VICENTE GERALDO DA ROCHA

A IMPORTÂNCIA DOS LOGARITMOS ONTEM E HOJE NO DESENVOLVIMENTO DA MATEMÁTICA E DAS CIÊNCIAS - UMA ABORDAGEM DIDÁTICA

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Viçosa, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação em Matemática, para obtenção do título de *Magister Scientiae*.

VIÇOSA
MINAS GERAIS - BRASIL
2014

VICENTE GERALDO DA ROCHA

A IMPORTÂNCIA DOS LOGARITMOS ONTEM E HOJE NO DESENVOLVIMENTO DA MATEMÁTICA E DAS CIÊNCIAS - UMA ABORDAGEM DIDÁTICA

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Viçosa, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação em Matemática, para obtenção do título de *Magister Scientiae*.

APROVADA: 17 de março de 2014.

Prof. Dr. Olímpio Hiroshi Miyagaki

Prof. Dr. Allan de Oliveira Moura

Prof. Dr. Alexandre Miranda Alves
(Orientador)

AGRADECIMENTOS

A Deus, razão primeira de todas as coisas.

Aos meus pais Benedito Pacífico Rocha e Irene Quintão Rocha pelo apoio, pelos incentivos e principalmente orações.

A minha querida esposa Sônia por compreender as ausências necessárias.

Aos meus filhos, Emano e Emeli, minha maior conquista, motivação e inspiração primeira para minhas realizações.

Aos meus irmãos que mesmo em silêncio torciam por mim.

Aos meus sobrinhos(as), cunhados(as), que com a benção de Deus fazem parte da minha vida.

Aos novos amigos Bruno, Patrick e Vandré, em nome dos quais agradeço a toda turma do mestrado, que juntos colaboraram com o meu crescimento e aprendizado.

Aos professores pela dedicação, paciência e incentivo.

Ao meu orientador Prof. Alexandre Miranda, pelo apoio e paciência durante a realização deste trabalho.

A CAPES pelo apoio financeiro.

Sonhar o sonho impossível; Reparar o mal irreparável; Amar um amor casto a distância; Enfrentar o inimigo invencível; Tentar quando as forças se esvaem; Alcançar a estrela inatingível; **Essa é a minha busca**.
Dom Quixote

SUMÁRIO

RESUMO

ROCHA, Vicente Geraldo da, M.Sc., Universidade Federal de Viçosa, Março de 2014. **A Importância dos Logaritmos Ontem e Hoje no Desenvolvimento da Matemática e das Ciências - Uma Abordagem Didática**. Orientador: Alexandre Miranda Alves. ¸

Esta dissertação aborda a origem e a evolução dos logaritmos e também suas aplicações. Um tema que, na sua origem (1614), revelou-se uma ferramenta poderosa para simplificar as operações aritméticas, facilitando a vida daqueles que dependiam de cálculos longos e trabalhosos, dentre eles, os astrônomos. No entanto, com a tecnologia atual, calculadoras e computadores, os logaritmos perderam esta utilidade de facilitador nas operações aritméticas e destacou-se no desenvolvimento tanto da matemática como nas ciências de modo geral, revelando sua estreita relação com fenômenos químicos, físicos, biológicos e econômicos. Na definição dos logaritmos, destacamos a geométrica, que não é explorada nos livros didáticos aprovados pelo PNLD (Plano Nacional do Livro Didático) e distribuidos aos alunos. Reservamos o último capítulo para dar uma abordagem sobre o ensino dos logaritmos, valorizando suas aplicações desde a sua origem aos dias atuais, visando contribuir para a melhoria do ensino da matemática.

ABSTRAT

ROCHA, Vicente Geraldo da, M.Sc., Universidade Federal de Viçosa, Março de 2014. **A Importância dos Logaritmos Ontem e Hoje no Desenvolvimento da Matemática e das Ciências - Uma Abordagem Didática**. Orientador: Alexandre Miranda Alves.

This research addresses the origin and evolution of the logarithms and also its applications. A theme that, at its origin (1614), proved to be a powerful tool to simplify the arithmetic operations, making easier the lives of those who depended on long and complex calculations, including astronomers. However, with the current calculators and computers, logarithms has lost this utility facilitator in arithmetic and excelled in the development of both mathematics and in science in general, showing their close relation regarding chemical, physical, biological and economical phenomena. In the definition of logarithms, we highlight geometry, which is not explored in textbooks approved by PNLD (National Plan Textbook) and distributed to students. Last chapter subject is specifically to give an approach and contribute to the improvement of mathematics teaching, worthing its applications from its beginning to the current days.

INTRODUÇÃO

O ensino e a aprendizagem da Matemática tem se mostrado deficiente. É o que revela os resultados das avaliações usadas para diagnosticar o nível de conhecimento dos alunos em conteúdos considerados básicos, tanto as nacionais como as internacionais. No Programa Internacional de Avaliação de Estudantes (Pisa) de 2012 o Brasil ocupa a 58º posição entre 65 países avaliados. Apontar culpados, não nos isenta da responsabilidade e nem resolve o problema da má qualidade do ensino. O fato é que algo precisa ser feito. Ações em todos os níveis do sistema educacional devem ser implementadas, com o objetivo de reverter este quadro.

A necessidade de melhorar o nível de aprendizado dos alunos tem se tornando comum no discurso de toda sociedade. Muitas são as frentes que devem ser atacadas, dentre elas, destaca-se:

- valorizacão da carreira docente;
- qualificação de profissionais do ensino;
- devolver à escola a importância de um lugar essencial para a divulgação e formação científica;
- contribuir para a formação cidadã do aluno, auxiliando na formação de um indivíduo que saiba exigir seus direitos e seja cumpridor dos seus deveres;

- criar um ambiente onde a comunidade escolar sinta prazer em frequentar;
- abordagem dos conteúdos de forma a despertar a curiosidade e o interesse dos alunos;

Pensando em contribuir para a melhoria da aprendizagem em matemática este trabalho tem como foco o último tópico destacado acima, que basicamente está estruturado da seguinte forma:

No capítulo 1, iniciamos destacando a necessidade de se criar um método que facilitasse os cálculos aritméticos. John Napier(1550-1617) foi o primeiro a publicar seus trabalhos, mesmo tendo Jobst Burgui(1552-1632) desenvolvido idéias semelhantes a de Napier. Henry Briggs(1561-1630), um entusiasta na defesa e divulgação dos logaritmos, constrói as primeiras tabelas logarítmicas de base 10. Concluiu-se o capítulo com algumas considerações que justificam o uso dos logaritmos atualmente.

Em seguida, no segundo capítulo, mostramos como foram construidas as tabelas logarítmicas, definindo o que é logaritmo. Destacamos também as propriedades operatórias que permitiram a simplificação dos cálculos aritméticos. Apresentamos como é, de modo geral, o tratamento dos logaritmos, nos livros didáticos distribuido aos alunos atualmente.

No terceiro capítulo, tendo em vista as aplicações atuais dos logaritmos, abordamos a importância das funções matemáticas. Definimos a função exponencial e a sua inversa, a logarítmica. Dentre as funções exponenciais destacamos a de base e (número de Euler, base dos logaritmos naturais).

O capítulo 4 é dedicado a definição dos logaritmos usando área sob o ramo positivo de uma hiperbóle do tipo $y = \dfrac{k}{x}$, para $k > 0$. Primeiro, para $k = 1$, definimos o logaritmo de base e ($ln\ x$), em seguida, obtemos o valor de k para logaritmos em outras bases. Esta abordagem dos logaritmos não é tratada nos livros didáticos. Mostramos que as propriedades das tabelas logarítmicas são as mesmas das áreas de regiões sob uma hipérbole.

No quinto capítulo, mostramos a importância dos logaritmos atualmente. Citamos suas aplicações nas mais variadas áreas.

E finalmente, no capítulo 6, sugerimos uma maneira de apresentar os logaritmos aos alunos. Ao invés do tratamento algébrico, usado nos livros didáticos, priorizamos a definição dos logaritmos usando áreas sob a hipérbole. Destacamos, também, o uso do software Winplot, como recurso para facilitar o cálculo das áreas sob a hipérbole, através da aproximação por retângulos inscritos.

CAPÍTULO 1

UMA IDÉIA NOTÁVEL

O século XVII é particularmente importante na história da Matemática. Howard Eves, cita em [6], que os avanços políticos, econômicos e sociais da época tiveram influência decisiva no grande impulso dado a Matemática e também em outras atividades intelectuais. As necessidades da astronomia, da navegação, do comércio e da engenharia por cálculos numéricos cada vez maiores, mais rápidos e precisos, demandaram novas ferramentas matemáticas para atender a essas necessidades.

Neste contexto, o escoscês John Napier(1550-1617), mesmo não sendo um matemático profissional, e dedicando boa parte do seu tempo administrando suas grandes propriedades, além do engajamento em controvérsias políticas e religiosas do seu tempo, inventou vários artifícios para o ensino da Aritmética e também se destacou no estudo da Geometria[1], no entanto, sua mais notável realização foi a descoberta dos logaritmos.

Outros matemáticos da época deram notáveis contribuições para o desenvolvimento dos logaritmos. Lima cita em [8] que o suíço Jobst Burgui (1552-1632), fabricante de instrumentos astronômicos, matemático e inventor desenvolveu idéias muito semelhantes e independentes, ao mesmo tempo de Napier, como Boyer confirma em [2].

> Na verdade é possível que a idéia de logaritmo tenha ocorrido a Burgui em 1588, o que seria seis anos antes de Napier começar a trabalhar na mesma direção. Porém Burgui só publicou seus resultados em 1620, seis anos depois de Napier publicar sua Descriptio.

Também o inglês Henry Briggs (1561-1630), professor de geometria em Oxford, grande admirador e defensor entusiasta dos logaritmos, deu notáveis contribuições aos logaritmos após a sua publicação por Napier em 1614. Briggs ficou tão impressionado com o trabalho de Napier que decidiu ir a Escócia encontra-lo pessoalmente. Eli Maor descreve em [10] um relato feito pelo astrólogo William Lilly(1602-1681) do encontro entre Napier e Briggs.

> Um certo John Marr, excelente matemático e geômetra, chegara na Escócia antes de Sr. Briggs, com o propósito de estar presente quando duas pessoas tão cultas se encontrassem. Sr. Briggs marcou um certo dia para o encontro em Edimburgo, mas não comparecendo, Lord Napier passou a duvidar que ele viria. "Ah John" diz Napier, "o senhor Briggs não vai vir mais". Naquele momento alguém bate no portão, John Marr desce correndo e recebe o senhor Briggs para sua grande alegria. Ele o leva até a câmara do lorde, onde os dois passam quase um quarto de hora se admirando, antes que alguém diga alguma coisa. Finalmente Briggs diz: "Meu senhor, eu realizei esta grande jornada com o propósito de vê-lo em pessoa, e para saber por que artifício de inteligência e engenhosidade o senhor concebeu essa excelente ajuda para a astronomia, os logaritmos, e, tendo-os descoberto, eu me pergunto por que ninguém mais pensou nisso antes, agora que sabemos que é tão fácil".

Neste mesmo encontro Briggs sugeriu a Napier possíveis modificações nos logaritmos:

> Henri Briggs viajou até Edimburgo para dar o tributo de seu reconhecimento ao grande inventor dos logaritmos. Foi durante esta visita

> que Napier e Briggs concordaram que as tábuas seriam mais úteis se fossem alteradas de modo que o logarítmo de 1 fosse 0 e o logaritmo de 10 fosse uma potência conveniente de 10, nascendo assim os logaritmos briggsianos ou comuns, os logaritmos dos dias de hoje. Esses logaritmos que são essencialmente os logaritmos de base 10, devem sua superioridade em cálculos numéricos ao fato de que nosso sistema de numeração é decimal[6].

Até o século XVII, cálculos envolvendo multiplicações, divisões, potenciações e extrações de raízes eram bastante trabalhosos, exigindo precioso tempo daqueles que executavam esses cálculos constantemente. Até então, multiplicações e divisões de números muito grandes ou com muitas casas decimais, eram feitas com o auxilio de relações trigonométricas[7]. Howard Eves[6] corrobora esta afirmação:

> A fórmula trigonométrica $2cosAcosB = cos(A+B)+cos(A-B)$, bem conhecida na época de Napier, é visivelmente uma predecessora da idéia de transformar multiplicações e divisões a simples operações de adição e subtração.

Napier dedicou-se em simplificar esses cálculos e após vinte anos de pesquisa, publicou, em 1614, o resultado de seus estudos apresentando o seu trabalho, que para época seria uma revolução comparado ao surgimento dos computadores no século XX[6], de modo que a invenção dos logaritmos causou grande impacto nos meios científicos da época, pois eles representavam um poderoso método de cálculo numérico, que impulsionou o desenvolvimento do comércio, da navegação e da astronomia.

Poderíamos especular em que estágio estaria nossa ciência hoje se os pesquisadores da época de Napier tivessem a sua disposição calculadoras que temos hoje. Quanto tempo seria economizado nos cálculos desgastantes e longos que poderiam ter sido empregado em mais pesquisas. Johannes Kepler(1571-1630) famoso astrônomo aus-

Figura 1.1: Capa da edição das tábuas logarítmicas do ano de 1614 e 1619 - Imagem retirada do site http://www.ofilosofo.com/logaritmo.htm.

triaco, saudou com entusiasmo o desenvolvimento das tabelas logarítmicas, assim ele teria mais tempo pra pensar em vez do trabalho árduo dos cálculos.

Para se ter uma idéia do trabalho enfrentado na época para a realização de certos cálculos aritméticos, tente resolver as seguintes expressões,

- $\sqrt[11]{(1596 \times 43,6^7 \times 7085) \div 932}$

- $\sqrt[3]{\frac{(0,3^5 \times 2,1^{-2})}{0,345^3}}$

sem o recurso dos instrumentos atuais à nossa disposição, como calculadoras ou computadores. Mesmo com o uso dos logaritmos terá que ter disposição e tempo. Imagine fazer esses cálculos como era feito em 1600, antes de Napier e os seus maravilhosos logaritmos.

Como hoje temos recursos computacionais modernos, poderíamos achar obsoleto o estudo dos logaritmos, no entanto a ciência não pode abrir mão desta ferramenta.

Elon Lages Lima comenta em [8] que:

> Embora os logaritmos tenham sido inventados como acessório para facilitar operações aritméticas, o desenvolvimento da Matemática e das ciências em geral veio mostrar que diversas leis matemáticas e vários fenômenos físicos, químicos, biológicos e econômicos são estritamente relacionados com os logaritmos. Assim sendo, os logaritmos, que no princípio eram importantes apenas por causa das tábuas mostraram ter apreciável valor intrínsico.

Exemplificando a necessidade dos logaritmos atualmente, vejamos alguns exemplos encontrados em [15]:

1. **Matemática Financeira**

   Uma pessoa aplicou a importância de R$ 500,00 numa instituição bancária que paga juros mensais de 3,5%, no regime de juros compostos. Quanto tempo após a aplicação o montante será de R$ 3 500,00 reais?

2. **Geografia**

   Em uma determinada cidade, a taxa de crescimento populacional é de 3% ao ano, aproximadamente. Em quantos anos a população desta cidade irá dobrar, se a taxa de crescimento continuar a mesma?

3. **Química**

   Determine o tempo que leva para que 1000 gramas de certa substância radioativa, que se desintegra a taxa de 2% ao ano, se reduza a 200 gramas. Utilize a seguinte expressão: $Q = Q_0 \times e^{tr}$, onde Q é a massa da substância, r é a taxa e t é o tempo em anos.

4. **Cultura de Bacilos**

   O número de bacilos existentes numa determinada cultura, no instante t, é dado por $N = N_0.2^{(t/k)}$ em que N_0 e k são constantes. As variáveis t e N estão expressas em horas e milhões de unidades, respectivamente.

   a) Interprete o significado das constantes N_0 e k.

   b) Qual a função que exprime, o número de horas que esta função leva a passar de N_0 para N, em função de N?

5. **Terremotos**

   Segundo Richter (Sismologia Elementar, 1958) a magnitude M de um tremor de terra, que ocorra a 100 km de certo sismógrafo, é dada por $M = log_{10}A + 3$ onde A é a amplitude máxima em mm, do registro feito pelo aparelho.

   a) Qual é o significado da constante 3?

   b) Certo tremor de terra de magnitude M_1 produz um registro de amplitude A_1. Exprima, em função de M_1, a magnitude M de outro sismo cujo registro tem de amplitude $100A_1$, nas mesmas condições.

Percebemos então que da mesma forma que os logaritmos foram festejados na sua criação, contribuindo de maneira decisiva para o desenvolvimento da ciência, tanto que Napier deu às suas tábuas o título: *Uma descrição da maravilhosa regra dos logaritmos*, hoje, depois de mais de 4 séculos de sua descoberta, podemos dizer que os logaritmos continuam com a mesma jovialidade, só que mudou de nome, ao invés de tábua logarítmica agora ele é chamado função logarítmica.

Elon Lages Lima reforça a importância da função logaritmo em [9]:

> A importância da função logaritmo é permanente; jamais desaparecerá porque, sendo a inversa da função exponencial (portanto equivalente a ela), a função logaritmo está ligada a um grande número de fenômenos e situações naturais, onde se tem uma grandeza cuja taxa de variação é proporcional à quantidade da mesma existente no instante dado.

CAPÍTULO 2

O QUE É LOGARITMO

A fórmula

$$cosx \cdot cosy = \frac{cos(x+y)}{2} + \frac{cos(x-y)}{2} (*)$$

antes dos logaritmos era usada para transformar produtos em soma, como pode ser visto em [2] da seguinte forma:

Seja o produto

$$0,8988 \times 0,9455$$

Em uma tabela trigonométrica, com precisão de 4 casas decimais, obtemos,

$$0,8988 = cos26^\circ \qquad cos45^o = 0,7071$$

$$0,9455 = cos19^\circ \qquad cos\ 7^o = 0,9925$$

Substituindo na fórmula (*)

$$cos26^\circ \times cos19^\circ = \frac{cos(26^\circ + 19^\circ)}{2} + \frac{cos(26^\circ - 19^\circ)}{2} =$$

$$= \frac{cos45^\circ}{2} + \frac{cos7^\circ}{2} = \frac{0,7071}{2} + \frac{0,9925}{2} = \frac{1,6996}{2} = 0,8498$$

Lima em [9] destaca uma desvantagem do método acima, era que o trabalho aumentava consideravelmente em produtos de mais de três fatores, ainda teríamos os problemas das potências e das raízes .

Napier em seu *Merifici logarithmorum canonis descriptio, 1614*, descreve essa dificuldade como motivação para desenvolver um novo método de cálculo a partir do trecho a seguir, descrito por Eli Maor em [10]:

> Percebendo que não há nada mais trabalhoso na prática matemática, nem que mais prejudique e atrapalhe os calculadores, do que as multiplicações, as divisões, as extrações do quadrado e do cubo dos números muito grandes...comecei a considerar em minha mente através de que tipo de arte certa e rápida poderia remover essas dificuldades.

Com este propósito, Napier conseguiu com os logaritmos, facilitar a vida dos que trabalhavam com cálculos complicados. Mas por que eles simplificavam os cálculos? Basicamente porque eles baixavam o grau de dificuldade das operações transformando multiplicações em adições e divisões em subtrações, e adicionar ou subtrair números é normalmente mais rápido que multiplicá-los ou dividí-los.

