEC/SEF, 2002.

LIMA, Elon Lages. Álgebra linear. IMPA, 2006.

STEINBRUCH, Alfredo; WINTERLE, Paulo-Álgebra Linear. São Paulo, 2ª edição. 1987.

GONÇALVES, Zózimo Menna. Geometria analitica no espaco: tratamento vetorial. LTC, 1978.

APÊNDICE A – INVERSA À DIREITA E À ESQUERDA DE UMA MATRIZ

Considere o conjunto de n equações com n incógnitas

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1}x_1 & + & a_{n2}x_2 & + & \cdots & + & a_{nn}x_n & = & b_n \end{cases}$$

Introduzindo as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & + & a_{12} & + & \cdots & + & a_{1n} \\ a_{21} & + & a_{22} & + & \cdots & + & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & + & a_{n2} & + & \cdots & + & a_{nn} \end{bmatrix}, \; x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \; b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

pode-se usar a definição de multiplicação de matrizes para escrever o sistema em notação matricial, isto é

$$Ax = b$$

Observe que a equação em notação matricial pode ser comparada com a equação ordinária $ax = b$ para números reais.

Para resolver $ax = b$, onde a, b e x são números reais, divide-se ambos os lados da equação por a, obtendo-se $x = \frac{b}{a}$. Como A é uma matriz, não fica claro o procedimento para *"dividir"* a equação $Ax = b$ por A. Um caminho é notar que a solução de $ax = b$ pode ser obtida multiplicando-se ambos os lados da equação por $\frac{1}{a}$, ou seja, o inverso de a cuja notação é a^{-1}. Percebe-se, dessa forma, que a maneira correta de determinar a solução da equação $Ax = b$ é tentar encontrar uma matriz G, tal que, ao multiplicar-se ambos os lados de $Ax = b$ por G, obtém-se $GAx = Gb$, de tal forma que o lado esquerdo desta equação resulte em x. Para que isso ocorra, deve-se ter $GA = I$, onde I é a matriz identidade, pois $Ix = x$

Uma propriedade importante da matriz I é que $IA = A$, e $AI = A$. Observe que a matriz I se comporta como o número "1" dos números reais.

As considerações sobre a solução de $Ax = b$ conduzem à seguinte definição.

DEFINIÇÃO 1. Uma matriz G, se existir, é chamada *inversa à esquerda* de A se $GA = I$. Uma matriz H, se existir, é chamada *inversa à direita* de A se $AH = I$.

EXEMPLO 1. Ache uma inversa à direta para a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

SOLUÇÃO. Deve-se achar uma matriz

$$H = \begin{bmatrix} x & z \\ y & w \end{bmatrix}$$

tal que $AH = I$, ou seja

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & z \\ y & w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

que resulta em

$$\begin{cases} 3x + y = 1 \\ x + 2y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3z + w = 0 \\ z + 2w = 1 \end{cases}$$

Resolvendo o primeiro sistema, encontra-se $x = \frac{2}{5}$ e $y = -\frac{1}{5}$. Do segundo sistema, obtém-se $z = -\frac{1}{5}$ e $w = \frac{3}{5}$. Portanto, a matriz procurada é

$$H = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

Se uma matriz G tal que $GA = I$ for determinada por um processo semelhante, então verificar-se-á que G é exatamente igual a matriz H, de maneira que A tem inversas iguais, à esquerda e à direita, ou seja

$$GA = AH = I$$

EXEMPLO 2. A matriz abaixo possui inversa à direita?

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

SOLUÇÃO. Deve-se achar uma matriz

$$H = \begin{bmatrix} x & z \\ y & w \end{bmatrix}$$

tal que $AH = I$, ou seja

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & z \\ y & w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

que resulta em

$$\begin{cases} 3x + y = 1 \\ 3x + y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3z + w = 0 \\ 3z + w = 1 \end{cases}$$

Estes sistemas são, claramente, inconsistentes, isto é, não possuem soluções. Portanto, a inversa à direita não existe. Este exemplo deixa claro que *uma matriz quadrada nem sempre possui inversa.*

Para determinar a inversa à direita de uma matriz $A_{m\times n}$, deve-se tentar achar uma matriz H tal que $AH = I_m$. Para formar o produto AH, a matriz H deve ter n linhas. A igualdade $AH = I$ exige que H tenha m colunas. Portanto, a matriz H deve ser do tipo $n \times m$. De forma análoga, conclui-se que a inversa à esquerda de $A_{m\times n}$ é também da forma $n \times m$.

