



UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DO SEMI-ÁRIDO
DEPARTAMENTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA
EM REDE NACIONAL

JOÃO PAULO DE LIMA

**UMA PROPOSTA PARA O ENSINO DAS SEÇÕES
CÔNICAS NO ENSINO BÁSICO MEDIANTE O USO
DE UM AMBIENTE DINÂMICO**

MOSSORÓ

2014

**UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DO SEMI-ÁRIDO
DEPARTAMENTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA
EM REDE NACIONAL**

JOÃO PAULO DE LIMA

**UMA PROPOSTA PARA O ENSINO DAS SEÇÕES
CÔNICAS NO ENSINO BÁSICO MEDIANTE O USO
DE UM AMBIENTE DINÂMICO**

Orientador: Prof. Dr. Odacir Almeida Neves

Co-orientador: Prof. Msc. Ricardo Antônio Faustino da Silva Braz

Este trabalho contou com o apoio financeiro da CAPES

Mossoró/RN

O conteúdo desta obra é de inteira responsabilidade de seus autores

**Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
Biblioteca Central Orlando Teixeira (BCOT)
Setor de Informação e Referência**

L732p Lima, João Paulo de.
Uma proposta para o ensino das seções cônicas no ensino básico mediante o uso de um ambiente dinâmico./ João Paulo de Lima. -- Mossoró, 2014
146f.: il.

Orientador: Prof. Dr. Odacir Almeida Neves.
Co-orientador: Prof. Me. Ricardo Antônio Faustino da Silva Braz.
Dissertação (Mestrado em Matemática) – Universidade Federal Rural do Semi-Árido. Pró-Reitoria de Pós-Graduação.

1. Matemática. 2. Ensino. 3. Cônicas. 4. Tecnologias no ensino de Matemática. 5. Geometria dinâmica. I. Título.

RN/UFERSA/BCOT CDD: 510

Bibliotecária: Keina Cristina Santos Sousa e Silva
CRB-15/120

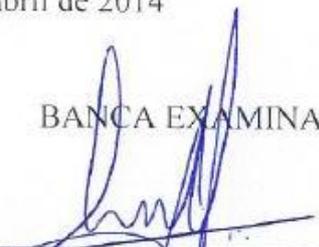
JOÃO PAULO DE LIMA

**UMA PROPOSTA PARA O ENSINO DAS SEÇÕES CÔNICAS NO ENSINO
BÁSICO MEDIANTE O USO DE UM AMBIENTE DINÂMICO.**

Dissertação apresentada a Universidade
Federal Rural do Semiárido – UFERSA,
Campus Mossoró para obtenção do título
de Mestre em Matemática.

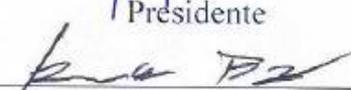
APROVADO EM ; 26 de abril de 2014

BANCA EXAMINADORA



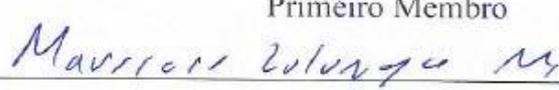
Prof.º Dr. Odacir Almeida Neves - UFERSA

Presidente



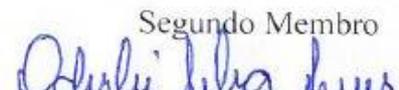
Prof.º Ms. Ricardo Antonio Faustino da Silva Braz - UFERSA

Primeiro Membro



Prof.º Dr. Mauricio Zuluaga Martinez - UFERSA

Segundo Membro



Prof.º Dr. Odirlei Silva Jesus – UFRN

Terceiro Membro

MOSSORÓ/RN, 26 de Abril de 2014.

Dedico este trabalho a todos que me apoiaram ao longo desses dois anos de estudos, em especial aos meus pais Isabel Fernandes Lima e Lourival Costa Lima, pela vida dedicada aos seus nove filhos e a minha namorada, Norma Maria, pela sua imensurável dedicação e apoio em todos os momentos dessa longa, árdua e vitoriosa caminhada.