O método de Napier baseou-se na associação dos termos da sequência

$$(b^1, b^2, b^3, b^4, \ldots, b^n)$$

aos termos da sequência de naturais

$$(1, 2, 3, 4, \ldots, n),$$

de forma que o produto de dois termos quaisquer da primeira sequência, por exemplo, $b^x \cdot b^y = b^{x+y}$ estivesse associado à soma $x + y$ dos termos da segunda sequência. É imediato observar que a regra descrita acima é simplesmente a propriedade fundamental das potências, ou ainda, regra da multiplicação de potências de mesma base:

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}, \text{ para todo } a > 0, m \text{ e } n \text{ reais}$$

Na Tabela 2.1 temos um exemplo.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2^1	2^2	2^3	2^4	2^5	2^6	2^7	2^8	2^9	2^{10}
2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024

Tabela 2.1: Potências de base 2

Os números da terceira linha estão todos escritos na segunda linha como uma potência de base 2. Observe que os termos da primeira linha formam uma PA(Progressão Aritmética) de razão iqual a 1 ($r = 1$) e a segunda linha é formada por termos de uma PG (Progressão Geométrica) de razão 2 ($q = 2$). Assim para multiplicar dois termos da progressão geométrica, é suficiente somar os seus correspondentes na progressão aritmética e identificar qual o termo da progressão geométrica que corresponde a essa soma.

Observe o exemplo do produto 16 por 64:

$$16 = 2^4 \ \ e \ \ 64 = 2^6 \Rightarrow 16 \times 64 = 2^4 \times 2^6 = 2^{4+6} = 2^{10}$$

Veja que na terceira linha $2^{10} = 1024$, ou seja,

$$16 \times 24 = 1024$$

Assim, multiplicar 16 por 64, corresponde a somar 4 com 6 na primeira linha, que são os expoentes das potências de base 2 na segunda linha. Observando que o valor da soma 10 corresponde a 1024 na linha 3.

Daí definiu-se que o logaritmo na base 2 do número da terceira linha da tabela acima é o expoente mostrado na segunda linha e escreve-se:

$$log_2 2 = 1$$

$$log_2 4 = 2$$

$$log_2 8 = 3$$

$$log_2 16 = 4$$

$$log_2 32 = 5$$

$$log_2 64 = 6$$

$$log_2 128 = 7$$

$$log_2 256 = 8$$

$$log_2 512 = 9$$

$$log_2 1024 = 10$$

Com esta definição é imediata a consequência:

$$log_2(16 \times 64) = log_2 16 + log_2 64 \quad (I)$$

de fato,

$$log_2 16 + log_2 64 = 4 + 6 = 10 \quad (II)$$

e também

$$log_2(16 \times 64) = log_2 1024 = 10 \quad (III)$$

comparando (II) e (III) obtemos (I).

Repetindo o mesmo procedimento agora com a base 3, vamos multiplicar 27 por 2187. Veja a Tabela 2.2.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
3^1	3^2	3^3	3^4	3^5	3^6	3^7	3^8	3^9	3^{10}
3	9	27	81	243	729	2187	6561	19683	59049

Tabela 2.2: Potências de base 3

$$27 \times 2187 = 3^3 \times 3^7 = 3^{(3+7)} = 3^{10} = 59049$$

Assim para obter o resultado da multiplicação não precisamos efetuar o algoritmo do produto é só olhar na tabela o valor correspondente da soma $3 + 7$.

E novamente temos a relação dos logaritmos, agora para base 3.

$$log_3 3 = 1$$

$$log_3 9 = 2$$

$$log_3 27 = 3$$

$$log_3 81 = 4$$

$$log_3 243 = 5$$

$$log_3 729 = 6$$

$$log_3 2187 = 7$$

$$log_3 6561 = 8$$

$$log_3 19683 = 9$$

$$log_3 59049 = 10$$

Logo,

$$log_3 27 + log_3 2187 = 3 + 7 = 10$$

e

$$log_3 (27 \times 2187) = log_3 59049 = 10$$

de modo que

$$log_3 (27 \times 2187) = log_3 27 + log_3 2187$$

Podemos realizar o mesmo procedimento para qualquer base que observaremos os mesmos resultados.

Estes exemplos mostram que Napier notou que é possível transformar a multiplicação de números em soma de seus logaritmos, o resultado é o logaritmo do produto. Para saber o resultado da multiplicação basta olhar na tabela o número que tem aquele logaritmo.

O mesmo acontece com a divisão de números, observe:

$$log_3 2187 - log_3 27 = 7 - 3 = 4$$

e

$$log_3(2187 \div 27) = log_3 81 = 4$$

assim

$$log_3(2187 \div 27) = log_3 2187 - log_3 27$$

ou seja, para dividir dois números basta subtrair seus respectivos logaritmos e olhar na tabela qual o número que está relacionado com o logaritmo da diferença obtida.

Semelhantemente ao exposto acima podemos notar que para elevar um número a um expoente basta multiplicar o logaritmo do número pelo expoente, e para extrair uma raiz de ordem n de um número, basta dividir o logaritmo do número pelo índice da raiz.

Vamos verificar, de modo geral, o que os dois casos particulares nos mostraram. Na Tabela 2.3 a primeira linha são de números naturais e a segunda potências de base b, $b > 0$ e $b \neq 1$.

1	2	3	...	m	$m+1$	....	n	$n+1$	...	$m+n$	...
b^1	b^2	b^3	...	b^m	b^{m+1}	...	b^n	b^{n+1}	...	b^{m+n}	...

Tabela 2.3: Tabela de base b

Proposição 1. *$log_b(x \times y) = log_b\ x + log_b\ y$ para todo $x > 0$ e $y > 0$*

Demonstração. seja $x = b^m$ e $y = b^n \Rightarrow$

$$log_b(x \times y) = log_b(b^m \times b^n) = log_b b^{(m+n)} = m + n \quad (I)$$

$$log_b\ x + log_b\ y = log_b\ b^m + log_b\ b^n = m + n \quad (II)$$

comparando (I) e (II) temos

$$log_b\ (x \times y) = log_b\ x + log_b\ y$$

$\square$

Proposição 2. *$log_b(x \div y) = log_b x - log_b y$ para todo $x > 0$ e $y > 0$*

Demonstração. seja $x = b^m$ e $y = b^n \Rightarrow$

$$log_b(x \div y) = log_b(b^m \div b^n) = log_b b^{(m-n)} = m - n \quad (I)$$

$$log_b x - log_b y = log_b b^m - log_b b^n = m - n \quad (II)$$

comparando (I) e (II) temos

$$log_b(x \div y) = log_b x - log_b y$$

$\square$

Proposição 3. *$log_b(x^m) = m \cdot log_b x$ para todo $x > 0$ e $m \in \mathbb{N}$*

Demonstração.

$$log_b\ x^m = log_b\ (x \cdot x \cdot x \cdots x) = log_b\ x + log_b\ x + \cdots + log_b\ x = m \cdot log_b\ x$$

$\square$

Proposição 4. *$log_b\ (x^{\frac{1}{m}}) = \frac{1}{m} \cdot log_b\ x$ para todo $x > 0$ e $m \in \mathbb{N}$*

Demonstração. Temos que $x = (x^{\frac{1}{m}})^m$, assim

$$log_b\ x = log_b\ (x^{\frac{1}{m}})^m = m \cdot log_b\ (x^{\frac{1}{m}}) \Rightarrow \frac{1}{m} \cdot log_b\ x = log_b\ (x^{\frac{1}{m}})$$

$\square$

Notamos então que uma tabela com os logaritmos dos números positivos era o objeto de desejo, e para construir esta tabela era necessário representar os números positivos como potências de uma mesma base.

Escrevendo todos os números positivos como potencia de base 2, teremos o sistema de logaritmos de base 2, do mesmo modo ao escrever os números positivos como potência de base 5, teremos o sistema de logaritmos de base 5 e assim por diante. A base do logaritmo é a base da potência e o logaritmo é o expoente, isto é, ao escrever,

- $2 = 3^{0,6309}$

  Dizemos que 0,6309 é o logaritmo de 2 na base 3 e escrevemos:

$$log_3 2 = 0,6309$$

- $2 = 7^{0,3562}$

  Dizemos que 0,3562 é o logaritmo de 2 na base 7 e escrevemos:

$$log_7 2 = 0,3562$$

- $5 = 10^{0,6989}$

  Dizemos que 0,6989 é o logaritmo de 5 na base 10 e escrevemos:

$$log_{10} 5 = 0,6989$$

Em cada item usamos aproximação de 4 casas decimais.

Do exposto, temos a definição do logaritmo:

Definição 1. Dado um número real $b > 0$ e $b \neq 1$, o logaritmo de um número $x > 0$ na base b é o expoente y a que se deve elevar b de tal modo que $b^y = x$ e escreve-se:

$$log_b\, x = y \Leftrightarrow b^y = x$$

Observamos que o logaritmo é um expoente, então se deseja obter um logaritmo trate de calcular um expoente.

2.1 As Tábuas Logarítmicas

Já percebemos as vantagens de multiplicar ou dividir números quando eles estão escritos como uma potência, o desafio então, é escrever os números positivos como uma potência.

Com precisão até a quarta casa decimal, como saber que:

$$5 = 2^{2,3219}$$

$$5 = 3^{1,4649}$$

$$5 = 4^{1,1609}$$

$$5 = 6^{0,8982}$$

$$5 = 7^{0,8270}$$

$$5 = 8^{0,7739}$$

$$5 = 9^{0,7324}$$

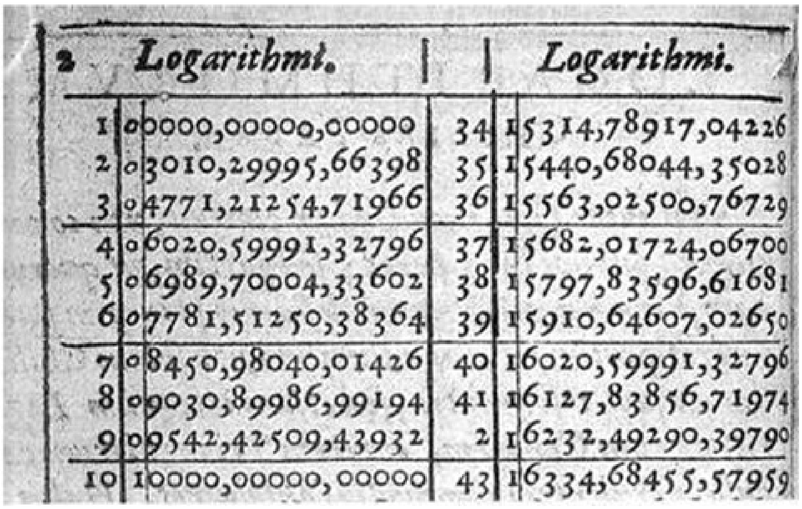
$$5 = 10^{0,6989}$$

$$5 = 11^{0,6711}$$

Para justificar uma das igualdades vamos seguir a proposta de Henri Briggs, principal responsável pela aceitação dos logaritmos no meio científico, que propôs a Napier uma tabela que usasse a base 10, os chamados logaritmos decimais.

Henri Briggs usou a média geométrica[1] para escrever um número como potência de 10, por que ao calcular a média geométrica de duas potências de 10 o resultado é uma potência de 10. E isso não acontece com a média aritmética. O resultado abaixo garante que ao calcular a média geométrica entre dois números, esta média estará sempre entre estes dois números.

[1] A média geométrica de n números positivos x_1, x_2, x_3, ..., x_n é um valor positivo g tal que $x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot ... \cdot\ x_n = g \cdot g \cdot g \cdot ... \cdot\ g = g^n$. Portanto, a média geométrica de n números positivos é definida por: $g = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot ... \cdot x_n}$



2	Logarithmi.			Logarithmi.
1	0	0000,00000,00000	34	1	5314,78917,04226
2	0	3010,29995,66398	35	1	5440,68044,35028
3	0	4771,21254,71966	36	1	5563,02500,76729
4	0	6020,59991,32796	37	1	5682,01724,06700
5	0	6989,70004,33602	38	1	5797,83596,61681
6	0	7781,51250,38364	39	1	5910,64607,02650
7	0	8450,98040,01426	40	1	6020,59991,32796
8	0	9030,89986,99194	41	1	6127,83856,71974
9	0	9542,42509,43932	2	1	6232,49290,39790
10	1	0000,00000,00000	43	1	6334,68455,57959

Figura 2.1: Tabela logarítmica de base 10 construida por Briggs(1617) com 14 casas decimais-Imagem retirada do site http://waldexifba.wordpress.com.

Proposição 5. *Se* x_1 *e* x_2*, números reais positivos, com* $x_1 < x_2$ *então* $x_1 < \sqrt{x_1 \cdot x_2} < x_2$ (I).

Demonstração. De fato, $x_1 > 0$ e $x_2 - x_1 > 0 \Rightarrow x_1 \cdot (x_2 - x_1) > 0 \Rightarrow x_1 \cdot x_2 - x_1^2 > 0$ $\Rightarrow x_1 \cdot x_2 > x_1^2 \Rightarrow \sqrt{x_1 \cdot x_2} > x_1 \quad (II)$.

Da mesma forma, $x_2 > 0$ e $x_2 - x_1 > 0 \Rightarrow x_2 \cdot (x_2 - x_1) > 0 \Rightarrow x_2^2 - x_2 \cdot x_1 > 0 \rightarrow$ $x_2^2 > x_2 \cdot x_1 \Rightarrow x_2 > \sqrt{x_1 \cdot x_2} \quad (III)$.

De (II) e (III) concluimos (I). □

Pretendemos obter x de modo que $5 = 10^x$, ou seja, qual é o logaritmo de 5 na base 10, ou ainda, $log_{10} 5 = x$. Nos cálculos abaixo trabalhamos com precisão de 4 casas decimais.

Sabemos que $10^0 = 1$ e $10^1 = 10$, e como $1 < 5 < 10$ temos $10^0 < 10^x < 10^1$, assim $0 < x < 1$. Observe a tabela abaixo.

10^0	10^x	10^1
1	5	10

Calculando a média geométrica dos extremos da tabela.

- $\sqrt{1 \times 10} = \sqrt{10} = 3,1623$

- $\sqrt{10^0 \times 10^1} = 10^{\frac{1}{2}} = 10^{0,5}$

Comparando as dua médias obtemos:

$$10^{0,5} = 3,1623$$

Observamos os valores na tabela abaixo.

10^0	$10^{0,5}$	10^x	10^1
1	3,1623	5	10

Assim verificamos que $0,5 < x < 1$.

Novamente calculamos a média geométrica entre os extremos, imediatamente antes e depois de 10^x.

- $\sqrt{10^{0,5} \times 10^1} = \sqrt{10^{1,5}} = 10^{0,75}$
- $\sqrt{3,1623 \times 10} = \sqrt{31,623} = 5,6234$

Novamente, comparando as duas médias, obtemos:

$$10^{0,75} = 5,6234$$

Nos aproximamos um pouco mais. Observe que $0,5 < x < 0,75$

10^0	$10^{0,5}$	10^x	$10^{0,75}$	10^1
1	3,1623	5	5,6234	10

Continuando com as médias

- $\sqrt{10^{0,5} \times 10^{0,75}} = \sqrt{10^{1,25}} = 10^{0,625}$
- $\sqrt{3,1623 \times 5,6234} = \sqrt{17,7829} = 4,2169$

comparando, novamente as médias geométricas, obtemos:

$$10^{0,625} = 4,2169$$

Nos aproximamos um pouco mais. Veja na tabela.

10^0	$10^{0,5}$	$10^{0,625}$	10^x	$10^{0,75}$	10^1
1	3,1623	4,2169	5	5,6234	10

Calculando, sucessivamente as médias, entre os números das colunas imediatamente a esquerda e a direita de 10^x, e comparando-as, obtemos:

- $\sqrt{10^{0,625} \times 10^{0,75}} = \sqrt{10^{1,375}} = 10^{0,6875}$
- $\sqrt{4,2169 \times 5,6234} = \sqrt{23,7133} = 4,8696$

$$10^{0,6875} = 4,8696$$

- $\sqrt{4,8696 \times 5,6234} = \sqrt{27,3837} = 5,2329$
- $\sqrt{10^{0,6875} \times 10^{0,75}} = \sqrt{10^{1,4375}} = 10^{0,71875}$

$$10^{0,71875} = 5,2329$$

- $\sqrt{4,8696 \times 5,2329} = \sqrt{25,4821} = 5,0480$
- $\sqrt{10^{0,6875} \times 10^{0,71875}} = \sqrt{10^{1,40625}} = 10^{0,703125}$

$$10^{0,703125} = 5,0480$$

- $\sqrt{4,8696 \times 5,0480} = \sqrt{24,5817} = 4,9580$
- $\sqrt{10^{0,6875} \times 10^{0,703125}} = \sqrt{10^{1,390625}} = 10^{0,69531}$

$$10^{0,69531} = 4,9580$$

- $\sqrt{4,9580 \times 5,0480} = \sqrt{25,0280} = 5,0028$
- $\sqrt{10^{0,6953} \times 10^{0,703125}} = \sqrt{10^{1,3984}} = 10^{0,6992}$

$$10^{0,6992} = 5,0028$$

- $\sqrt{4,9580 \times 5,0028} = \sqrt{24,8039} = 4,9803$
- $\sqrt{10^{0,6953} \times 10^{0,6992}} = \sqrt{10^{1,3945}} = 10^{0,6972}$

$$10^{0,6972} = 4,9803$$

- $\sqrt{4,9803 \times 5,0028} = \sqrt{24,9154} = 4,9915$
- $\sqrt{10^{0,6972} \times 10^{0,6992}} = \sqrt{10^{1,3964}} = 10^{0,6982}$

$$10^{0,6982} = 4,9915$$

- $\sqrt{4,9915 \times 5,0028} = \sqrt{24,9715} = 4,9971$
- $\sqrt{10^{0,6982} \times 10^{0,6992}} = \sqrt{10^{1,3974}} = 10^{0,6987}$

$$10^{0,6987} = 4,9971$$

- $\sqrt{4,9971 \times 5,0028} = \sqrt{24,9995} = 4,9999$
- $\sqrt{10^{0,6987} \times 10^{0,6992}} = \sqrt{10^{1,3979}} = 10^{0,6989}$

$$10^{0,6989} = 4,9999$$

Na tabela abaixo destacamos os valores imediatamente a esquerda e a direita de 10^x.

$10^{0,6989}$	10^x	$10^{0,6992}$
$4,9999$	5	$5,0028$

Finalmente, podemos afirmar com um erro inferior a 0,0001 que $5 = 10^{0,6989}$, ou ainda,

$$log_{10} 5 = 0,6989$$

Para escrever 5 como uma potência de 10 foram necessários cálculos trabalhosos e longos, no entando esses cálculos são feitos somente uma vez, a partir daí, o tempo que se ganha nas operações que necessitam desses logaritmos é sobremaneira compensador.

Durante o processo foram obtidos também, outras potências de 10, que podem ser usados nas tábuas logarítmicas. Estas potências estão destacadas nas tabelas abaixo.