EXEMPLO 3. Ache uma inversa à direta para a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

SOLUÇÃO. Deve-se achar uma matriz

$$H = \begin{bmatrix} x & z \\ y & w \\ u & v \end{bmatrix}$$

tal que $AH = I_2$, ou seja

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \\ u & v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

que resulta em

$$\begin{cases} x - z + u = 1 \\ x + z + 2u = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y - w + v = 0 \\ y + w + 2v = 1 \end{cases}$$

Resolvendo o primeiro sistema, encontra-se $x = \frac{1-3u}{2}$, $z = \frac{-1-u}{2}$. Do segundo sistema, obtém-se $y = \frac{1-3v}{2}$ e $w = \frac{1-v}{2}$. Fazendo $u = \alpha$ e $v = \beta$, obtém-se

$$H = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1-3\alpha & 1-3\beta \\ -1-\alpha & 1-\beta \\ 2\alpha & 2\beta \end{bmatrix}$$

A matriz A possui uma infinidade de inversas à direita, pois α e β podem assumir quaisquer valores.

TEOREMA 1. Se existirem tanto uma matriz inversa à esquerda quanto uma matriz inversa à direita, então elas são iguais e esta inversa comum é única.

Demonstração: Suponha que G e H representam as inversas à esquerda e à direita de A, respectivamente. Então

$$G = GI = G(AH) = (GA)H = IH = H$$

Suponha que G_1 seja uma outra inversa à esquerda. De forma análoga, conclui-se que $G_1 = G$.

DEFINIÇÃO 2. Se existirem tanto uma inversa à esquerda quanto uma inversa à direita de uma matriz A, esta inversa comum é chamada a *inversa* de A, e é representa por A^{-1}.

DEFINIÇÃO 3. Uma matriz quadrada que possui uma inversa (inversa comum à esquerda e à direita) é chamada de não-singular. Uma matriz quadrada que não possui uma inversa é chamada de singular.

TEOREMA 2. Se A e B são matrizes não-singulares, então

i) $(A^{-1})^{-1} = A$

ii) $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

Demonstração: Por definição de A^{-1}, tem-se que $AA^{-1} = A^{-1}A = I$. Portanto, A^{-1} tem inversas à esquerda e à direita, e isso demonstra (i). Para demonstrar (ii), deve-se provar que AB tem inversas à esquerda e à direita. Observe que

$$B^{-1}A^{-1}(AB) = B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}(I)B = B^{-1}B = I$$

$$(AB)B^{-1}A^{-1} = A(BB^{-1})A^{-1} = A(I)A^{-1} = AA^{-1} = I$$

A matriz $B^{-1}A^{-1}$ é uma matriz inversa à esquerda e à direita de AB. Portanto, $B^{-1}A^{-1}$ é a inversa de AB.

A discussão sobre a inversa foi motivada pela sugestão de que para resolver a equação matricial $Ax = b$ era preciso multiplicá-la por A^{-1} para assim obter $x = A^{-1}b$. Segue um exemplo para tornar isso mais claro.

EXEMPLO 3. Resolva o seguinte conjunto de equações pela fórmula $x = A^{-1}b$.

$$\begin{cases} 2x - 3y = -13 \\ \;\; x + 4y = 10 \end{cases}$$

SOLUÇÃO: Colocando o sistema na forma matricial $Ax = b$

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -13 \\ 10 \end{bmatrix}$$

tem-se que

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \Longrightarrow A^{-1} = \frac{1}{11} \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$b = \begin{bmatrix} -13 \\ 10 \end{bmatrix}$$

Substituindo A^{-1} e b na fórmula $x = A^{-1}b$, tem-se

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{11} \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -13 \\ 10 \end{bmatrix} = \frac{1}{11} \begin{bmatrix} -22 \\ 33 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Portanto, a solução do sistema é $x = -2$ e $y = 3$.