AGRADECIMENTOS

A Deus, por ter me mostrado que a fé e a persistência são peças fundamentais na construção de um sonho e que vencer nossas dificuldades nos faz crescer espiritualmente e nos permite ir além do que poderíamos imaginar quando estávamos no início da caminhada.

A todos os meus familiares que me incentivaram e sempre acreditaram em minha capacidade, em especial, a minha mãe Isabel Fernandes de Lima e meu pai Lourival Costa Lima, pelo amor incondicional que sempre demonstraram ter por seus filhos.

A minha namorada Norma Maria Silva, pela paciência com que conduziu nosso relacionamento durante esse período do Mestrado e por está sempre disponível para me ajudar em tudo o que fosse preciso.

A todos os meus colegas do PROFMAT polo da UFERSA, tanto docentes quanto discentes, mas em especial aos companheiros do grupo de estudo JAGUARMAT, Joziel Lima, Claudenor Silva, Reginaldo Amorim e Uesley Pascoal, com quem tive a honra de conviver durante esses dois anos de estudos, compartilhando conhecimento e aprendendo sobre os mais diversos assuntos durante as nossas inesquecíveis viagens do Ceará ao Rio Grande do Norte.

Aos meus mestres da UFERSA, que tanto me instruíram em especial aos professores Antônio Ronaldo Gomes Garcia (Coordenador do curso) e Odacir Almeida Neves, orientador deste trabalho, por suas inúmeras contribuições e pela sua forma atenciosa e responsável de fazer orientação.

A SBM (Sociedade Brasileira de Matemática) por ter criado o PROFMAT e a CAPES que ofereceu o suporte financeiro tão necessário ao seu desenvolvimento.

*Sempre me pareceu estranho que todos aqueles que
estudam seriamente esta ciência
acabam tomados de uma espécie de paixão pela mesma.
Em verdade, o que proporciona o máximo de prazer não é
o conhecimento e sim a aprendizagem,
não é a posse, mas a aquisição,
não é a presença, mas o ato de atingir a meta.*

(Gauss - Carl Friedrich)

LIMA, J. P. **Uma proposta para o ensino das seções cônicas no ensino básico mediante o uso de um ambiente dinâmico**. Dissertação (Programa de Pós-graduação Mestrado Profissional em Rede Nacional – PROFMAT) – No pólo da Universidade Federal Rural do Semi-árido – UFERSA, Mossoró, 2014.

RESUMO

Este trabalho foi idealizado com o objetivo de contribuir para o Ensino-aprendizagem das Seções Cônicas no Ensino Básico. Divide-se em três partes. Na parte I é apresentada uma inovadora sequência didática para o estudo desse tema, visto que valoriza os fatos históricos, os matemáticos que contribuíram para o desenvolvimento do tema e dar ênfase às relações que existem entre as cônicas (elipse, parábola e hipérbole), partindo da exploração sob o ponto de vista geométrico, motivando e preparando o aluno para a exploração algébrica do tema. Na parte II é apresentado um “Ambiente Dinâmico de Ensino das Seções Cônicas – ADESC” criado em consonância com a sequência didática supracitada. O ambiente é uma página da web onde o aluno, orientado pelo professor, constrói seu conhecimento por meio da exploração de objetos digitais (construções) produzidas com auxílio do software de geometria dinâmica, GeoGebra (<http://www.geogebra.org>). Por fim, na parte III, apresentam-se as considerações finais e perspectivas futuras sobre as ideias inovadoras do presente trabalho.

Palavras-chave: Ensino. Cônicas. Tecnologias no ensino de matemática. Geometria dinâmica. GeoGebra.

LIMA, J.P. **A proposal for teaching conic sections in basic education through the use of a dynamic environment.** Master Program (Graduate Program in Professional Masters National Network - PROFMAT) - In the pole of the Federal Rural University of the Semi-arid - UFERSA, Mossoró, 2014.