1	3,1623	4,2169	4,8696	4,9580	4,9803	4,9915
10^0	$10^{0,5}$	$10^{0,625}$	$10^{0,6875}$	$10^{0,69531}$	$10^{0,6972}$	$10^{0,6982}$

4,9971	4,9999	5,0028	5,0480	5,2329	5,6234	10
$10^{0,6987}$	$10^{0,6989}$	$10^{0,6992}$	$10^{0,703125}$	$10^{0,71875}$	$10^{0,75}$	10^1

2.2 A Definição dos Logaritmos nos Livros Didáticos

Atualmente, as definições de logaritmos previlegia a álgebra. Nos livros didáticos aprovados pelo PNLDEM (programa nacional do livro didático do ensino médio), como vemos em [1] [7], [11], [14], [5], [12] e distribuidos aos alunos, a definição dos logaritmos segue o mesmo padrão. Alguns trazem pequenos comentários sobre a origem dos logaritmos, outros iniciam a abordagem com um problema de matemática financeira que mostra a necessidade de resolver equações do tipo $(0,9)^x = 0,2$.

De modo geral a abordagem dos logaritmos nos livros didáticos atuais aprovados pelo PNLDEM é feita da seguinte forma:

Definição: Sendo a e b números reais e positivos com $b \neq 1$ chama-se logaritmo de a na base b o expoente x ao qual se deve elevar a base b de modo que a potência b^x seja igual a a, e escreve:

$$log_b\, a = x \Leftrightarrow b^x = a$$

Dizemos que:

- b é a base

- a é o logaritmando

- x é o logaritmo

Exemplos:

- $log_2\, 8 = 3$, pois $2^3 = 8$

- $log_2\, \frac{1}{4} = -2$, pois $2^{-2} = \dfrac{1}{4}$

Consequências da definição:

Sejam a, b e c números reais com $a > 0$ e $0 < b \neq 1$.

- O logaritmo de um em qualquer base b é igual a 0

$$log_b\, 1 = 0 \Leftrightarrow b^0 = 1$$

- O logarítmo de b na base b é igual a 1

$$log_b\, b = 1 \Leftrightarrow b^1 = b$$

- A potência de base b e expoente $log_b\, a$ é igual a a

$$b^{log_b\, a} = a$$

Seja $log_b\, a = c \Leftrightarrow b^c = a$, daí, $b^{log_b\, a} = b^c = a$

Exemplos:

- $2^{log_2\, 5} = 5$

- $7^{log_7\, 3} = 3$

- Se dois logaritmos em uma mesma base são iguais, então os logaritmandos também são iguais.

$$log_b\, x = log_b\, y \Leftrightarrow x = y$$

De fato,

$$log_b\, x = log_b\, y \Leftrightarrow b^{log_b\, y} = x \Leftrightarrow x = y$$

Propriedades operatórias

- **Logaritmo do produto**:

  Numa mesma base, o logaritmo do produto de dois números positivos é igual à soma dos logaritmos de cada um desses números.

$$log_b\ (a \times c) = log_b\ a + log_b\ c$$

- **Logaritmo do quociente**:

  Numa mesma base, o logaritmo do quociente de dois números positivos é igual à diferença entre os logaritmos desses números.

$$log_b\ (a \div c) = log_b\ a - log_b\ c$$

- **Logaritmo da potência**:

  Numa mesma base, o logaritmo de uma potência de base positiva é igual ao produto do expoente pelo logaritmo da base da potência.

$$log_b\ a^c = c \times log_b\ a$$

  Como consequência dessa propriedade podemos calcular o logaritmo de uma raiz.

$$log_b\ \sqrt[n]{a} = log_b\ a^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n} \cdot log_b\ a$$

- **Mudança de base**:

  Para escrever o $log_b\ c$ usando logaritmos na base a, escrevemos.

$$log_b\ c = \frac{log_a\ c}{log_a\ b}$$

Depois de listadas as propriedades, os autores propoem uma lista de exercícios para fixação das mesmas.

Importante, seria, se fosse destacado mais a importância dos logaritmos na época de sua descoberta. O quanto ele facilitou a vida daqueles que utilizavam os cálculos aritméticos como ferramenta essencial nos seus trabalhos.

Assim as propriedades dos logritmos seriam colocadas de modo mais natural, sendo elas, a principal razão da existência dos logaritmos para a época.

CAPÍTULO 3

FUNÇÃO: UM CONCEITO FUNDAMENTAL

> O estudo das funções permite ao aluno adquirir a linguagem algébrica como a linguagem das ciências, necessária para expressar a relação entre grandezas e modelar situações-problema, construindo modelos descritivos de fenômenos e permitindo várias conexões dentro e fora da própria matemática. Assim, a ênfase do estudo das diferentes funções deve estar no conceito de função e em suas propriedades em relação às operações, na interpretação de seus gráficos e nas aplicações dessas funções [PCN+,2002].

Um dos conceitos mais fundamentais que temos em matemática é o de função. A criação da matemática está intimamente ligada na tentativa de apresentar soluções para problemas do mundo real, e uma das maneiras de traduzir matematicamente alguns fenômenos é através do estabelecimento de relações de dependência entre quantidades ou grandezas observadas [4], e a relação entre estas grandezas é obtida através de funções. Esta dependência ou relação entre as grandezas pode ser colocada da seguinte forma:

Se x e y são duas variáveis (grandezas) relacionadas de tal modo que, sempre que um valor numérico é associado a x, fica determinado um único valor numérico correspondente para y, então dizemos que y é uma função de x, exprimimos este fato escrevendo $y = f(x)$.

De maneira menos formal podemos descrever uma função (exceto a função constante) através de uma tabela que relaciona duas variáveis, onde a variação em uma delas corresponde a alguma variação na outra. O custo com uma corrida de táxi é uma função da quantidade de quilômetros rodados; o tempo para percorrer certa distância de uma maratona é uma função da velocidade durante o percurso. Nestes exemplos, uma variação nos quilômetros percorridos e na velocidade acarreta uma mudança no valor pago ao taxicista e no tempo gasto na maratona.

Os símbolos usados na linguagem Matemática, permite que relações entre variáveis sejam expressas de forma simples e concisas. Assim, ao invés de descrever literalmente qual a relação entre duas grandezas, como por exemplo: A área de um quadrado depende da medida de seu lado. Se o lado mede 1, a área é 1; se lado mede 3, a área é 9; se o lado mede 7, a área é 49, ou seja, a área de um quadrado é o produto $lado \cdot lado$. Em símbolos, podemos escrever: $y = x^2$, onde x representa o lado e y a área do quadrado, respectivamente.

Para a caracterização completa de uma função, precisamos de três elementos: a fórmula que relaciona as variáveis (no nosso caso são duas) e de dois conjuntos. Um chamado domínio e o outro de contradomínio. E ainda, a fórmula deve associar todo elemento do domínio a um único elemento do contradomínio.

$$f : A \to B$$

$$x \to f(x)$$

- A: Domínio
- B: Contradomínio

Esta relação algébrica de dependência entre grandezas, podem, também, ser representadas graficamente, facilitando a visualização do comportamento do fenômeno descrito, favorecendo sua compreensão. Para fazer esta representação gráfica, marcamos no plano cartesiano os pares ordenados (x, y), unindo esses pontos, quando a variação é contínua, obtemos uma curva, que podemos dizer ser a função representada geometricamente.

Vamos a um exemplo encontrado em [14][p.129]:

- Em uma partida de futebol, ao ser chutada por um jogador, a bola descreveu, até tocar o solo, uma trajetória definida pela função $y = \frac{4x}{3} - \frac{x^2}{45}$, em que y corresponde à altura da bola em relação ao solo após ter percorrido horizontalmente uma distância x.

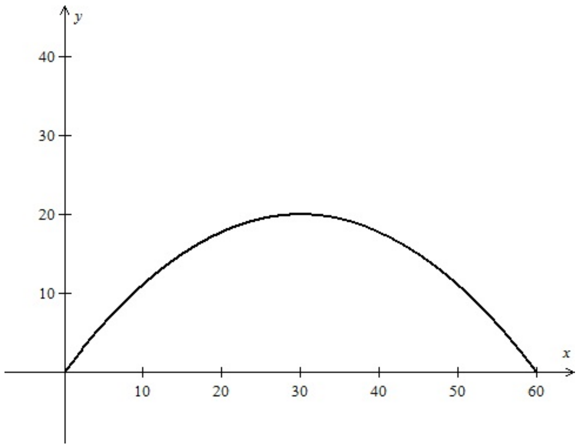


Figura 3.1: Trajetória descrita pela bola

Pelo gráfico da Figura 3.1 observamos a trajetória da bola, identificando imediatamente a altura máxima alcançada e a distância percorrida antes dela tocar no solo.

Ao relacionar duas grandezas obtendo uma função, podemos, através desta criar novas funções. Uma das funções que podemos obter, quando possível, é a função inversa.

Observe um exemplo:

- Para calcular o valor de uma fatura residencial, a concessionária de energia elétrica de certa região multiplica o consumo em quilowatt-hora(kWh) por $0,4$

(quatro décimos), obtendo o valor em reais. Se o consumo mensal for de 267 kwh, por exemplo, o valor da fatura será $R\$ \ 106,80$.

A função $f(x) = 0,4x$ associa o consumo em quilowatt-hora ao valor em reais da fatura.

Podemos também escrever uma função g, com o objetivo inverso ao da função $f(x) = 0,4x$, ou seja, associando o valor da fatura ao consumo mensal. Nesse caso, $g(x) = 2,5x$. Dizemos que a função $f(x)$ é a inversa da função $g(x)$.

3.1 A Função Exponencial

A função exponencial se destaca em várias aplicações matemáticas, na ciência e na indústria, e é indispensável no estudo de muitos problemas de economia e finanças, sobretudo, no cálculo dos juros compostos. Dentre as aplicações podemos citar, entre os fenômenos naturais, a radioatividade. Algumas substâncias emitem radiações e se desintegram, transformando-se em outras. Este fenômeno tem ajudado aos geólogos a determinar a idade das rochas e também os arqueólogos a determinar a idade de objetos encontrados em suas escavações [5]. Este fenômeno é descrito por uma função exponencial.

No campo da biologia, temos as bactérias que em sua maioria se reproduzem por bipartição, isto é, cada uma delas se divide em duas ao atingir determinado tamanho. Situação também descrita por uma função exponencial. Vários são os fenômenos que são modelados por crescimento ou decrescimento exponencial.

Função exponencial é uma função na qual a variável se encontra no expoente. A função exponencial é definida da seguinte forma:

Seja a um número real positivo e diferente de 1. A função $f : R \to R^+$, representada por $f(x) = a^x$, é denominada função exponencial de base a.

A função exponencial é caracterizada pelas seguintes propriedades:

a) $f(x + y) = f(x) \cdot f(y)$, para todo x e y reais

b) $x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$ para $a > 1$ e $x < y \Rightarrow f(x) > f(y)$ para $0 < a < 1$

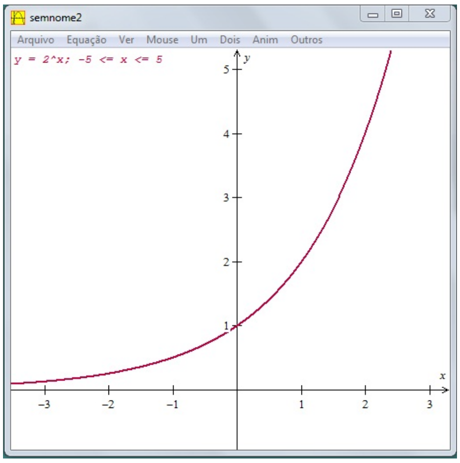
A propriedade a) garante fatos interessantes para a função exponencial. Primeiro ela não assume o valor 0, pois se existisse algum x_0 tal que $f(x_0) = 0$ teríamos $f(x) = 0$ para todo x do domínio de f. De fato,

$$f(x) = f(x_0 + (x - x_0)) = f(x_0) \cdot f(x - x_0) = 0 \cdot f(x - x_0) = 0$$

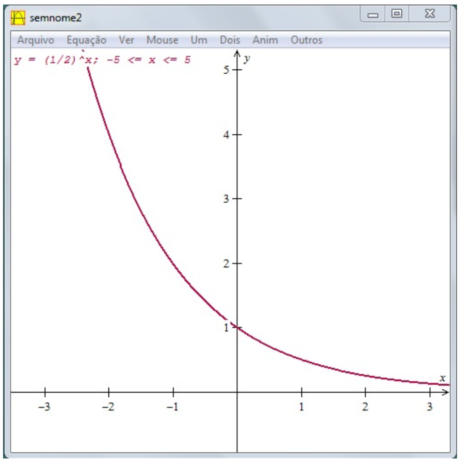
Segundo é que $f(x) > 0$ para todo x do seu domínio pois,

$$f(x) = f(\frac{x}{2} + \frac{x}{2}) = f(\frac{x}{2}) \cdot f(\frac{x}{2}) = [f(\frac{x}{2})]^2 > 0$$

A propriedade b) garante que a função exponencial é bijetora, logo, admite inversa. Podemos visualizar esta caracteristica na figuras 1 e figura 2 abaixo.



(a) Figura1



(b) Figura2

3.2 A Função Logarítmica

Dada uma função f que associa a cada x um único valor de y, podemos em determinadas condições, obter uma função g derivada de f que associa cada y da imagem de f a x do domínio de f.

Sabemos da definição de logaritmos que $y = a^x \Leftrightarrow log_a\, y = x$. É imediato concluir que definindo a função $x = g(y) = log_a\, y$ obtemos a função inversa de $y = f(x) = a^x$.

Obtemos assim, a função $log_a : R^+ \to R$ que é a inversa da função exponencial de base a. A função real $log_a : R^+ \to R$, cujo domínio é o conjunto R^+ dos números reais positivos, chama-se função logarítmica e tem as seguintes propriedades: Seja

$$f(x) = log_a \ x$$

$a)$ $f(x)$ é uma função crescente quando $a > 1$ e decrescente quando $0 < a < 1$;

$b)$ $f(x \cdot y) = f(x) + f(y)$

As propriedades $a)$ e $b)$ é o que caracteriza as funções logarítmicas, ou seja, toda função com as propriedades $a)$ e $b)$ é necessariamente uma função logarítmica. Em [8] Lima demonstra o teorema que caracteriza as funções logaritmicas. Destacamos aqui seu enunciado:

Teorema 1. *Seja $f : R^+ \to R$ uma função monótona injetiva (isto é, crescente ou decrescente) tal que $f(xy) = f(x) + f(y)$ para quaisquer x e $y \in R^+$. Então existe $a > 0$ tal que $f(x) = log_a \ x$ para todo $x \in R^+$.*

Mostraremos outras propriedades das funções logarítmicas que são consequências dos ítens $a)$ e $b)$ enunciados acima. Tais demonstrações se encontram em [9].

1. Logaritmo de 1(um) é 0(zero).

   Demonstração. De $b)$ temos, $f(1) = f(1 \cdot 1) = f(1) + f(1)$, logo $f(1) = 0$ □

2. *Os números maiores do que 1(um) tem logaritmos positivos e os números positivos menores do que 1(um) têm logaritmos negativos.*

   Demonstração. De $a)$ para $a > 1$, f é crescente, então para $0 < x < 1 < y$, resulta $f(x) < f(1) < f(y)$. Como $f(1) = 0 \Rightarrow f(x) < 0 < f(y)$. Agora para $a < 1$, f é decrescente, então para $0 < x < 1 < y$, resulta $f(x) > f(1) > f(y)$. Como $f(1) = 0 \Rightarrow f(y) < 0 < f(x)$. □

3. Para todo $x > 0$, tem-se $f(1/x) = -f(x)$.

Demonstração. De fato, $1 = x \cdot \frac{1}{x} \Rightarrow f(1) = f(x \cdot \frac{1}{x}) = f(x) + f(\frac{1}{x}) = 0 \Rightarrow$ $f(\frac{1}{x}) = -f(x)$ □

4. Para quaisquer x e y reais positivos temos $f\left(\dfrac{x}{y}\right) = f(x) - f(y)$

Demonstração. $f\left(\dfrac{x}{y}\right) = f(x \cdot \frac{1}{y}) = f(x) + f(\frac{1}{y}) = f(x) - f(y) \Rightarrow$

$\Rightarrow f\left(\dfrac{x}{y}\right) = f(x) - f(y)$ □

5. Para todo x real positivo e $r = \dfrac{p}{q}$ um racional positivo tem-se $f(x^r) = rf(x)$

Demonstração. Temos $(x^r)^q = (x^{\frac{p}{q}})^q = x^p \Rightarrow q \cdot f(x^r) = f(x^p) = p \cdot f(x) \Rightarrow$ $qf(x^r) = pf(x) \Rightarrow f(x^r) = \frac{p}{q}f(x)$ ou seja,

$$f(x^r) = rf(x)$$

□

Podemos aproximar qualquer irracional por um racional. Por exemplo, podemos construir a sequência $1,4; 1,41; 1,414...$, onde cada termo a partir do primeiro é uma melhor aproximação de $\sqrt{2}$. E a construção dessa sequência pode ser feita de maneira rápida com auxílio de uma calculadora. O primeiro termo da sequência é 1,4, pois $(1,4)^2 = 1,96$ e $(1,5)^2 = 2,25$. O termo seguinte é $1,41$, pois $(1,41)^2 = 1,9881$ e $(1,42)^2 = 2,0164$. O terceiro termo é 1,414, pois $(1,414)^2 = 1,9993$ e $(1,415)^2 = 2,0022$. Com este processo, a cada passo, obtemos mais uma casa decimal dos números seguintes da sequência. Desta forma podemos dizer que a propriedade 5, demonstrada acima, é válida para qualquer potência de expoente real, pois podemos obter um racional tão próximo de um irracional quanto quisermos.

3.3 O Número e

Há números de tamanha importância na matemática que tem até nome próprio. O número π é um deles. Mesmo não podendo escrever tal número com uma quantidade finita de casas decimais, seu valor aproximado com 6 casas decimais é 3,141516, não é dificil explicar a um leigo em matemática que obtemos tal número fazendo a razão entre o comprimento de uma circunferência e o seu diâmetro, não importando o quão grande ou pequena é esta circunferência a razão é sempre a mesma. Em símbolos temos:

- c: comprimento da circunferência
- d: diâmetro da circunferência

$$\pi = \frac{c}{d}$$

O não menos famoso número e (número de Euler, conhecido como base dos logaritmos naturais), é mais envolto em mistérios. Não se sabe ao certo a sua origem, embora ele tenha sido mencionado na tradução inglesa de Edward Wrigth do trabalho de John Napier sobre logaritmos, publicado em 1618. Esse período ficou marcado por um enorme crescimento do comércio e transações financeiras, em que havia necessidade de se calcular os juros compostos[10]. O surgimento do número e pode ser consequência da tentativa de resolução de um desses problemas.

Vamos considerar aqui esta hipótese econômica responsável pelo surgimento do número e, por ser as questões financeiras preocupação constante e central das relações humanas. Eli Maor em [10] cita um fato que mostra esta antiga relação do homem com os problemas que envolvem dinheiro: Um tablete de argila da Mesopotâmia, datado de 1700 a.C, que propõe o seguinte problema:

Quanto tempo levará para uma soma em dinheiro dobrar se for investida a uma taxa de 20 por cento de juros compostos anualmente?