APÊNDICE B – MATRIZ DE UMA TRANSFORMAÇÃO LINEAR

B.1 TRANSFORMAÇÃO LINEAR

Definição B.1.1 *Sejam V e W espaços vetoriais. Uma aplicação $T : V \longrightarrow W$ é denominada transformação linear de V em W se satisfaz às seguintes condições:*

1. $T(u + v) = T(u) + T(v)$
2. $T(au) = aT(u)$, *para* $\forall u, v \in V$ *e* $\forall a \in \mathbf{R}$.

Observação B.1.1 *Em particular, uma transformação linear $T : V \longrightarrow V$ (ou seja, se $W = V$) é chamada operador linear sobre V.*

Exemplo B.1.1 *A transformação $T : \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}^2$ definida por $T(x, y, z) = (x - y, 2x + z)$ é linear (verifique!).*

Exemplo B.1.2 *A função real $F : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$, tal que $F(u) = u^2$ não é uma transformação linear.*

Prova B.1.1 *De fato, pois*

1. $F(u + v) = (u + v)^2 = u^2 + 2uv + v^2 \neq F(u) + F(v)$.
2. $F(au) = (au)^2 = a^2u^2 \neq aF(u)$.

B.2 MATRIZ DE UMA TRANSFORMAÇÃO LINEAR

Definição B.2.1 *Sejam $T : V \longrightarrow W$ uma transformação linear, $A = \{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ uma base de V e $B = \{w_1, w_2, \cdots, w_n\}$ uma base de W. Então $T(v_1), T(v_2), \cdots, T(v_n)$ são vetores de W e podemos escrevê-los como combinação linear dos vetores da base B, isto é:*

$$
\begin{aligned}
&T(v_1) = a_{11}w_1 + a_{21}w_2 + \cdots + a_{m1}w_n \\
&T(v_2) = a_{12}w_1 + a_{22}w_2 + \cdots + a_{m2}w_n \\
&\vdots \\
&T(v_m) = a_{1n}w_1 + a_{2n}w_2 + \cdots + a_{mn}w_n
\end{aligned}
$$

$$[T]_B^A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

é chamada matriz T da transformação em relação às bases A e B.

Como $[T]_B^A$ depende das bases A e B, uma transformação linear poderá ter uma infinidade de matrizes para representá-la. No entanto, uma vez fixadas as bases, a matriz é única.

Pode-se representar a transformação linear pela operação entre matrizes, ou seja:

$$[T(v)]_B = [T]_B^A [v]_A$$

Exemplo B.2.1 *Dada a transformação linear $T : \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}^2$, definida por $T(x, y, z) = (x+y, y-z)$ e considerando as bases $A = (1, 1, 1), (0, 1, 1), (0, 0, 1)$ do $\mathbf{R}^3$ e $B = (1, 1), (0, 2)$ do $\mathbf{R}^2$, tem-se:*

$$\begin{aligned} T(1,1,1) &= (2,0) = a_{11}(1,1) + a_{21}(0,2) \\ T(0,1,1) &= (1,0) = a_{12}(1,1) + a_{22}(0,2) \\ T(0,0,1) &= (0,-1) = a_{13}(1,1) + a_{23}(0,2) \end{aligned}$$

que gera os sistemas

$$\begin{cases} a_{11} = 2 \\ a_{11} + 2a_{21} = 0 \end{cases}, \begin{cases} a_{12} = 2 \\ a_{12} + 2a_{22} = 0 \end{cases}, \begin{cases} a_{13} = 0 \\ a_{13} + 2a_{23} = -1 \end{cases}$$

cujas soluções são $a_{11} = 2$, $a_{21} = -1$, $a_{12} = 1$, $a_{22} = -\frac{1}{2}$, $a_{13} = 0$ e $a_{23} = -\frac{1}{2}$. Logo, tem-se

$$[T]_B^A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$