ABSTRACT

This research was idealized aiming to contribute for the Mathematics teaching and learning in the primary and secondary school. It is divided in three parts. In part I, it is introduced a groundbreaking didactic sequence for the study of this theme, considering that appreciates the historical facts, the mathematicians contributed to the development of the theme and emphasizes the relations that exist among conical (ellipse, parabola and hyperbole) , beginning with the exploration under a geometric approach of the theme. In part II, it is presented a “Dynamic Environment to the Teaching of Conical Sections – DETCS created along with the didactic sequence already aforementioned. The environment is a webpage that allows to the student accompanied by a teacher to develop his knowledge through of the exploration of digital objects (constructions) created with the assistance of geometric dynamic, GeoGebra (<http://www.geogebra.org>). Lastly, in part III, we present conclusions and future perspectives about the groundbreaking ideas of this work.

Keywords: Teaching. Conics. Technologies in Mathematics teaching. Dynamic Geometry. GeoGebra.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1: tentativa de duplicação do cubo de aresta a pelos Atenenses	20
Figura 2: obtenção da média proporcional l entre os segmentos a e b	22
Figura 3: curvas de Hipócrates conforme equações (7), (8) e (9)	24
Figura 4: traçado do esboço da curva (8) $y^2 = 2ax$ por Menaecmus	26
Figura 5: seções cônicas segundo Menaecmus	27
Figura 6: cone reto seccionado por um plano perpendicular a uma geratriz	28
Figura 7: cone duplo e os dois ramos da hipérbole	33
Figura 8: parábola segundo Apolônio	34
Figura 9: elipse segundo Apolônio	34
Figura 10: hipérbole segundo Apolônio	34
Figura 11: definição dos nomes: elipse, parábola e hipérbole	35
Figura 12: <i>latus rectum</i> das cônicas	36
Figura 13: relação de igualdade na parábola	37
Figura 14: relação de falta na elipse	37
Figura 15: relação de excesso na hipérbole	37
Figura 16: esferas de Dandelin	40
Figura 17 elipse e as Esferas de Dandelin	41
Figura 18: esferas de Dandelin na elipse	42
Figura 19: esferas de Dandelin para o caso da hipérbole	42
Figura 20: esferas de Dandelin no caso da parábola	43
Figura 21: segmentos tangentes a uma esfera	45
Figura 22: igualdade das geratrizes de um tronco de cone	45
Figura 23: elipse e seus focos	46
Figura 24: parábola com foco e diretriz	48
Figura 25: prova da congruência dos triângulos ΔPP_1P_2 e ΔPP_2P_3	50
Figura 26: hipérbole e seus focos	51
Figura 27: desenhando elipse no plano	54
Figura 28: desenhando parábola no plano	55
Figura 29: desenhando hipérbole no plano	56
Figura 30: excentricidade da cônica	58
Figura 31: cônica segundo a excentricidade	60
Figura 32: sistema cartesiano e reta diretriz	63
Figura 33: elementos da parábola	65
Figura 34: parábola com vértice na origem e foco sobre o eixo Ox à direita da diretriz	66
Figura 35: parábola com vértice na origem e foco sobre o eixo Ox à esquerda da diretriz	67
Figura 36: parábola com vértice na origem e foco sobre o eixo Oy acima da diretriz	67
Figura 37: parábola com vértice na origem e foco sobre o eixo Oy à abaixo da diretriz	67
Figura 38: parábola com vértice $V = (x_o, y_o)$, eixo paralelo à Ox e foco à direita da diretriz	68
Figura 39: parábola com vértice $V = (x_o, y_o)$, eixo paralelo à Ox e foco à esquerda da diretriz	69
Figura 40: parábola com vértice $V = (x_o, y_o)$, eixo paralelo à Oy e foco acima da diretriz	69
Figura 41: parábola com vértice $V = (x_o, y_o)$, eixo paralelo à Oy e foco abaixo da diretriz	69
Figura 42: elementos da elipse	70
Figura 43: variação da excentricidade na elipse	71
Figura 44: elipse com centro na origem e focos sobre o eixo Ox	72
Figura 45: elipse com centro na origem e focos sobre o eixo Oy	73
Figura 46: elipse com centro $O' = (x_o, y_o)$ e eixo focal paralelo à Ox	74
Figura 47: elipse com centro $O' = (x_o, y_o)$ e eixo focal paralelo à Oy	75