Motivados por este exemplo vamos resolver o seguinte problema:

Suponha que um capital C seja aplicado a uma taxa de juros de i capitalizada mensalmente. Qual o valor a ser resgatado M depois de um período de t meses? Fazendo a capitalização a cada mês, obtemos para:

$$t = 1 \Rightarrow M = C(1+i)$$

$$t = 2 \Rightarrow M = C(1+i)^2$$

$$t = 3 \Rightarrow M = C(1+i)^3$$

$$t = 4 \Rightarrow M = C(1+i)^4$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

$$t = n \Rightarrow M = C(1+i)^n$$

A fórmula $M = C(1+i)^n$ é a base para todos os cálculos que envolve aplicações financeiras. As instituições financeiras usam capitalizações anuais, semestrais, trimestrais, semanais ou mesmo diária. Se a capitalização for feita n vezes no ano, por exemplo, a taxa i de juros anual será dividida por n, pois serão feitas n capitalizações, ou seja, em um ano teremos a incidência da taxa i/n sobre o capital inicialmente investido n vezes. Vamos acompanhar na tabela abaixo e comparar os valores obtidos para períodos diferentes de capitalizações.

Período de capitalização	n	i/n	M
anual	1	0,10	R\$110,00
semestral	2	0,05	R\$110,25
trimestral	4	0,025	R\$110,38
bimestral	6	0,016666	R\$110,43
mensal	12	0,008333	R\$ 110,47
semanal	52	0,0019231	R\$110,50
diário	365	0,00027397	R\$110,51
a hora	8760	0,00001141	R\$110,517

Observando os resultados, vemos que uma soma de $R\$ \, 100,00$ capitalizada a cada hora rende quase $R\$ \, 0,52$ a mais da capitalização anual. Notamos também, que a medida que aumenta o número de capitalizações o valor atualizado aumenta, mas de forma cada vez mais lenta. Sendo a diferença cada vez menor.

Para explorar um pouco a formula $M = c(1 + i/n)^n$, vamos considerar um investimento de R$ 1,00 e uma taxa de juros igual a 100% ao ano, isto é, $c = 1$ e $i = 1$. Nosso propósito é investigar o comportamento da fórmula $(1 + 1/n)^n$ para valores de n cada vez maiores.

n	$\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$
1	2
2	2,25
3	2,37037
4	2,44141
5	2,48832
10	2,59374
50	2,69159
100	2,70481
1 000	2,71692
10 000	2,71815
100 000	2,71827
1 000 000	2,71828
10 000 000	2,71828
100 000 000	2,71828

Notamos que a medida que n cresce a alteração no resultado é cada vez menor. Percebemos pela tabela que o resultado ficará em torno de 2,71828.

Esta afirmação é comprovada pelo cálculo do $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, que é a definição do número e, e escrevemos,

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$$

O número de euler indicado pela letra e é um número irracional. Com 5 casas decimais ele é aproximado por 2,71828.

3.4 A Funçâo $y = e^x$

Entre as funções exponenciais, tem particular interesse a função cuja base é o número e. A função exponencial $y = e^x$ aparece na descrição de vários fenômenos naturais e evolutivos. É o que se passa, por exemplo, na capitalização de juros (Economia), no crescimento de uma população (Biologia), na desintegração radioativa (Química), na propagação de uma doença (Medicina), na publicidade, entre outros. Em [11][p. 185] encontramos um exemplo na publicidade.

Pesquisas empíricas provam que se a divulgação de um produto, atráves de campanhas publicitárias, for interrompida e as demais condições de mercado não forem alteradas, então, a cada instante t, as vendas do produto vão decrescer exponencialmente em função do tempo, segundo a equação:

$$V(t) = V_0 \cdot e^{-kt}$$

em que:

V: número de unidades vendidas no instante t, após a interrupção.

V_0: número de unidades vendidas no momento da interrupção da publicidade.

k: constante positiva que depende do tipo de produto, do tempo de esforços promocionais anteriores, do número de produtos concorrentes, etc.

Observamos como avaliar o comportamento de vendas de dois produtos A e B. As publicidades sobre dois produtos, A e B, foram interrompidas no mesmo instante $t = 0$, quando o produto A vendia 24000 unidades mensais e B vendia 8000 unidades mensais. Os números de unidades vendidas mensalmente de A e B, a partir do instante de interrupção das propagandas, podem ser descritos, respectivamente por:

$$V_A(t) = 24000\ e^{-5t}$$

e

$$V_B(t) = 8000\ e^{-2t}$$

Durante quanto tempo, a partir do instante $t = 0$, as vendas do produto A não serão inferiores às vendas do produto B?

Resolução

$$24000\ e^{-5t} \geq 8000\ e^{-2t} \Leftrightarrow 3e^{-5t} \geq e^{-2t} \Leftrightarrow \frac{e^{-5t}}{e^{-2t}} \geq \frac{1}{3} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow e^{-3t} \geq \frac{1}{3} \Leftrightarrow ln\ e^{-3t} \geq ln\ 3^{-1} \Leftrightarrow -3t \geq -ln\ 3 \Leftrightarrow t \leq \frac{ln\ 3}{3}$$

Aproximando $e = 3$, teremos que as vendas do produto A não serão inferiores às vendas do produto B durante $\frac{1}{3}$ ou aproximadamente 10 dias do mês subsequente.

3.5 A Funçâo $y = ln\ x$

Já definimos a função logaritmo ($y = log_b\ x$) de base b como inversa da função exponencial de base b ($y = b^x$). Quando $b = e$ ao invés de escrever $y = log_e\ x$ escrevemos $y = ln\ x$, ou seja, a função $ln\ x$ é a inversa da função e^x.

Quando falamos que g é a função inversa de f é dizer que g desfaz o que f faz, ou seja, quando a função f associa o número $x = 3$ ao número $y = 5$ a função g faz corresponder o valor de $y = 5$ no valor de $x = 3$. Então escrever $y = e^x$ é equivalente a escrever $x = ln\ y$, ou seja, $ln\ e = 1 \Leftrightarrow x = e$

Todas as propriedades da função logaritmo são também propriedades de $ln\ x$. A função $ln\ x$ é chamada de logaritmo natural.

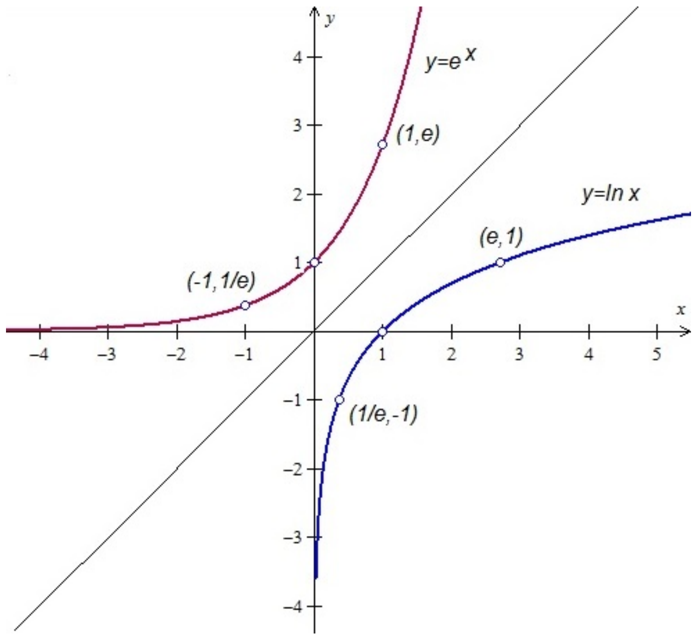


Figura 3.2: As funções inversas $y = e^x$ e $y = ln\ x$

CAPÍTULO 4

A DEFINIÇÃO USANDO ÁREA SOB A HIPÉRBOLE

Dos livros didáticos consultados, todos aprovados pelo programa nacional do livro didático do ensino médio (PNLDEM), [1] [7], [11], [14], [5], [12], apenas o livro do DANTE[5] faz um comentário de 3 linhas sobre definição dos logaritmos de base e, conhecido como logaritmo natural ou $ln\ x$, usando área sob o ramo positivo da hipérbole $y = \dfrac{1}{x}$.

Primeiro o padre jesuíta belga Gregory Saint Vincent, em 1647, e depois Isaac Newton, em 1660, reconheceram uma relação estreita entre a área de uma faixa de hipérbole e os logaritmos[9].

Destacaremos neste capítulo que as áreas das regiões limitadas pelo ramo positivo da hipérbole $y = \dfrac{1}{x}$, pelo *eixo* x, pelas retas $x = a$ e $x = b$, são valores de logaritmos na base natural (base e).

Considere o gráfico da função $f(x) = \dfrac{1}{x}$ para $x > 0$. Dados dois números positivos a e b, com $a < b$, chamaremos de faixa da hipérbole e a indicaremos por F_a^b a região do plano limitada pelas duas retas verticais $x = a$ e $x = b$, pelo eixo das abscissas e pela função $f(x) = \dfrac{1}{x}$. Observe que a e b referem-se, respectivamente, ao extremo inferior e ao extremo superior do intervalo, no eixo das abscissas, como na figura 4.1. Portanto, a faixa F_a^b é formada pelos pontos (x, y), tais que $a \leq x \leq b$ e $0 \leq y \leq 1/x$.

Mostraremos um procedimento para calcular a área de uma faixa F_a^b. Para cal-

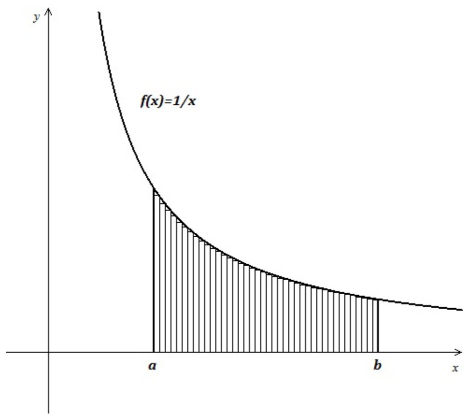


Figura 4.1: Faixa sob a hipérbole de extremos a e b

cular, aproximadamente, a área da faixa F_a^b vamos decompor o intervalo [a,b] em um número finito de subintervalos, todos com o mesmo comprimento, formando retângulos de base igual ao comprimento dos subintervalos e altura calculada pela função $y = \dfrac{1}{x}$. Ao somar as áreas de cada um dos retângulos, vamos obter aproximadamente por falta, o valor da área da faixa F_a^b.

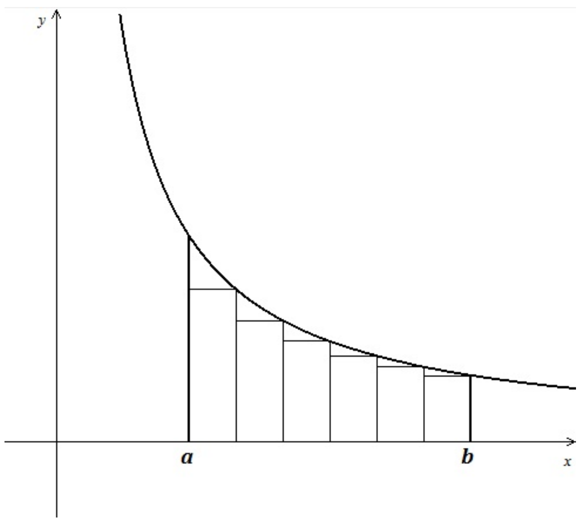


Figura 4.2: Intervalo [a,b] dividido em seis retângulos de mesma base

Observe a resolução de um exemplo:

Considere a faixa F_1^3 (figura 4.3). Dividiremos o intervalo [1,3] em 4 subintervalos iguais através dos pontos 1, $\frac{3}{2}$, 2, $\frac{5}{2}$, 3. Temos então 4 retângulos de base $\frac{1}{2}$ e alturas, respectivamente, iguais a $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{5}$ e $\frac{1}{3}$. Somando as áreas dos 4 retângulos obtemos um valor aproximado por falta igual a $\frac{57}{60} = 0,95$. De fato,

$$\frac{1}{2}\cdot\left(\sum_{i=1}^{4}\frac{1}{1+0,5i}\right) = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{2}+\frac{2}{5}+\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{20+15+12+10}{30}\right) = \frac{57}{60} = 0,95$$

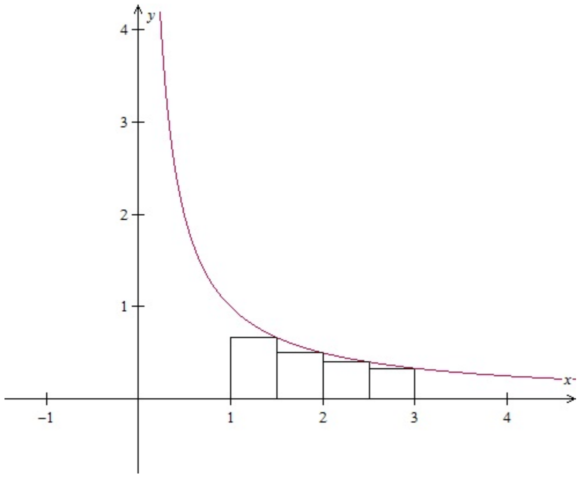


Figura 4.3: Área da faixa F_1^3 aproximada por 4 retângulos

Para obtermos um valor que melhor aproxima a área da faixa F_1^3 dividiremos o intervalo [1,3] em 8 subintervlos iguais (figura 4.4) por meio dos pontos 1, $\frac{5}{4}$, $\frac{6}{4}$, $\frac{7}{4}$, $\frac{8}{4}$, $\frac{9}{4}$, $\frac{10}{4}$, $\frac{11}{4}$ e 3. teremos agora 8 retângulos de mesma base, iguais a $\frac{1}{4}$ e alturas, respectivamente, iguais a $\frac{4}{5}$, $\frac{4}{6}$, $\frac{4}{7}$, $\frac{4}{8}$, $\frac{4}{9}$, $\frac{4}{10}$, $\frac{4}{11}$ e $\frac{1}{3}$.

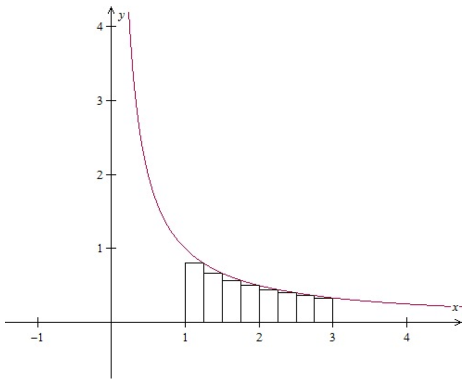


Figura 4.4: Área da faixa F_1^3 aproximada por 8 retângulos

Somando as áreas dos 8 retângulos teremos:

$$\frac{1}{4}\cdot\left(\sum_{i=1}^{8}\frac{1}{1+0,25i}\right)=\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{4}{5}+\frac{2}{3}+\frac{4}{7}+\frac{1}{2}+\frac{4}{9}+\frac{2}{5}+\frac{4}{11}+\frac{1}{3}\right)=\frac{84813}{83160}\cong 1,01988$$

Não é difícil perceber que a medida que aumentamos o número de retângulos inscritos na faixa F_a^b, subdividindo-a cada vez mais, obtemos aproximações cada vez melhores para a área que queremos calcular, ou seja, quanto mais subdivisões fizermos no intervalo [1,3] teremos mais retângulos inscritos sob a faixa F_1^3 e ao somar as áreas desses retângulos obtemos uma valor por falta cada vez mais próximo da área da faixa F_1^3, pois os espaços entre a hipérbole e as arestas superiores dos retângulos serão cada vez menores. Veja essa afirmação ilustrada na figura 4.5.

Podemos usar o software Winplot[16] [1] para calcular a área da faixa F_1^3 com uma precisão cada vez melhor.

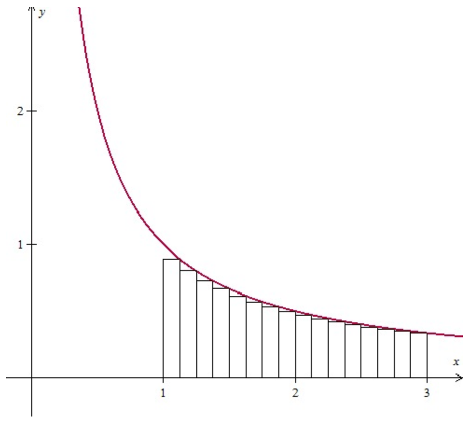


Figura 4.5: Faixa F_1^3 subdividida em 16 retângulos. Área aproximada 1,05810 calculada no Winplot.

O propósito de usar o software Winplot para calcular as áreas das faixas sob a hipérbole, além de evitar os detalhes formais do cálculo de limites, apresenta-se um software que permite uma visualização concreta sobre a situação descrita. Permitindo também aos alunos manipularem o software fazendo experimentações e conjecturas.

[1] programa desenvolvido pelo professor Richard Parris em 1985, para geração de gráficos em duas ou três dimensões, a partir de equações ou funções, de modo simples, rápido e direto.

Para indicar a área da faixa F_1^c usaremos $A_1(c)$, de modo que, a área da faixa F_1^3 será representada por $A_1(3)$. Com 1 000 000 (um milhão) de retângulos, com aproximação de 5 casas decimais, temos que $A_1(3) = 1,09861$.

Usando o software Winplot com a mesma técnica dos retângulos, iremos calcular as áreas de determinadas faixas F_1^x , onde $A_1(x)$ representa a área sob a hipérbole no intervalo [1,x].

Na tabela abaixo temos alguns valores:

x	$A_1(x)$
1	$A_1(1) = 0,00000$
2	$A_1(2) = 0,69315$
3	$A_1(3) = 1,09861$
4	$A_1(4) = 1,38629$
5	$A_1(5) = 1,60943$
6	$A_1(6) = 1,79176$
7	$A_1(7) = 1,94591$
8	$A_1(8) = 2,07944$
9	$A_1(9) = 2,19722$
10	$A_1(10) = 2,30258$

Considerando a tabela acima vamos responder algumas perguntas e observar algumas propriedades relaciondas as áreas das faixas F_1^x.

Observe:

$$A_1(2) + A_1(4) = 2.07944$$

$$A_1(8) = A_1(2\cdot 4) = 2.07944$$

ou seja, são iguais. Temos então que,

$$A_1(2\cdot 4) = A_1(2) + A_1(4)$$

Percebe-se a mesma idéia dos logaritmos, temos produto sendo transformado em soma. O mesmo acontece com a divisão que é transformada em uma diferença. Veja,

$$A_1(10) - A_1(5) = 0,69315$$

$$A_1(2) = A_1(10 \div 5) = 0,69315$$

de onde se conclui que

$$A_1(10 \div 5) = A_1(10) - A_1(5)$$

Isto não é por acaso, fazendo cálculos com outros valores da tabela observamos a mesma propriedade. Suspeitamos que esta tabela trata-se de uma tábua de logarítmos. E é exatamente isto, vejamos por quê:

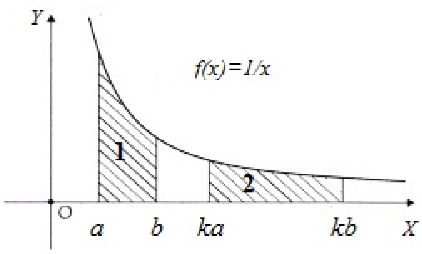


Figura 4.6: A região 1 representa a F_a^b e a região 2 representa F_{ka}^{kb}

Primeiro vamos mostrar que $A_a(b) = A_{ka}(kb)$ para qualquer $k > 0$. De fato, Considere dois retângulos inscritos na hipérbole, um de base $b - a$ e altura $\dfrac{1}{b}$ e o outro de base $kb - ka = k(b - a)$ e altura $\dfrac{1}{kb}$. Suas áreas são, respectivamente:

$$(b-a)\cdot \frac{1}{b} = \frac{(b-a)}{b}$$

e

$$k(b-a)\cdot \frac{1}{kb} = \frac{k(b-a)}{kb} = \frac{(b-a)}{b}$$

Comparando as duas áreas, notamos que são iguais

Considere agora que cada uma das regiões, a saber F_a^b e F_{ka}^{kb} seja divida em n retângulos inscritos na hipérbole. Observamos que para cada retângulo inscrito na faixa F_a^b existe um inscrito na faixa F_{ka}^{kb} com a mesma área, pelo exposto em acima. Somando as áreas dos n retângulos de cada faixa, teremos valores aproximados de $A_a(b) = A_{ka}(kb)$. De modo que a medida que aumentarmos o número de retângulos inscritos estaremos obtendo aproximações por falta cada vez melhores das áreas de cada uma das regiões, que pelo exposto, são iguais. Esta exposição confirma o resultado abaixo:

Proposição 6. *Para todo número real, $k > 0$, temos $A_a(b) = A_{ka}(kb)$ (1)*

Uma consequência imediata de (1) é que podemos restringir a área de qualquer faixa F_a^b a uma outra faixa da forma F_1^c. De fato,

$$A_a(b) = A_{\frac{a}{a}}\left(\frac{b}{a}\right) = A_1\left(\frac{b}{a}\right).$$

Fazendo $c = \frac{b}{a}$ concluimos que

$$A_a(b) = A_1(c). \quad (2)$$

Lembrando, nosso objetivo é mostrar que tabelas obtidas calculando áreas de faixas F_a^b, que pelo exposto podemos representar por $A_1(c)$, sob o ramo positivo da hipérbole $y = \dfrac{1}{x}$ tem as mesmas propriedades de uma tabela logarítmica, ou seja:

$$A_1(xy) = A_1(x) + A_1(y)(*)$$

Primeiro vamos mostrar que dados a, b e c números reais positivos, obtemos:

$$A_a(c) = A_a(b) + A_b(c)(**)$$

De fato, se $a < b < c$ constatamos de imediato (**). Tal situação é ilustrada na figura 4.7.

É evidente que em valores absolutos $A_a(b)$ e $A_b(a)$ são iguais, pois trata-se da mesma figura. No entanto, a fim de que a igualdade (**) continue verdadeira para quaisquer a, b e c, independente da ordem, convencionaremos que $A_a(b) = -A_b(a)$. Isto posto, para $b < a < c$, teremos:

$$A_b(c) = A_b(a) + A_a(c) \Rightarrow A_a(c) = A_b(c) - A_b(a) \Rightarrow A_a(c) = A_a(b) + A_b(c)$$

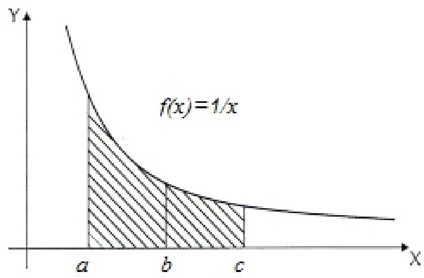


Figura 4.7: $a < b < c$

Seja, agora $c < a < b$, assim

$$A_c(b) = A_c(a) + A_a(b) \Rightarrow -A_b(c) = -A_a(c) + A_a(b) \Rightarrow A_a(c) = A_a(b) + A_b(c)$$

Obeserve esta situação ilustrada na figura 4.8. A validade dos demais casos são análogos. Concluimos, então, que para quaisquer a, b e c números reais positivos teremos:

$$A_a(c) = A_a(b) + A_b(c)$$

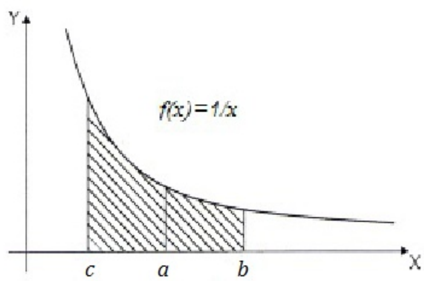


Figura 4.8: $c < a < b$

Considere agora os números reais positivos 1, x e xy. De (*)

$$A_1(xy) = A_1(x) + A_x(xy)$$

do resultado (2) já sabemos que

$$A_x(xy) = A_1(y)$$

donde concluimos,

$$A_1(xy) = A_1(x) + A_1(y)$$

Esta é a regra do produto nas tabelas logarítmicas.

O mesmo acontece com a divisão. Observe:

$$A_1\left(\frac{x}{y}\right) = A_1\left(x\cdot\frac{1}{y}\right) = A_1(x) + A_1\left(\frac{1}{y}\right) = A_1(x) - A_1(y)$$

pois, já mostramos que $A_1\left(\frac{1}{y}\right) = A_y(1) = -A_1(y)$.

Como suspeitávamos as áreas das faixas sob a hipérbole $y = \dfrac{1}{x}$ tem as mesmas propriedades das tabelas logarítmicas, de modo que os valores das áreas formam um sistema de logaritmos. Mas em qual base?

4.1 A Base e

Ao calcular a área da faixa F_1^x , necessariamente, para algum valor de x teremos $A_1(x) = 1$. A pergunta é: qual o valor de x para que se tenha $A_1(x) = 1$? Ou ainda, para qual x no intervalo [1,x] a área da faixa F_1^x será igual a 1?

Já mostramos que as tabelas formadas pelos números que representam os valores $A_1(x)$, são tabelas logarítmicas, pois o que caracteriza os logaritmos, $log_b(x\cdot y) = log_b x + log_b y$, é verificado também para $A_1(x)$, ou seja, $A_1(xy) = A_1(x) + A_1(y)$.

Podemos, então, definir

$$A_1(x) = log_b\ x$$

Novamente o software Winplot pode nos auxiliar a descobrir qual o valor de x para que tenhamos $A_1(x) = 1$. Ao definir o intervalo [1; 2,718281], calculando o valor de $A_1(2,718281)$, obtemos 1 como resultado. O número 2,718281 é uma aproximação do número e com 6 casas decimais.

De forma inesperada, o valor de x para que tenhamos $A_1(x) = 1$ é o mesmo número obtido através do cálculo do limite:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

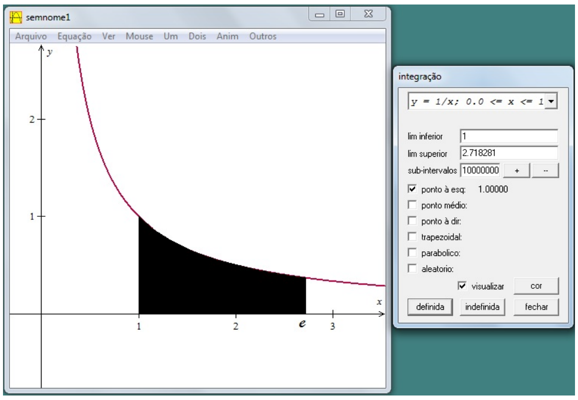


Figura 4.9: Área calculada no intervalo [1; 2,718281] ou $A_1(2,718281) = 1$ usando o Winplot, ou ainda, $ln\ e = 1$.

O valor de x é exatamente o número e, o famoso número de Euler, já também conhecido como número de Napier.

Temos então, uma outra maneira de caracterizar o número e, ou seja, e é o número tal que $A_1(e) = 1$. Não deixa de ser uma surpresa que um número, a princípio envolvido com questões financeiras, também aparece em situações relacionadas com área.

Aos logaritmos de base e chamamos logaritmos naturais e escrevemos $ln\ x$ ao invés de $log_e\ x$. Assim, para todo $x > 0$, podemos escrever:

$$A_1(x) = ln\ x$$

4.2 Outras Bases

Para obtermos outros sistemas de logaritmos usando áreas basta considerar a hipérbole $y = k/x$, sendo k uma constante real positiva. Para cada valor de k teremos um novo sistema de logaritmo, ou seja, a base desse novo sistema depende do valor de k.

Temos agora a faixa sob a hipérbole $y = k/x$. Seja $F[k]_a^b$ a faixa sob a hipérbole formada pelos pontos (x, y) tais que $a \leq x \leq b$ e $0 \leq y \leq k/x$. Seja $A_a[k](b)$ a área sob a faixa $F[k]_a^b$.

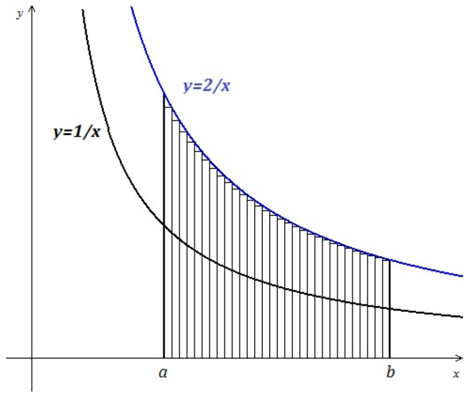


Figura 4.10: Áreas sob as faixas das hipérboles $y = \dfrac{1}{x}$ e $y = \dfrac{2}{x}$ no intervalo [a,b]

Afirmamos que $A_a[k](b) = k{\cdot}\, A_a(b)$.

De fato, ao calcular $A_a(b)$ usamos retângulos inscritos sob a hipérbole $y = 1/x$. Ao somar as áreas desses retângulos tínhamos o valor da área aproximado por falta. Agora vamos inscrever retângulos na hipérbole $y = k/x$, de modo que a altura dos triângulos inscritos serão multiplicados pela constante k, pois estamos considerando o mesmo número de triângulos inscritos na faixa F_a^b e $F[k]_a^b$ e todos com a mesma base. Assim podemos escrever

$$A[k]_a\ (b) = k{\cdot}\, A_a(b)$$

Já definimos que $A_1(x) = ln\ x$ então,

$$A[k]_1(x) = k{\cdot}\, A_1(x) = k{\cdot}\, ln\ x$$

Assim podemos definir $A[k]_1(x)$, para $k > 0$ como um sistema de logaritmos, pondo:

$$log_b\ x = A[k]_1(x)$$

ou seja,

$$log_b\ x = k{\cdot}\, ln\ x$$

Sabemos que a base de um sistema de logaritmos é um número $b > 0$ tal que $log_b\ b = 1$. Assim,

$$log_b\ b = k{\cdot}\, lnb = 1 \Rightarrow k = 1/lnb \Rightarrow$$

$$\Rightarrow b = e^{1/k}$$

Por exemplo, se quizermos um sistema de logaritmos na base $b = 2$ devemos tomar $k = 1,443$.

Podemos então, definir o $log_b\ x$ como a área da faixa da hipérbole $y = \dfrac{1}{xln\ b}$ compreendida entre 1 e x.

Isto posto, temos para $k > 0$ e $b = e^{1/k}$:

- se $0 < x < 1, A_1[k](x) < 0 \Rightarrow log_b\ x < 0$
- se $x = 1, A_1[k](x) = 0 \Rightarrow log_b\ x = 0$
- se $x > 1, A_1[k](x) > 0 \Rightarrow log_b\ x > 0$

Uma observação é necessária: Ao considerar $k > 0$ a base $b = e^{1/k}$ será sempre maior que 1 ($b > 1$). No entanto, se quizermos calcular logaritmos com base $0 < b < 1$ usando o cálculo de áreas como descrito acima, basta observar que $log_b\ x = -log_{\frac{1}{b}}\ x$, ou seja, para obter uma tabela de logaritmos na base $b = \frac{1}{3}$ basta trocar o sinal dos valores dos logaritmos de base $b = 3$. Podemos visualizar este fato no gráfico da figura 4.11. Observe que os gráficos são simétricos em relação ao eixo x.

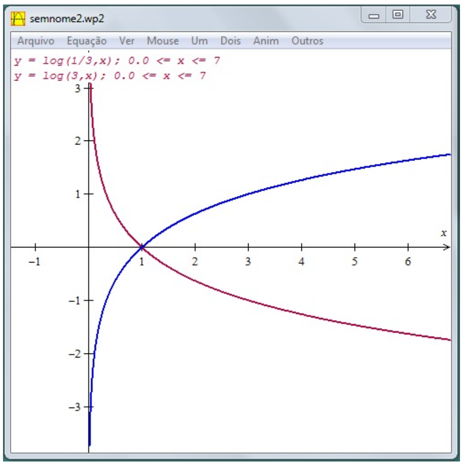


Figura 4.11: Curva crescente $log_3\ x$ e curva decrescente $log_{\frac{1}{3}}\ x$

Mostramos que qualquer sistema de logaritmos pode ser definido como área, um conceito mais natural, que a definição usando potências.

CAPÍTULO 5

OS LOGARITMOS NA ATUALIDADE

Hoje não há mais espaço para as tabelas logarítmicas. A tecnologia permite cálculos com uma rapidez e precisão nem imaginada por Napier e seus contemporâneos. Posição reforçada em [3].

> A parte operacional da resolução de equações exponenciais e logarítmicas e o estudo das propriedades de características e mantissas podem ter sua ênfase diminuída e, até mesmo, podem ser suprimidas, pois os avanços tecnológicos, com o uso de softwares matemáticos, levam os estudantes a resolver e calcular expressões exponenciais e logarítmicas através desses recursos.

Podemos então descartar o estudo dos logaritmos? Obviamente que não. Só que o foco agora é outro.

Desse modo, a ênfase do estudo dos logaritmos e exponencias, podemos dizer que são até "almas gêmeas", pela estreita relação entre estes objetos matemáticos, deve priorizar o conceito dessas funções, o que as caracteriza, as suas propriedades, a interpretação de seus gráficos e as aplicações dessas funções, onde reside todo o seu poder de atuar no mundo real.

LIMA em [8] reforça que a função logarítmica e a sua inversa, a função exponencial, possuem propriedades que as qualificam como modelos ideais de certos fenômenos de variação. Pode-se citar:

- a capitalização contínua de juros que consiste em cálculos com aplicações financeiras.
- a desintegração de uma substância radioativa e a estimativa de idade de fósseis e artefatos através da datação por carbono.
- resfriamento de um corpo aquecido quando colocado num meio mais frio.
- escala sísmica intensidade dos terremotos.

Essas são algumas situações da natureza que se revelam para justificar a importância das funções exponenciais e logarítmicas na Matemática, nas ciências e na tecnologia. Fato também abordado em[3].

> Outro aspecto importante são os problemas de aplicação: Os problemas de aplicação não devem ser deixados para o final deste estudo, mas devem ser motivo e contextos para o aluno aprender funções. A riqueza de situações envolvendo funções permite que o ensino se estruture permeado de exemplos do cotidiano, das formas gráficas que a mídia e outras áreas do conhecimento utilizam para descrever fenômenos de dependência entre grandezas. [PCN +, 2002]

As variações exponenciais e logarítmicas são partes intrínsecas da natureza, assim, um estudo das propriedades da função logarítmica e de sua inversa, a função exponencial, permanecerá como uma parte importante do ensino da matemática, como consequência, os logaritmos terão uma longevidade ainda maior.

5.1 Aplicações

O logaritmo natural lnx e a função exponencial e^x surgem naturalmente em certas questões onde o aumento ou a diminuição de uma grandeza se faz proporcionalmente ao valor da grandeza num dado instante. As aplicações aqui descritas foram retiradas dos textos [8], [13] e no site [15].

5.1.1 Desintegração Radioativa

Os átomos de uma substância radioativa (como o rádio ou o urânio) possuem uma tendência natural a se desintegrarem, emitindo partículas e transformando-se em outra substância não-radioativa. Assim, com o passar do tempo, a quantidade de substância original diminui (aumentando, consequentemente, a massa da nova substância transformada). Isto é feito de tal maneira que, num determinado instante, a quantidade de matéria que se desintegra de um corpo radioativo é proporcional à massa da substância original presente no corpo naquele instante. A constante de proporcionalidade α é determinada experimentalmente. Cada substância radioativa tem sua constante de desintegração α .

Consideremos um corpo de massa M_0, formado por uma substância radioativa cuja taxa de desintegração é α . Se a desintegração se processasse instantaneamente, no fim de cada segundo, sendo M_0 a massa no tempo $t = 0$, decorrido o tempo $t = 1$ segundo, haveria uma perda de M_0 unidades de massa, restando apenas a massa

$$M_1 = M_0 - \alpha M_0 = M_0(1 - \alpha)$$

Decorridos 2 segundos, a massa restante seria

$$M_2 = M_1(1 - \alpha) = M_0(1 - \alpha)^2$$

Em geral, passados s segundos, restaria a massa

$$M_s = M_0(1 - \alpha)^s$$

Mas as coisas não se passam assim: a desintegração se processa continuamente. Procurando uma aproximação melhor para o fenômeno, fixemos um inteiro $n > 0$ e imaginemos que a desintegração se dá em cada intervalo de $1/n$ segundo. Depois da primeira fração $1/n$ de segundo a massa do corpo se reduziria a

$$M_0 - (\frac{\alpha}{n})M_0 = M_0(1 - \frac{\alpha}{n})$$

Decorrido 1 segundo, teriam ocorrido n desintegrações instantâneas e, efetuadas as n reduções, restaria do corpo a massa

$$M_0(1 - \frac{\alpha}{n})^n$$

Dividindo o intervalo [0,1] em um número n cada vez maior de partes iguais, chegaremos à conclusão de que, ao final de 1 segundo, a massa do corpo ficará reduzida a

$$\lim_{n\to\infty} M_0\left(1 - \frac{\alpha}{n}\right)^n = M_0 \cdot e^{-\alpha}$$

Se quisermos calcular a massa ao fim de t segundos, deveremos dividir o intervalo [0, t] em n partes iguais. Em cada intervalo parcial a perda de massa será

$$M_0 \cdot \frac{\alpha \cdot t}{n}$$

Repetindo o argumento acima chegaremos a expressão

$$M_t = M_0 \cdot e^{-\alpha t}$$

que fornece a massa do corpo depois de decorridos t segundos. É claro que, em vez de segundos, poderíamos ter adotado outra unidade de tempo. Mudando a unidade de tempo, a constante α deve ser alterada proporcionalmente. Na prática, a constante α fica determinada a partir de um número básico, chamado a meia-vida da substância. A meia-vida da substância radioativa é o tempo necessário para que se desintegre a metade da massa de um corpo formado por aquela substância. Por exemplo, o polônio 218 tem meia-vida igual a 2 minutos e 45 segundos, enquanto o polônio 214 tem meia-vida de $1,64 \times 10^{-4}$ segundos. Se sabemos que um certo elemento radioativo tem meia-vida igual a t_0 unidades de tempo, isto significa que uma unidade de massa desse elemento se reduz à metade no tempo t_0. Assim

$$e^{-\alpha t} = \frac{1}{2}$$

tomando logaritmos, temos

$$-\alpha t_0 = ln(\frac{1}{2})$$

ou seja,

$$-\alpha t_0 = -ln2$$

donde

$$\alpha = \frac{ln2}{t_0}$$

Isto nos mostra como calcular a taxa de desintegração α quando se conhece a meia-vida t_0. Reciprocamente, tem-se $t_0 = ln2/\alpha$, o que permite determinar a meia-vida t_0 em função da taxa α.