Figura 48: elementos da hipérbole.....	77
Figura 49: hipérbole com centro na origem e focos sobre o eixo Ox	78
Figura 50: hipérbole com centro na origem e focos sobre o eixo Oy	80
Figura 51: hipérbole com centro $O' = (x_o, y_o)$ e eixo focal paralelo à Ox	81
Figura 52: hipérbole com centro $O' = (x_o, y_o)$ e eixo focal paralelo à Oy	82
Figura 53: reta tangente à elipse.....	84
Figura 54: reta tangente à parábola.....	84
Figura 55: reta tangente à hipérbole.....	84
Figura 56: prova da propriedade da reta tangente à elipse.....	85
Figura 57: prova da propriedade da reta tangente à parábola.....	87
Figura 58: prova da propriedade da reta tangente à hipérbole.....	88
Figura 59: lei da reflexão: superfície plana.....	90
Figura 60: lei da reflexão: superfície curva.....	90
Figura 61: superfícies de revolução.....	90
Figura 62: reflexão no espelho elíptico.....	91
Figura 63: reflexão no espelho parabólico.....	91
Figura 64: reflexão no espelho hiperbólico.....	92
Figura 65: refletor elíptico.....	93
Figura 66: refletor de odontólogo.....	93
Figura 67: litotripsia.....	94
Figura 68: equipamento utilizado na radioterapia.....	95
Figura 69: edifício Capitólio em Washington.....	96
Figura 70: antena parabólica.....	97
Figura 71: forno solar de Odélio na França.....	98
Figura 72: farol de carro.....	99
Figura 73: fecho de luz.....	99
Figura 74: esquema de telescópio refletor.....	100
Figura 75: esquema de telescópio refletor (Newton).....	101
Figura 76: esquema de telescópio refletor (Cassegrain).....	101
Figura 77: esquema de telescópio hiperbólico.....	102
Figura 78: igreja da Pampulha – BH/MG.....	103
Figura 79: catedral de Brasília.....	104
Figura 80: usina nuclear de Temelin - República Tcheca.....	105
Figura 81: Coliseu – Roma/Itália.....	105
Figura 82: ponte Akashi-Kaikyo - Japão.....	106
Figura 83: movimento de corpos celestes.....	108
Figura 84: hipérbole de posição em relação às estações de rádio nos pontos $F1$ e $F2$	110
Figura 85: hipérbole de posição em relação às estações de rádio nos pontos $F1$, $F2$ e $F3$	110
Figura 86: hipérbole de posição em relação às estações de rádio nos pontos $F1$ e $F2$	111
Figura 87: exemplo de uma Construção do ADESC.....	118
Figura 88: página Home - ADESC.....	121
Figura 89: página Índice - ADESC.....	122
Figura 90: botões da página Índice - ADESC.....	123
Figura 91: imagem da “PÁGINA 1 - Origem das Seções Cônicas” – ADESC.....	123
Figura 92: botões ao final da “PÁGINA 1 - Origem das Seções Cônicas” – ADESC.....	124
Figura 93: CONSTRUÇÃO 1.1 - Proporções contínuas.....	125
Figura 94: CONSTRUÇÃO 1.2 – Curvas de Hipócrates.....	125
Figura 95: CONSTRUÇÃO 1.3 – Traçado da curva $y^2 = 2ax$ por Menaecmus.....	126
Figura 96: CONSTRUÇÃO 1.4 – Seções cônicas segundo Menaecmus.....	126
Figura 97: CONSTRUÇÃO 2.1 – Seções cônicas segundo Apolônio.....	127