5.1.2 O método do Carbono 14

O carbono 14, indicado por C^{14}, é um isótopo radioativo do carbono, formado na atmosfera devido ao bombardeio da terra por raios cósmicos. Através dos tempos, a quantidade de C^{14} na atmosfera tem-se mantido constante porque sua produção é compensada por sua desintegração. Os seres vivos absorvem e perdem C^{14} de modo que, em cada espécie, a taxa de C^{14} também se mantém constante. (O carbono 14 é criado nos vegetais durante o processo da fotossíntese e absorvido pelos animais através da ingestão, direta ou indireta, de vegetais). Quando o ser morre, a absorção cessa mas o C^{14} nele existente continua a desintegrar-se. Este fato pode ser usado para determinar a idade de um fóssil ou de um objeto muito antigo feito de madeira. Para isto, precisamos saber que a meia-vida do C^{14} é de 5570 anos. Como vimos acima, segue-se daí que a constante de desintegração do C^{14} é

$$\alpha = \frac{ln2}{5570} = \frac{0,6931}{5570} = 0,0001244$$

Vejamos como esse conhecimento foi usado para dirimir uma controvérsia.

Num castelo inglês existe uma velha mesa redonda de madeira que muitos afirmavam ser a famosa Távola Redonda do Rei Artur, soberano que viveu no século V. Por meio de um contador Geiger(instrumento que mede a radioatividade) constatou-se que a massa $M = M(t)$ de C^{14} hoje existente na mesa é 0,894 vezes a massa M_0 de C^{14} que existia na mesa quando ela foi feita, há t anos. Sabemos que

$$M = M_0 \cdot e^{-\alpha t}$$

donde

$$\frac{M}{M_0} = e^{-\alpha t}$$

isto significa que

$$0,894 = e^{0,0001244t}$$

daí tiramos:

$$t = \frac{ln(0,894)}{0,0001244} = \frac{0,1121}{0,0001244} = 901$$

Se a mesa fosse mesmo a Távola Redonda, ela deveria ter mais de 1500 anos.

5.1.3 A intensidade dos Sons

O que ouvimos e definimos como som são apenas ondas (sonoras) que se formam devido a pequenas vibrações de partículas do meio. Assim, quando estalamos os dedos, por exemplo, ocorre uma pequena compressão de moléculas de ar em volta de nossos dedos e se propagam pelo ar. Dependendo da distância que alguém estiver desses dedos o ouvido dele pode ser alcançado por estas ondas (sonoras). Nosso ouvido possui um mecanismo capaz de converter estas ondas em estímulos nervosos que são enviados ao cérebro nos fornecendo a sensação auditiva do som. Ao som que ouvimos o classificamos como alto ou baixo, forte ou fraco. Mas o que significa isto? Significa que podemos medir a intensidade do som que ouvimos e ela é medida em watt por metro quadrado W/m^2. A menor intensidade de som que podemos ouvir possui intensidade

$$I_0 = 10^{-12} W/m^2$$

A intensidade do som tem uma vasta variação desde muito pequenos até demasiadamente grandes. Em virtude dessa grande variação é utilizado a noção de logaritmo decimal para calcularmos o que é denominado nível sonoro, que é uma relação entre as intensidades sonoras. O nível sonoro NS é dado por uma relação entre a intensidade do som considerado I e a intensidade I_0 limiar da audibilidade e que podemos especificar por

$$NS = 10 \cdot log_{10}\left(\frac{I}{I_0}\right) dB$$

Algumas doenças como neurose, fadiga, surdez, dentre outras, podem ser causadas por exposições a níveis sonoros superiores a 80dB por um tempo excessivo. A conhecida tabela abaixo fornece o tempo máximo que uma pessoa pode se expor a ruídos contínuos e intermitentes sem que adquira lesões irreversíveis.

Nível Sonoro (dB)	Tempo máximo de exposição (h)
85	8
90	4
95	2
100	1

Para comparação, observe alguns níveis sonoros do nosso dia-a-dia.

Ruído	Nível Sonoro (dB)	Intensidade
Conversa a meia voz	40	104
Britadeira	100	1010
Danceteria	120	1012
Avião a jato aterrisando	140	1014

Para níveis superiores a 120dB, a sensação auditiva é dolorosa. Vamos, através de um exemplo, demonstrar o desenvolvimento da expressão que permite calcular o nível sonoro de um ambiente. Note, por exemplo, que o nível sonoro de uma intensidade de som igual a $10^{-5}W/m^2$ pode ser calculada da seguinte forma:

$$NS = 10 \cdot log_{10}\frac{I}{I_0} = 10 \cdot log_{10}\frac{10^{-5}}{10^{-12}} = 10 \cdot 7 = 70$$

Assim, o nível sonoro de uma intensidade de som igual a $10^{-2}W/m^2$ equivale a 70 dB.

5.1.4 Terremotos

A escala Richter foi desenvolvida por Charles Richter e Beno Gutenberg, no intuito de medir a magnitude de um terremoto provocado pelo movimento das placas tectônicas. As ondas produzidas pela liberação de energia do movimento das placas podem causar desastres de grandes proporções. Os estudos de Charles e Beno resultaram em uma escala logarítmica denominada Richter, que possui pontuação de 0 a 9 graus. A magnitude (graus) é o logaritmo da medida das amplitudes (medida por aparelhos denominados sismógrafos) das ondas produzidas pela liberação de energia do terremoto. A fórmula utilizada é a seguinte:

$$M = logA - logA_0$$

onde,

- M = magnitude
- A = amplitude máxima
- A_0 = amplitude de referência

Podemos utilizar a fórmula para comparar as magnitudes de dois terremotos. Iremos comparar um terremoto de 6 graus com outro de 8 graus de magnitude, todos na escala Richter.

$$M_1 - M_2 = (logA_1 - logA_0) - (logA_2 - logA_0)$$

$$6 - 8 = logA_1 - logA_2$$

$$-2 = log(A_1/A_2)$$

$$10^{-2} = A_1/A_2$$

$$(1/10)^2 = A_1/A_2$$

$$(1/100) = A_1/A_2$$

$$A2 = 100A1$$

Podemos notar que as ondas do terremoto A_2 possuem amplitudes 100 vezes mais intensas do que a do terremoto A_1. Para calcular a energia liberada por um terremoto, usamos a seguinte fórmula:

$$I = (2/3)log10(E/E0)$$

onde,

- I: varia de 0 a 9
- E: energia liberada em kW/h
- $E_0 : 7 \times 10^{-3} kW/h$

Qual a energia liberada por um terremoto de intensidade 6 na escala Richter? $I = 6$

$$6 = (2/3)log_{10}(E/7 \times 10^{-3})$$

$$9 = log_{10}(E/7 \times 10^{-3})$$

$$10^9 = E/7 \times 10^{-3}$$

$$E = 7 \times 10^{-3} \times 10^9$$

$$E = 7 \times 10^6 kW/h$$

A energia liberada por um terremoto de 6 graus na escala Richter é de 7×10^6 kW/h.

5.1.5 pH

As seqüências de reações em um organismo, só poderão ocorrer se o trânsito de íons em meio aquoso for estável, e para isso a composição e a osmolaridade deverão estar em um equilíbrio dinâmico. Para que esse equilíbrio seja mantido, é necessário o controle da concentração de hidrogênio (pH) a fim de que as reações não sejam perturbadas por variações ácido-básicas. O potencial hidrogeniônico é a grandeza que mede a concentração de íons hidrogênio em uma solução. O pH de uma solução é o co-logarítmo da concentração de íons hidrogênio $[H^+]$.

$$pH = -log[H+]$$

A escala compreende valores de 0 a 14, sendo que o 7 é considerado o valor neutro. O valor 0 (zero) representa a acidez máxima e o valor 14 a alcalinidade máxima. Valores abaixo de zero ou superiores a 14 também podem ser verificados em algumas substâncias.

As substâncias são consideradas ácidas quando o valor de pH está entre 0 e 7 e alcalinas (ou básicas) entre 7 e 14. Segue abaixo algumas soluções e respectivos valores de pH:

Substância	Nível pH
Ácido de bateria	$< 1,0$
Suco gástrico	$1,0 - 3,0$
Sumo de limão	$2,2 - 2,4$
Refrigerante tipo cola	$2,5$
Vinagre	$2,4 - 3,4$
Sumo de laranja ou maçã	$3,5$
Cervejas	$4,0 - 5,0$
Café	5,0
Chá	$5,5$
Chuva ácida	$< 5,6$
Saliva pacientes com câncer (cancro)	$4,5 - 5,7$
Leite	$6,3 - 6,6$
Água pura	$7,0$
Saliva humana	$6,5 - 7,5$
Sangue humano	$7,35 - 7,45$
Água do mar	$8,0$
Sabonete	$9,0 - 10,0$
Amoníaco	$11,5$
Água sanitária	$12,5$
Soda cáustica	$13,5$

A diminuição do pH no sangue humano está relacionado com o surgimento de doenças. O valor normal do pH sanguíneo deve ser 7,4. Abaixo desse valor, a acidez do sangue torna-se um meio propício para os mais variados fungos, bactérias e vírus. Medições do pH da saliva de pacientes com câncer registraram valores entre 4,5 e 5,7.

Para manter o equilíbrio do pH é importante evitar alimentos com pH baixo (refrigerante, café, etc.) e consumir alimentos alcalinos como vegetais, frutas com pouco açúcar, etc. Observemos um exemplo:

A acidez de frutas cítricas é determinada pela concentração de íons hidrogênio. Uma amostra de polpa de laranja apresenta pH = 2,3. Considerando log 2 = 0,3, a concentração de íons hidrogênio nessa amostra, em mol/L, equivale a:

$$pH = -log_{10}[H^+]$$

$$2,3 = -log_{10}[H^+]$$

$$10^{-2,3} = [H^+]$$

$$10^{-0,3} \times 10^{-2} = [H^+]$$

$$\frac{1}{10^{0,3}} \times \frac{1}{100} = [H^+]$$

como $log_{10}\ 2 = 0,3 \Rightarrow 10^{0,3} = 2$, temos,

$$\frac{1}{2} \times \frac{1}{100} = [H^+]$$

$$[H^+] = 0,005\ mol/L$$

5.1.6 Teoria da Informação

Recentemente, no século XX, com o desenvolvimento da Teoria da Informação, Shannon descobriu que a velocidade máxima Cmáx - em bits por segundo - com que sinais de potência S watts podem passar por um canal de comunicação, que permite a passagem, sem distorção, dos sinais de freqüência até B hertz, produzindo um ruído de potência máxima N watts, é dada por:

$$C_{máx} = B \cdot log_2 \left(\frac{S}{N} \right)$$

Dessa forma, os logaritmos claramente assumem um papel fundamental, pois constituem uma ferramenta essencial no contexto da moderna tecnologia

5.1.7 Resolução dos Problemas Propostos no Capítulo 1

1. **Matemática Financeira**

   Uma pessoa aplicou a importância de R$ 500,00 numa instituição bancária que paga juros mensais de 3,5%, no regime de juros compostos. Quanto tempo após a aplicação o montante será de R$ 3 500,00 reais?

   Fórmula para o cálculo dos juros compostos: $M = C(1+i)^t$. São dados do problema:

$$M = R\$\ 3500,00$$

$$C = R\$\ 500,00$$

$$i = 3,5\% = 0,035$$

$$t = ?$$

$$M = C(1+i)^t \Rightarrow 3500 = 500(1+0,035)^t \Rightarrow 1,035^t = 7$$

   aplicando logaritmo teremos:

$$log_{10}\ 1,035^t = log_{10}\ 7 \Rightarrow t = \frac{log_{10}\ 7}{log_{10}\ 1,035} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t = \frac{0,8451}{0,0149} \Rightarrow t = 56,7$$

   Assim o valor de $R\$\ 3500,00$ será obtido após 56,7 meses de aplicação.

2. **Geografia**

   Em uma determinada cidade, a taxa de crescimento populacional é de 3% ao ano, aproximadamente. Em quantos anos a população desta cidade irá dobrar, se a taxa de crescimento continuar a mesma?

   Seja P_0 a população inicial,a população após um ano $P_1 = P_0(1,03)$ e a população após dois anos $P_2 = P_0(1,03)^2$, assim a população após n anos será:

$$P_n = P_0(1,03)^n$$

Para que a população dobre, devemos ter:

$$P_n = 2P_0 \Rightarrow P_0(1,03)^n = 2P_0 \Rightarrow 1,03^n = 2$$

Aplicando logaritmo, teremos:

$$log_{10}\ 1,03^n = log_{10}\ 2 \Rightarrow n = \frac{log_{10}\ 2}{log_{10}\ 1,03} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n = \frac{0,3010}{0,0128} \Rightarrow n = 23,5$$

De modo que a população dobrará em aproximadamente 23,5 anos.

3. **Química**

Determine o tempo que leva para que 1000 gramas de certa substância radioativa, que se desintegra a taxa de 2% ao ano, se reduza a 200 gramas. Utilize a seguinte expressão: $Q = Q_0 \times e^{-rt}$, onde Q é a massa da substância, r é a taxa e t é o tempo em anos. Temos que

$$Q = Q_0 e^{-rt} \Rightarrow 200 = 1000e^{-0,02t} \Rightarrow \frac{1}{5} = e^{-0,02t}$$

aplicando o logaritmo, obtemos

$$-0,02t = ln\ \frac{1}{5} \Rightarrow 0,02t = ln\ 5 \Rightarrow t = \frac{ln\ 5}{0,02} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t = \frac{1,6094}{0,02} \Rightarrow t = 80,47$$

Assim a substância levará 80,47 anos para se reduzir a 200 g.

4. **Cultura de Bacilos**

O número de bacilos existentes numa determinada cultura, no instante t, é dado por $N = N_0.2^{(t/k)}$ em que N_0 e k são constantes. As variáveis t e N estão expressas em horas e milhões de unidades, respectivamente.

a) Interprete o significado das constantes N_0 e k.

No instante $t = 0$ vem $N = N_0.2^0 \Rightarrow N = N_0$.

Portanto, N_0 é o número de bacilos existentes no início da contagem do tempo.

Fazendo $t = k$ vem $N = 2N_0$. Isto significa que k é o número de horas que decorrem até duplicar o número de bacilos.

b) Qual a função que exprime, o número de horas que esta função leva a passar de N_0 para N, em função de N?

$$\frac{N}{N_0} = 2^{\frac{t}{k}} \Leftrightarrow \frac{t}{k} = log_2 \frac{N}{N_0} \Leftrightarrow t = klog_2 \ \frac{N}{N_0}$$

Vemos que a expressão de t, em função de N, envolve um logaritmo da variável independente, logo é uma função logarítmica.

5. **Terremotos**

Segundo Richter (Sismologia Elementar, 1958) a magnitude M de um tremor de terra, que ocorra a 100 km de certo sismógrafo, é dada por $M = log_{10}A + 3$ onde A é a amplitude máxima em mm, do registro feito pelo aparelho.

a) Qual é o significado da constante 3?

Para $A = 1$, vem $M = 3$. Isto significa que o tremor de terra tem magnitude 3, se provoca um registro de amplitude máxima 1 mm, nas condições indicadas.

b) Certo tremor de terra de magnitude M_1 produz um registro de amplitude A_1. Exprima, em função de M_1, a magnitude M de outro sismo cujo registro tem de amplitude $100A_1$, nas mesmas condições.

Para uma amplitude $100A_1$ vem:

$$M = log_{10}\ (100 \cdot A1) + 3 = log_{10}\ 100 + log_{10}\ A_1 + 3 = 2 + (log_10\ A_1 + 3)$$

Portanto

$$M = 2 + M_1$$

CAPÍTULO 6

UMA ABORDAGEM DIDÁTICA

Transformação e mudança são verdades em nossa vida. As necessidades de uma época exigem o nascimento de ferramentas para resolver ou facilitar a resolução de problemas que se impõem pelo desenvolvimento natural que o progresso exige.

Os conteúdos matemáticos também se transformam e se adaptam a novas situações, ao contrário do que muitos pensam, os resultados matemáticos não estão de todo prontos. As vezes, como mágica aparecem em situações que a princípio ninguém percebia ou imaginava ter alguma relação. Quem poderia imaginar que a simples razão entre o comprimento da circunferência pelo seu diâmetro, a quem chamamos de π, experiência que pode ser feita por uma criança no primário, também se revela em situações não tão simples, como em fórmulas gravitaçionais e do eletromagnetismo. E mesmo podendo ser aproximado pelo valor $3,14$, pode ser calculado pela soma infinita representado pela fórmula:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{16^k}\left(\frac{4}{8k+1} - \frac{2}{8k+4} - \frac{1}{8k+5} - \frac{1}{8k+6}\right)$$

Inserir o aluno no processo do descobrimento e desenvolvimento da matemática poderia ser um dos propósitos do ensino da matemática nas escolas. Apresentar o conteúdo monstrando a origem e o desenvolvimento ao longo do tempo pelas suas aplicações pode ser um instrumento poderoso para atingir tal objetivo. Assim os alunos poderão perceber a matemática como um processo ativo em constante desenvolvimento, adaptando e se revelando fundamental em situações a princípio nem sonhadas.

Os logaritmos são um dos tópicos matemáticos que se enquadra no contexto de transformação e adaptação nas suas aplicações e esta é uma motivação para apresentar aos alunos tal assunto.

Podemos apresentar aos alunos situações como as descritas nos itens abaixo e questionar se a princípio é possível identificar alguma relação entre eles. Durante a construção da resposta para tal pergunta, podemos desenvolver o conteúdo, mostrando seu desenvolvimento e aplicações ao longo dos anos. Analizaremos 6 situações descritas abaixo.

No ítem 1 temos duas expressões envolvendo operações bem trabalhosas, que hoje dificilmente são resolvidas sem o uso de calculadoras.

1. **Obtenha o valor das expressões**:

   (a)

$$\sqrt[11]{(1596 \times 43,6^7 \times 7085) \div 932}$$

   (b)

$$\sqrt[3]{\frac{(0,3^5 \times 2,1^{-2})}{0,345^3}}$$

   No item 2 destaca-se uma tabela com os números de 1 a 10 escrito nas bases 10, 5 e e (base dos logaritmos naturais de valor 2,71...) com aproximação de 6 casas decimais, de modo que: $4 = 10^{0,602059}$ ou $4 = 5^{0,861353}$ ou ainda $4 = e^{1,386294}$.

2. **Tabela logarítmica**

	Coluna 1	Coluna 2	Coluna 3	Coluna 4	Coluna 5	Coluna 6
	e^x	x	5^x	x	10^x	x
Linha 1	1	0	1	0	1	0
Linha 2	2	0,693147	2	0,430676	2	0,301029
Linha 3	3	1,098612	3	0,682606	3	0,477121
Linha 4	4	1,386294	4	0,861353	4	0,602059
Linha 5	5	1,609437	5	1	5	0,698970
Linha 6	6	1,791759	6	1,113282	6	0,778151
Linha 7	7	1,945910	7	1,209061	7	0,845098
Linha 8	8	2,079441	8	1,292029	8	0,903089
Linha 9	9	2,197224	9	1,365212	9	0,954242
Linha 10	10	2,302585	10	1,430676	10	1

Esta tabela abre uma boa oportunidade para discutir e mostrar como obter os valores dos expoentes. Um método bem acessível e de fácil compreensão, é o da aproximação das potências, embora não corresponda fielmente ao desenvolvimento histórico, pois Briggs usou a média geométrica para construir as suas tabelas, possibilita um bom entendimento por parte dos alunos. Não vamos obter o número de casas decimais listados na tabela, o objetivo é o aluno perceber a idéia e não prolongar muito os cálculos.

Vamos obter x de modo que $10^x = 2$.