Figura 98: apresentação – nomes das seções cônicas	128
Figura 99: CONSTRUÇÃO 2.2 – nomes das seções cônicas.....	128
Figura 100: CONSTRUÇÃO 3.1 – esferas de Dandelin no plano	129
Figura 101: CONSTRUÇÃO 3.2 – esferas de Dandelin no espaço	130
Figura 102: CONSTRUÇÃO 3.3 – prova da definição das seções cônicas - ELIPSE.....	130
Figura 103: CONSTRUÇÃO 3.3 – prova da definição das seções cônicas - PARÁBOLA.....	131
Figura 104: CONSTRUÇÃO 3.3 – prova da definição das seções cônicas - HIPÉRBOLE.....	131
Figura 105: CONSTRUÇÃO 3.4 – construção do jardineiro – ELIPSE	132
Figura 106: CONSTRUÇÃO 3.4 – construção do jardineiro – PARÁBOLA	132
Figura 107: CONSTRUÇÃO 3.4 – construção do jardineiro - HIPÉRBOLE	133
Figura 108: CONSTRUÇÃO 3.5 – construção das cônicas no GeoGebra - I	133
Figura 109: CONSTRUÇÃO 3.5 – construção das cônicas no GeoGebra - I	134
Figura 110: CONSTRUÇÃO 3.6 – construção das cônicas no GeoGebra - II.....	134
Figura 111: CONSTRUÇÃO 3.6 – construção das cônicas no GeoGebra - II.....	135
Figura 112: CONSTRUÇÃO 3.7 – seções cônicas segundo a excentricidade – VEJA 1	135
Figura 113: CONSTRUÇÃO 3.7 – seções cônicas segundo a excentricidade – VEJA 2	136
Figura 114: CONSTRUÇÃO 4.1 – elementos da parábola.....	137
Figura 115: CONSTRUÇÃO 4.2 – elementos da elipse.....	137
Figura 116: CONSTRUÇÃO 4.3 – elementos da hipérbole	138

SUMÁRIO

Introdução.....	14
PARTE I.....	18
Uma Proposta de Ensino das Seções Cônicas.....	18
1 A Origem das Seções Cônicas	19
1.1 Problema da duplicação do cubo	19
1.2 Proporções contínuas.....	21
1.3 Menaecmus e a Descoberta das Seções Cônicas.....	25
2 As contribuições de Apolônio	31
2.1 Apolônio de Perga	31
2.2 As descobertas de Apolônio	32
2.3 As Seções Cônicas Segundo Apolônio	33
2.4 Por que Elipse, Parábola e Hipérbole?	35
3 Cônicas como lugar geométrico no plano	39
3.1 Esferas de Dandelin	39
3.2 Cônicas como Lugar Geométrico no Plano	44
3.3 Distância Foco-Diretriz e Excentricidade.....	57
4 Estudo analítico das cônicas.....	62
4.1 Equação conjunta Foco-Diretriz.....	63
4.2 Equações da Parábola	65
4.2.1 Equação da parábola com vértice na origem do sistema.....	66
4.2.2 Equação da parábola com vértice no ponto $V = (x_0, y_0)$	67
4.3 Equações da Elipse	69
4.3.1 Equação da elipse com centro na origem do sistema.....	72
4.3.2 Equação da elipse com centro no ponto $O' = (x_0, y_0)$	74
4.4 Equações da Hipérbole	76
4.4.1 Equação da hipérbole com centro na origem do sistema.....	78
4.4.2 Equação da hipérbole com centro no ponto $O' = (x_0, y_0)$	80
5 Aplicações das Seções Cônicas.....	84
5.1 Propriedades da reta tangente a uma cônica	84
5.2 Superfícies Cônicas e Propriedades Refletoras	89
5.3 Aplicações das Superfícies Cônicas.....	92

5.3.1	Superfícies refletoras elípticas	92
5.3.2	Superfícies refletoras parabólicas	97
5.3.3	Superfícies refletoras hiperbólicas	99
5.4	Outras Aplicações das Seções Cônicas.....	103
5.4.1	Arquitetura e Engenharia	103
5.4.2	Astronomia	107
5.4.3	Sistema de Navegação Loran	108
PARTE II	114
Ambiente Dinâmico de Ensino das Seções Cônicas – ADESC	114
6	Conhecendo o ADESC	115
7	Visão Geral do ADESC	121
7.1	Home	121
7.2	Índice.....	122
7.3	PÁGINA 1: Origem das seções cônicas	125
7.4	PÁGINA 2: As contribuições de Apolônio	127
7.5	PÁGINA 3: Cônicas como lugar geométrico no plano	129
7.6	PÁGINA 4: Estudo analítico das cônicas.....	137
7.7	PÁGINA 5: Aplicações das cônicas	139
7.8	PÁGINA 6: Apêndice	139
8	Orientações para Uso do ADESC	140
PARTE III	142
9	Considerações Finais e Perspectivas Futuras	143
Referências Bibliográficas	145

Introdução

O que você sabe sobre as Seções Cônicas: Elipse, Parábola e Hipérbole?