Temos que $2^{10} = 1024 \Rightarrow 2^{10} \simeq 1000 \Rightarrow 2^{10} \simeq 10^3$ dividindo os expoentes por 10, obtemos o valor $0,300$ que é uma boa aproximação para x. Podemos escrever:

$$2 \simeq 10^{0,300}$$

Ao valor de 0,300 é que chamamos de logaritmo de 2 na base 10 e escrevemos:

$$log_{10}\ 2 = 0,300$$

Do mesmo modo podemos calcular x para que se tenha $10^x = 3$.

Temos que $3^9 = 19683 \Rightarrow 3^9 \simeq 20000 \Rightarrow 3^9 \simeq 2 \cdot 10^4$. Usando o fato que $2 \simeq 10^{0,3}$, obtemos $3^9 \simeq 10^{0,3} \cdot 10^4 \Rightarrow 3^9 \simeq 10^{4,3}$. Dividindo os expoentes por 9, obtemos:

$$3 \simeq 10^{0,477}$$

Do mesmo modo denominamos o valor de 0,477 de logaritmo de 3 na base 10, ou seja:

$$log_{10}\ 3 = 0,477$$

Os logaritmos possuem propriedades que são a sua razão de ser, é o que os caracteriza. Vamos explorar o seu lado prático para descrever estas propriedades.

Vamos determinar o valor aproximado do $log_{10}\ 4$, ou seja, qual o valor de x para que se tenha $10^x = 4$. Usaremos agora os dados da tabela com aproximação de seis casas decimais.

Sabendo que $log_{10}\ 2 = 0,301029$ ou $2 = 10^{0,301029}$, temos:

$$10^x = 4 \Rightarrow 10^x = 2 \cdot 2 = 10^{0,301029} \cdot 10^{0,301029} = 10^{0,301029+0,301029}$$

$\Rightarrow$

$$10^x = 10^{0,301029+0,301029} \Rightarrow x = 0,301029 + 0,301029$$

Ou seja,

$$x = log_{10}\ 2 + log_{10}\ 2$$

Assim

$$log_{10}\ 4 = log_{10}\ (2 \cdot 2) = log_{10}\ 2 + log_{10}\ 2$$

Repetindo o processo para calcular $log_{10}\ 5$ que é o mesmo que determinar x de modo que $10^x = 5$.

Pela tabela sabemos que $log_{10}\ 10 = 1$ e $log_{10}\ 2 = 0,301029$. Assim:

$$10^x = 5 \Rightarrow 10^x = \frac{10}{2} \Rightarrow 10^x = \frac{10^1}{10^{0,301029}} = 10^{1-0,30109}$$

daí,

$$10^x = 10^{1-0,30109} \Rightarrow x = 1 - 0,30109$$

ou seja,

$$x = log_{10}\ 10 - log_{10}\ 2$$

de modo que,

$$log_{10}\ 5 = log_{10}\ \frac{10}{2} = log_{10}\ 10 - log_{10}\ 2$$

Observamos nestes exemplos as propriedades fundamentais dos logaritmos, a saber:

$$log_b\ (a \cdot c) = log_b\ a + log_b\ c$$

$$log_b\ (a \div c) = log_b\ a - log_b\ c$$

No item três abaixo iremos calcular a área sob a faixa da hipérbole

3. **Área sob a hipérbole** $y = \frac{1}{x}$ **no intervalo [a,b]**

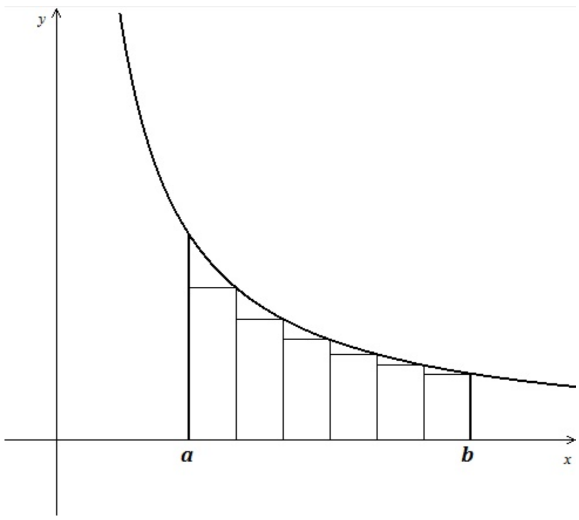


Figura 6.1: Intervalo [a,b] dividido em seis retângulos de mesma base

4. **Gráfico da função** $y = ln\ x$ (figura 6.2)

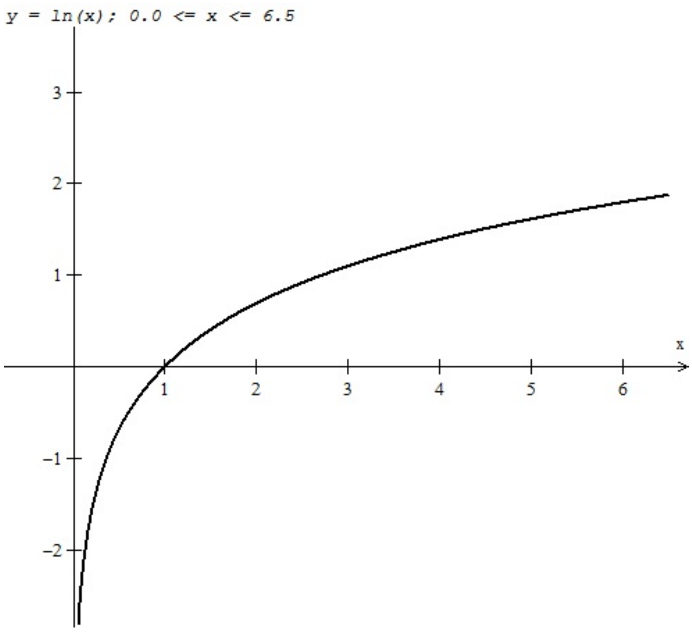


Figura 6.2: gráfico da função $ln\ x$

Nos ítens 5 e 6 temos 2 problemas para serem resolvidos.

5. **Problema 1**

   Carlos financiou R$ 5 000,00 em uma financeira pagando um montante de R$ 8 500,00 a uma taxa de 15% ao ano. Quanto tempo durou o financiamento?

6. **Problema 2** - Retirado da prova de MA11(Números e Funções Reais) de 2011.

   24h após sua administração, a quantidade de uma droga no sangue reduz-se a 10% da inicial.

   (a) Que percentagem resta 12h após a administração?

   (b) Em quanto tempo a quantidade de droga no organismo se reduz a 50% da dose inicial?

Podemos perguntar: Há alguma ligação entre os tópicos apresentados? É provável que nem mesmo Napier, principal responsável pelo elo que une todos esses tópicos, ao ser colocado diante desta pergunta veria relação entre eles, exceto, obviamente nos itens 1 e 2.

O ponto de partida para todas as situações descritas foi a necessidade de facilitar os cálculos necessários nas expressões do item 1, mas em que tabelas como a do item 2 podem facilitar esses cálculos? Primeiro vamos resolver algumas expressões mais simples como 2×3. É óbvio o resultado desta expressão, não há necessidade de nenhum artifício para tornar esse cálculo mais simples, o importante neste caso é a ideia, vejamos:

$$2 \times 3 = e^{0,693147} \times e^{1,098612} = e^{0,693147+1,098612} = e^{1,791759} = 6$$

$$2 \times 3 = 5^{0,430676} \times 5^{0,682606} = 5^{0.430676+0,682606} = 5^{1,113282} = 6$$

$$2 \times 3 = 10^{0,301029} \times 10^{0,477121} = 10^{0,301029+0,477121} = 10^{0,778151} = 6$$

É fácil notar que os fatores 2 e 3 foram substituidos por potências. Usando propriedades operatórias das potências somamos os expoentes e identificamos na tabela qual o número está relacionando com a potência obtida. Este é o resultado do produto 2×3. Em cada um dos produtos usamos potências de bases diferentes, a saber, base e, base 5 e base 10.

O mesmo pode ser feito com a divisão, observe:

$$8 \div 4 = 10^{0,903089} \div 10^{0,602059} = 10^{0,903089-0,602059} = 10^{0,301029} = 2$$

$$8 \div 4 = 5^{1,292029} \div 5^{0,861353} = 5^{1,292029-0,861353} = 5^{0,4306776} = 2$$

$$8 \div 4 = 10^{0,903089} \div 10^{0,602059} = 10^{0,903089-0,602059} = 10^{0,301029} = 2$$

Agora, aplicando a mesma idéia podemos resolver expressões bem mais difíceis e trabalhosas. Basta ter as tabelas convenientes.

Para resolver a expressão $\sqrt[11]{(1596 \times 43,6^7 \times 7085) \div 932}$ usaremos uma tabela de base 10, de modo que cada número envolvido na expressão pode ser representado por:

$$10^{3,20303} = 1596$$

$$10^{1,63949} = 43,6$$

$$10^{3,85034} = 7085$$

$$10^{2,96941} = 932$$

Substituindo os valores no radical $\sqrt[11]{(1596 \times 43,6^7 \times 7085) \div 932}$ pelas potências de base 10 obtemos:

$$\sqrt[11]{(10^{3,20303} \times (10^{1,63949})^7 \times 10^{3,85034}) \div 10^{2,96941}} =$$

$$= \sqrt[11]{10^{18,5298} \div 10^{2,96941}} = \sqrt[11]{10^{15,56039}} = 10^{\frac{15,56039}{11}} = 10^{1,41458}$$

Olhando novamente uma tabela de logaritmos verificamos que o valor da potência $10^{1,41458}$ é aproximadamente $25,97646$, temos então, com 5 casas decimais, que:

$$10^{1,41458} = 25,97646$$

dai

$$\sqrt[11]{(1596 \times 43,6^7 \times 7085) \div 932} = 25,97646$$

Neste exemplo é visível a simplificação de cálculos complexos e trabalhosos em cálculos mais simples e rápidos como adição, subtração e divisão simples.

Vamos resolver também a expessão

$$\sqrt[3]{\frac{(0,3^5 \times 2,1^{-2})}{0,345^3}}$$

usando a linguagem dos logaritmos. Seja

$$x = \sqrt[3]{\frac{(0,3^5 \times 2,1^{-2})}{0,345^3}} \Rightarrow log_{10}\ x = log_{10}\ \sqrt[3]{\frac{(0,3^5 \times 2,1^{-2})}{0,345^3}}$$

aplicando as propriedades dos logaritmos

$$log_{10}\ x = \frac{1}{3}(log_{10}\ 0,3^5 + log_{10}\ 2,1^{-2} - log_{10}\ 0,345^3) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow log_{10}\ x = \frac{1}{3}(5log_{10}\ 0,3 - 2log_{10}\ 2,1 - 3log_{10}\ 0,345)$$

substituindo os valores dos logaritmos

$$log_{10}\ x = -0,624096 \Rightarrow x = 0,237631$$

ou seja, com 6 casas decimais

$$\sqrt[3]{\frac{(0,3^5 \times 2,1^{-2})}{0,345^3}} = 0,237631$$

Outras tabelas semelhantes podem ser obtidas usando bases diferentes de 10. Pode-se usar base 5, 7 etc. Ou seja, podemos usar qualquer número real positivo diferente de um como base. De modo que, qualquer número positivo pode ser escrito como uma potência em qualquer base. Por exemplo podemos escrever o número 3, com aproximação de nove casas decimais, como:

$$3 = 10^{0,477121254}$$

$$3 = 5^{0,682606194}$$

$$3 = e^{1,098612289}$$

A tabela do item 2 é apenas um recorte com poucos valores. Em 1617, Briggs publicou *"Logarithnorumchilias prima"*, que continha tabelas de logaritmos decimais dos números de 1 a 1000, com 14 casas decimais. Em 1624, publicou *"Arithmética Logarithmica"* com os logaritmos de 1 a 2000 e de 90.000 a 100.000.

Vimos que para facilitar os cálculos do item 1 usamos tabelas como a do item 2. Será que o cálculo da área num determinado intervalo sob a hipérbole $y = \frac{1}{x}$ e os logaritmos estão de alguma forma relacionados?

Esta resposta começou a ser dada pelo belga jesuíta Gregory St. Vicent (1584-1667) em 1647 quando publicou o trabalho *Opus geometricum quadraturae circuli et sectionum coni* (Obra geométrica sobre a quadratura do círculo e de secções cônicas) monstrando a surpreendente conexão entre as tábuas logarítmicas de base e ($log_e\ x\ ou\ ln\ x$) e a área sob o ramo positivo da hipérbole $y = \frac{1}{x}$.

Podemos calcular a área sob a hipérbole usando aproximações por falta, inscrevendo retângulos como mostra a figura 6.3.

Vamos subdividir o intervalo [1,3] em 20 partes iguais a $0,1$. Na tabela abaixo listamos os valores de x obtidos nas subdivisões e os respectivos valores de $y = \frac{1}{x}$

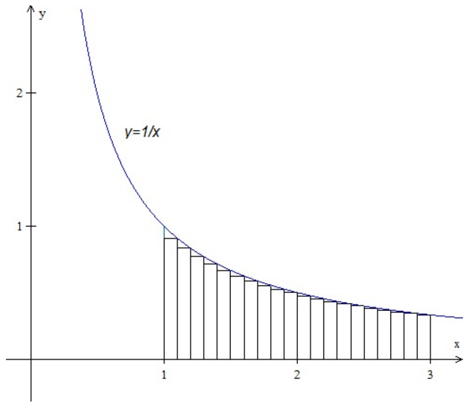


Figura 6.3: Área sob a curva y=1/x no intervalo [1,3]

x	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5
$\frac{1}{x}$	0,909090	0,833333	0,769230	0,714285	0,666666

x	1,6	1,7	1,8	1,9	2
$\frac{1}{x}$	0,625000	0,588235	0,555555	0,526315	0,500000

x	2,1	2,2	2,3	2,4	2,5
$\frac{1}{x}$	0,476190	0,454545	0,434782	0,416666	0,400000

x	2,6	2,7	2,8	2,9	3
$\frac{1}{x}$	0,384615	0,370370	0,357142	0,344827	0,333333

Formamos assim 20 retângulos cujas bases medem 0,1 e as alturas são os valores de $\dfrac{1}{x}$. Na tabela abaixo consta o valor da área de cada um dos retângulos.

A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
0.090909	0,083333	0,076923	0,071428	0,066666

A_6	A_7	A_8	A_9	A_{10}
0,062500	0,058823	0,055555	0,052631	0,050000

A_{11}	A_{12}	A_{13}	A_{14}	A_{15}
0,047619	0,045454	0,043478	0,041666	0,040000

A_{16}	A_{17}	A_{18}	A_{19}	A_{20}
0,038461	0,037037	0,035714	0,034482	0,033333

Ao somar todas essas áreas obtém-se um valor aproximado da área sob a hipérbole no intervalo [1,3].

$$A = A_1 + A_2 + A_3 + \ldots + A_{18} + A_{19} + A_{20} = 1,066314$$

Este é um valor aproximado, para melhorar a precisão basta aumentar o número de subdivisões no intervalo [1,3], obtendo, assim, mais retângulos. Quanto maior o número de retângulos menor será os espaços entre a hipérbole e a aresta superior do retângulo.

Obviamente este é um cálculo trabalhoso, mas o recurso é uma oportunidade de dar uma idéia sobre limites.

Para agilizar e facilitar a visualização, contribuindo para um melhor entendimento dos alunos do cálculo aproximado da área inscrevendo retângulos, vamos usar o software Winplot para calcular a área sob a hipérbole no intervalo desejado, executando os seguintes passos:

1 - Abra o Winplot, clique em janela ⇒ 2-dim (figura 6.4)

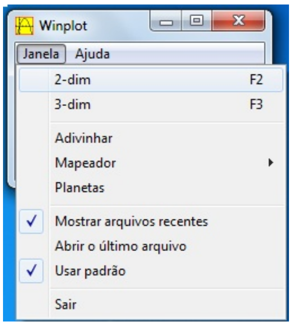


Figura 6.4

2 - Clique em Equação ⇒ explícita (figura 6.5)

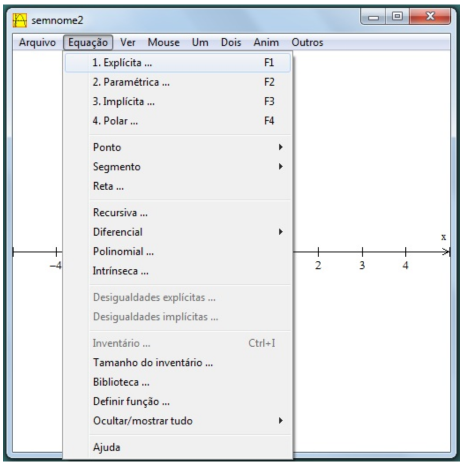


Figura 6.5

3 - Digite a função $y = 1/x$ no intervalo [0,10] (figura 6.6)

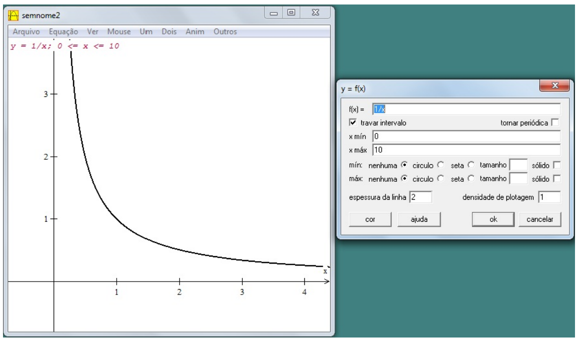


Figura 6.6

4 - Clique Um $\Longrightarrow$ Medidas $\Longrightarrow$ integrar (figura 6.7)

5 - Digite limite inferior $\Longrightarrow$ limite superior $\Longrightarrow$ quantidade de subintervalos (figura 6.8)

6 - Para melhorar a precisão basta aumentar o número de subintervalos (figura 6.9)

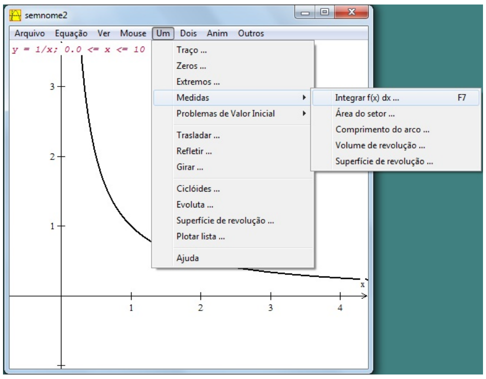


Figura 6.7

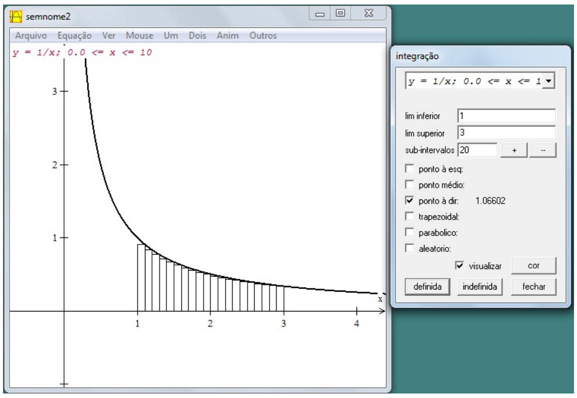


Figura 6.8

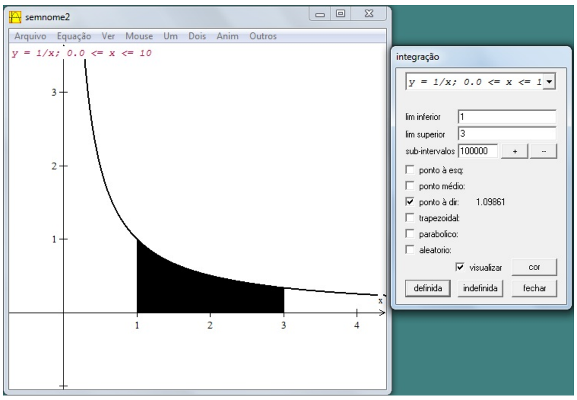


Figura 6.9: 100 000 subintervelos

Repetindo o processo indicado no winplot para cada intervalo $[x, 1]$, para $0 < x < 1$ e $[1, x]$, para $x > 1$, fazendo $x = \frac{1}{4}$, $x = \frac{1}{2}$, $x = 1$, $x = 2$, até $x = 10$ obtemos os valores listados na 2ª coluna da tabela 6.1.

$[a,b]$	Valor da área winplot	x	$ln(x)$
[$\frac{1}{4}$,1]	1,38629	$\frac{1}{4}$	-1,38629
[$\frac{1}{2}$,1]	0,69315	$\frac{1}{2}$	-0,69314
[1,1]	0,000000	1	0,00000
[1,2]	0,69315	2	0,69314
[1,3]	1,09861	3	1,09861
[1,4]	1,38629	4	1,38629
[1,5]	1,60944	5	1,60943
[1,6]	1,79176	6	1,79175
[1,7]	1,94591	7	1,94591
[1,8]	2,07944	8	2,07944
[1,9]	2,19722	9	2,19722
[1,10]	2,30259	10	2,30258

Tabela 6.1

Observamos que os valores da 4ª coluna da tabela 6.1 ($ln\ x$), obtidos usando uma calculadora científica, com cinco casas decimais, são os mesmos da área sob a hipérbole $y = \dfrac{1}{x}$ quando calculada no intervalo [1,x][1]. No entanto, ao calcular a área sob a hipérbole no intervalo [x,1] e comparando com os valores de $ln\ x$ para $0 < x < 1$, obtidos em uma calculadora, o que os diferencia é apenas o sinal.

Por exemplo: A área sob a hipérbole $\dfrac{1}{x}$ no intervalo $[\frac{1}{2}, 1]$ é igual a $0,69315$ e $ln\ \frac{1}{2} = -0,69314$. O mesmo acontece para outros valores de x entre 0 e 1.

Para que continue válida a igualdade entre o valor da área sob a hipérbole e o valor do $ln\ x$ para $0 < x < 1$, define-se a área com sinal negativo. Para $x = 1$ a área é naturalmente igual a zero, pois a região sob a hipérbole reduz-se a um segmento

[1]A diferença observada em alguns valores na última casa decimal se deve ao arredondamento feito pelo winplot.

de reta.

Podemos então, definir o logaritmo natural de x ($ln\ x$) como a área sob a faixa da hipérbole $\frac{1}{x}$ no intervalo [x,1], quando $0 < x < 1$ ou [1,x], quando $x > 1$. Assim

$$A_1(x) = ln\ x$$

.

- $A_1(x) \equiv$ Área sob a hipérbole $y = \frac{1}{x}$, para todo $x > 0$.

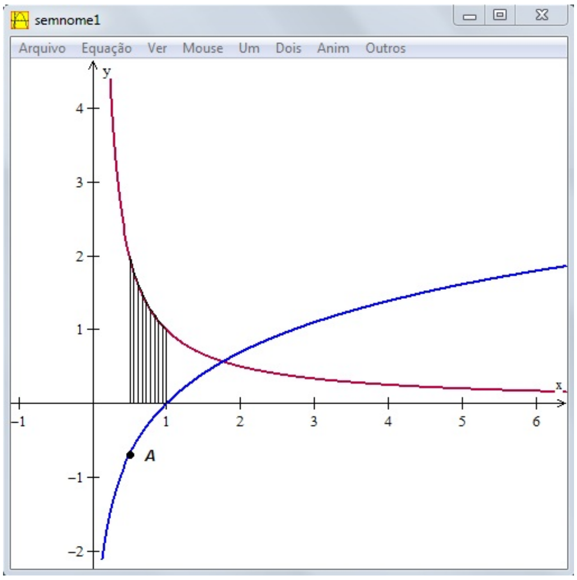


Figura 6.10: A curva crescente representa f(x)=ln x e a curva decrescente representa f(x)=1/x

Isto posto, temos:

- para $0 < x < 1$, $A_1(x) < 0 \Rightarrow ln(x) < 0$,
- para $x = 1$, $A_1(1) = 0 \Rightarrow ln(1) = 0$,
- para $x > 1$, $A_1(x) > 0 \Rightarrow ln(x) > 0$.

Para $x < 0$ não definimos $ln\ x$. Temos agora uma função real que a cada valor de $x > 0$ faz corresponder o valor $ln\ x$.

$$f : \mathbb{R}_+^* \mapsto \mathbb{R}$$

$$x \quad \mapsto ln\ x$$

Ao marcar os pares ordenados $(x, ln\ x)$ no plano cartesiano obtemos o gráfico do item 4 que é o gráfico da função $ln\ x$. Com esta definição a função $ln\ x$ é naturalmente crescente e verifica a propriedade básica dos logaritmos, a saber:

$$ln\ (x \cdot y) = ln\ x + ln\ y,$$

pois já vimos no capítulo 4 que,

$$A_1(x \cdot y) = A_1(x) + A_1(y).$$

Uma pergunta que naturalmente pode surgir: É possível, através da área sob uma hipérbole, obter um outro sistema de logaritmos? De outra maneira: Como calcular o $log_{10}\ 2$ ou $log_3\ 2$ usando área sob uma hipérbole?

Primeiro usando o winplot construa uma tabela com área sob a hipérbole $y = \dfrac{2}{x}$ e compare com as áreas obtidas sob a hipérbole $y = \dfrac{1}{x}$

Com uma simples inspeção (veja tabela 6.2) verifica-se que os valores da 2ª coluna é duas vezes os valores da 3ª coluna. Este fato é facilmente justificado pelo cálculo da área sob a hipérbole usando aproximações com retângulos, pois, ao calcular a área sob a hipérbole $y = \dfrac{2}{x}$ basta multiplicar por 2 a altura dos retângulos obtidos sob a hipérbole $y = \dfrac{1}{x}$. Sendo,

- $A_1[2](x)$=Área sob a hipérbole $y = \dfrac{2}{x}$

podemos escrever:

$$A_1[2](x) = 2 \cdot A_1(x)$$

ou ainda

$$A_1[2](x) = 2 \cdot ln\ x$$

$[a, b]$	Área sob $y = \frac{2}{x}$	Área sob $y = \frac{1}{x}$ ou $ln(x)$
[1,1]	0,000000	0,000000
[1,2]	1,38629	0,693147
[1,3]	2,19722	1,098612
[1,4]	2,77259	1,386294
[1,5]	3,21888	1,609437
[1,6]	3,58352	1,791759
[1,7]	3,89182	1,945910
[1,8]	4,15888	2,079441
[1,9]	4,39445	2,197224
[1,10]	4,60517	2,302585

Tabela 6.2

Verificamos também que a área sob a hipérbole $y = \dfrac{2}{x}$ pode ser associado a um novo sistema de logaritmos, que difere do $ln\ x$ apenas pela constante 2. Podemos então definir:

$$A_1[2](x) = log_b\ x$$

ou ainda,

$$log_b\ x = 2 \cdot ln\ x$$

Para determinar o valor de b, base do logaritmo, basta lembrar que a base de um sistema de logaritmos é um número positivo tal que,

$$log_b\ b = 1$$

Assim temos

$$2 \cdot ln\ b = 1 \Rightarrow ln\ b = \frac{1}{2} \Rightarrow\ e^{ln\ b} =\ e^{\frac{1}{2}} \Rightarrow$$
$$b = e^{\frac{1}{2}}$$

Verificamos, então, que as áreas sob a hipérbole $y = \dfrac{2}{x}$ nos fornece um sistema de logaritmos na base $e^{\frac{1}{2}}$.

Com o mesmo procedimento, as áreas sob a hipérbole $y = \dfrac{k}{x}$ nos fornece um sistema de logaritmos de base $b = e^{\frac{1}{k}}$. Assim para construir um sistema de logaritmos de base $b = 10$ basta tomar $k = \dfrac{1}{ln\ 10}$. Constatamos esta afirmação, usando mais uma vez o winplot, calculando a área sob a hipérole $y = \dfrac{1}{xln\ 10}$ e comparando com os valores obtidos em uma calculadora.

$[a,b]$	Área sob a hipérbole $y = \dfrac{1}{xln10}$	x	$log_{10}\ x$
[$\frac{1}{4}$,1]	0,60206	$\frac{1}{4}$	-0,602059
[$\frac{1}{2}$,1]	0,30103	$\frac{1}{2}$	-0,301029
[1,1]	0,00000	1	0,000000
[1,2]	0,30103	2	0,301029
[1,3]	0,47712	3	0,477121
[1,4]	0,60206	4	0,602059
[1,5]	0,69897	5	0,698970
[1,6]	0,77815	6	0,778151
[1,7]	0,84510	7	0,845098
[1,8]	0,90309	8	0,903089
[1,9]	0,95424	9	0,954242
[1,10]	1,00000	10	1,00000

Na tabela acima observa-se valores negativos para $log_{10}\ \frac{1}{4}$ e $log_{10}\ \frac{1}{2}$, de modo que, destacamos a necessidade, novamente, de se convencionar para as áreas sob a hipérbole no intervalo [x,1] valores também negativos.

Assim, para $k > 0$ e $x > 0$

- $A_1[k](x) \equiv$ Área sob a hipérbole $y = \dfrac{k}{x}$

Definimos:

$$A_1[k](x) = log_b\ x$$

sendo a base

$$b = e^{\frac{1}{k}}$$

- para $0 < x < 1$, $A_1[k](x) < 0 \Rightarrow log_b\ x < 0$
- para $x = 1$, $A_1[k](1) = 0 \Rightarrow log_b\ 1 = 0$
- para $x > 1$, $A_1[k](x) > 0 \Rightarrow log_b\ x > 0$

Se $k = 1$ então $b = e$, obtemos assim $log_e\ x$ ou $ln\ x$.

Para $x < 0$ não definimos $log_b\ x$. Temos agora uma função real que a cada valor de $x > 0$ faz corresponder o valor $log_b\ x$.

$$f : \mathbb{R}_+^* \mapsto \mathbb{R}$$

$$x \quad \mapsto log_b\ x$$

Esta função é naturalmente crescente, pois ao calcular as áreas sob a hipérbole $y = \dfrac{k}{x}$ no intervalo [1,x], estas áreas crescem a medida que cresce o valor de x.

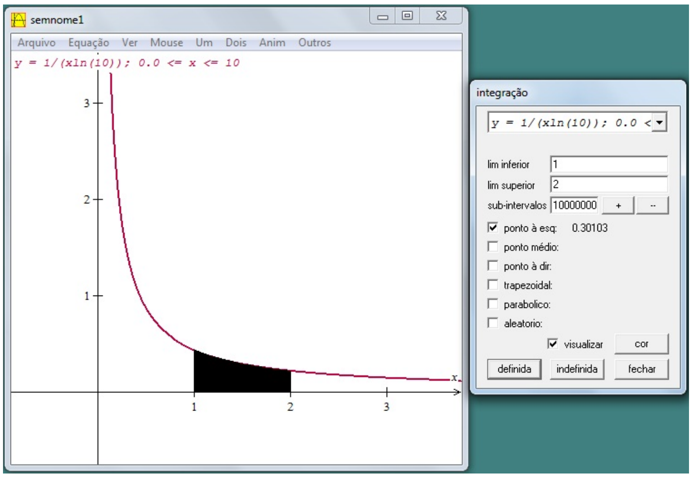


Figura 6.11: Área sob a hipérbole $y = \dfrac{1}{xln\ 10}$ no intervalo [1,2] ou $log_{10}\ 2$

O **problema 1** do item 5, que envolve matemática financeira, mostra mais uma vez a força dos logaritmos, vejamos a solução:

$$M = C(1+i)^t \Rightarrow 8500,00 = 5000,00(1+0,15)^t \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 1,7 = 1,15^t \Rightarrow t = \frac{log\ 1,7}{log\ 1,15} \Rightarrow t = 3,79$$

Ao resolver a o **problema 2** do item 6, notamos novamente a presença dos logaritmos.

a) A quantidade de droga no organismo obedece a lei $c_0 a^t$, onde $0 < a < 1$, c_0 é a dose inicial (obtida da expressção para t = 0) e t medido, em horas. Após 24h a quantidade se reduz a $\frac{1}{10}$ da inicial, isto é:

$$c_0 a^{24} = \frac{c_0}{10}$$

Portanto $a^{24} = \frac{1}{10}$. Daí segue que $a^{12} = \frac{1}{\sqrt{10}}$, e que

$$c_0 a^{12} = \frac{c_0}{\sqrt{10}}$$

Então a quantidade de droga após 12h é a quantidade inicial dividida por $\sqrt{10}$.

b) Para saber o tempo necessário para a redução da quantidade de droga à metade (isto é, a meia-vida da droga no organismo), basta achar t que cumpra $a^t = \frac{1}{2}$. Como $a^{24} = \frac{1}{10}$ implica

$$(a^{24})^t = \left(\frac{1}{2}\right)^{24} \Rightarrow \left(\frac{1}{10}\right)^t = \left(\frac{1}{2}\right)^{24} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow t(log\ 1 - log\ 10) = 24(log\ 1 - log\ 2) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow t(0-1) = 24(0 - log\ 2) \Rightarrow t = 24 log\ 2$$

Daí segue que

$$t = 24 \cdot 0,301029 \Rightarrow t = 7,22$$

horas.

Outras situações podem ser destacadas como intensidade de um terremoto, níveis de ruído, etc. Estas aplicações podem ser sugestões para pesquisa dos alunos, permitindo que eles durante a investigação percebam o quanto é vivo os conteúdos matemáticos.

Com esta exposição acreditamos que os alunos irão perceber a razão da existência dos logaritmos. Será possível notar que o desenvolvimento e aplicações de um conteúdo se impõe pelas necessidades práticas e se revelam em situações a princípio nem imaginadas. Importante, também, é o fato de que normalmente se tem dos conteúdos matemáticos. O senso comum diz que eles estão prontos e acabados, e esta visão é desmentida pelos logaritmos. Eles nasceram com um propósito bem definido, mas durante seu crescimento se aventurou por caminhos inesperados, conseguindo deixar suas marcas por onde passou. Podemos especular que sua jornada ainda não acabou, quantas marcas os logaritmos ainda deixarão?

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste trabalho, procuramos apresentar com linguagem bem simples, uma proposta que aborda o ensino dos logaritmos. Nosso objetivo foi mostrar que os logaritmos foram e continuam sendo uma ferramenta poderosa para resolver problemas nas mais diversas áreas. Mesmo perdendo importância nas aplicações que motivaram sua descoberta, com o passar do tempo, ganhou destaque nas mais diversas áreas do conhecimento.

Um assunto que hoje se define em uma linha, como de modo geral é tratado os logaritmos nos livros didáticos, com sua definição usando exponenciais, dificilmente farão os estudantes perceberem que sua descoberta foi fruto do trabalho árduo por cerca de 20 anos da vida de Napier, bem como, notar sua relevância nos dias atuais. Sendo esta, uma das razões de destacar a definição geométrica dos logaritmos, usando o cálculo de áreas sob o ramo positivo da hipérbole $y = \frac{k}{x}$.

Para auxiliar no entendimento dos conteúdos escolares é importante o uso da tecnologia, assunto hoje de bastante interesse dos alunos, por isso, o software Winplot pode ser um instrumento a mais para motivá-los.

Busca-se algo com mais determinação quando somos motivados pela necessidade. É imperioso mostrar aos alunos que o progresso da humanidade é dependente da aquisição dos conhecimentos já construidos pelos que nos antecederam e pelo aprimoramento desses conhecimentos por nós. E dificilmente estes conhecimentos avançarão na velocidade necessária se não for valorizado o que é ensinado nas escolas, portanto é fundamental que os alunos percebam a importância dos conteúdos escolares no avanço das ciências, e como consequência na melhoria das nossas vidas.

Apresentando a trajetória histórica de um conteúdo matemático, sua transformação nas aplicações ao longo do tempo, destacando a sua função como ferramenta que facilita a vida das pessoas, que é essencial para progresso das ciências, esperamos despertar nos alunos o interesse pela matemática.

Esperamos que este trabalho possa auxiliar aos professores na preparação de suas aulas. Relacionando tópicos a princípio sem conexões, mostrando o que motivou sua descoberta, seu desenvolvimento, suas aplicações originais e sua importância nos dias atuais, poderá ser uma boa estratégia para entusiasmar os alunos na busca e na descoberta de novos conhecimentos.

Acreditamos que esta abordagem poderá ajudar a responder a pergunta que todos professores já ouviram:

Professor, pra que serve isto?

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] BARROSO, Juliane Matsubara. **Conexões com a Matemática**. Vol 1, 1.ed. São Paulo: Moderna, 2010.

[2] BOYER, Carl B. **Historia da Matemática** 2.ed. Tradução Elza F. Gomide, São Paulo: Edgard Blucher, 2003.

[3] BRASIL. Ministério da Educação **Parâmetros Curriculares Nacionais - PCN+**: Ensino Médio. Brasília: Secretária de Educação Média e Tecnológica -Brasília: MEC ; SEMTEC, 2002.

[4] CARNEIRO, Mario Jorge Dias, **Proposta Curricular-CBC Matemática** Ensino Médio, Secretaria de Educação do Estado de Minas Gerais, 2007.

[5] DANTE, Luis Roberto. **Matemática contexto e aplicações**. Volume 1, 1.ed. São Paulo: Ática, 2010.

[6] EVESS, H. **Introdução à Historia da Matemática** 2.ed. Tradução de Hygino H. Domingues. Campinas, Ed: Unicamp 1997.

[7] IEZZI, Gelson. **Matemática Ciencias e Aplicações**. Vol 1, 6.ed. São Paulo: Saraiva, 2010.

[8] LIMA, Elon Lages et al. **A Matemática do Ensino Médio**. Volume 1, 9.ed. Coleção do Professor de Matemática. Rio de Janeiro: SBM, 2006.

[9] LIMA, Elon Lages . **Logaritmos**.2.ed. Coleção do Professor de Matemática. Rio de Janeiro: SBM, 1996.

[10] MOAR, Eli. **e: A História de um Número.** 4. ed. Rio de Janeiro: Record, 2008.

[11] PAIVA, Manoel. **Matemática Paiva**. Volume 1, 1.ed. São Paulo: Moderna 2009.

[12] SMOLE, K. C. S.; DINIZ, M. I. V. **Matemática - ensino médio**. Volume 1, 6.ed. São Paulo: Saraiva, 2010.

[13] APLICAÇÕES DE LOGARITMOS. Disponivel em: http://www.brasilescola.com/matematica/aplicacoes-matematicas-na-geologia-escala-richter.htm. Acesso em 23 de março de 2013.

[14] SOUZA, Joamir Roberto de. **Novo olhar matemática** . Volume 1, 1.ed. São Paulo: FTD 2010.

[15] **http://www.matematiques.com.br/conteudo.php?id=581**.

[16] WINPLOT **Gerador de gráficos 2D e 3D**. Disponível em http://math.exeter.edu/rparris/. Acesso em: 20 novembro 2013.