Caso fizéssemos essa pergunta aos alunos egressos do Ensino Médio, possivelmente não obteríamos respostas, ou caso houvesse, provavelmente seriam incompletas, difusas e superficiais, com menção exclusivamente ao fato de tratar-se de curvas e terem, cada uma delas, uma equação associada. Essa conclusão baseia-se na forma como esse assunto é ensinado no Ensino Básico atual. Através da análise dos diversos livros didáticos de Matemática, observa-se que esses textos tratam o assunto, em sua grande maioria, apenas sob o ponto de vista de equações algébricas. Quanto à origem histórica do tema, às propriedades geométricas, às relações entre as curvas, às aplicações, etc., quando mencionados, são pequenas passagens ou leituras complementares, com informações superficiais.

O assunto Seções Cônicas aparece apenas ao final do Ensino Médio o que, na maioria das vezes, faz com que esse tópico sequer seja visto em sala. Quando acontece de ser ministrado, o estudo restringe normalmente a um curto período (uma ou duas semanas) e o enfoque, dado pela maioria dos livros didáticos, se concentra nas equações analíticas das curvas cujas demonstrações costumam se basear na caracterização bifocal das mesmas.

É muito provável que essa abordagem limitada e superficial das cônicas nos livros didáticos seja um dos grandes motivos da não valorização do tema pelos alunos, sentimento compartilhado, pela maioria dos próprios professores, que por usar, na maioria das vezes, o livro didático como única fonte de pesquisa, deixa de reconhecer a beleza, história, importância e utilidade do assunto. Valores esses perceptíveis quando se explora o conhecimento acumulado ao longo da história das seções cônicas.

É interessante ressaltar que nem sempre o estudo das Seções Cônicas foi superficial e limitado como vemos hoje nos mais diversos livros didáticos. De acordo com o Programa de Acesso à Escola de Engenharia (Antiga Escola Polytechnica) da UFRJ de 1907 (Polytechnica, 1907) este assunto já mereceu

maior destaque e profundidade no ensino. Era cobrada a origem histórica das Seções Cônicas, as construções contínuas e por pontos, a existência dos eixos de simetria, o conceito de excentricidade, vários traçados de retas tangentes às curvas, propriedades refletoras e focais, projeções sobre os eixos, áreas, etc. Vê-se, portanto, que hoje, muitas informações importantes são renegadas aos alunos do Ensino Médio, no que concerne ao estudo das seções cônicas.

Além da superficialidade e limitação com que é abordado o estudo das cônicas nos livros didáticos atuais, outro fator que contribui para a má compreensão do tema e baixa aceitação por parte dos alunos é a forma tradicional com que o assunto é ministrado, isto é, o ensino restrito ao uso da lousa, giz e livro didático. Tal metodologia de ensino, aliado à explanação não contextualizada, limitada e superficial do assunto, certamente contribui para torná-lo pouco atrativo para os alunos e, inclusive para os próprios professores.

De acordo com (D'Ambrósio, 2003), é preciso substituir os processos de ensino que priorizam a exposição, que levam a um receber passivo do conteúdo e que não estimulam a participação dos alunos, para que os mesmos deixem de ver a matemática como algo acabado e cuja transmissão de conteúdos lhes parece um conjunto estático de conhecimentos e técnicas. Neste sentido, diferentes pesquisas têm abordado as contribuições da utilização dos recursos computacionais na aprendizagem de conceitos matemáticos (Borba, et al., 2007).

As Tecnologias de Informação e Comunicação (TIC) estão cada dia mais presentes em nosso cotidiano, exercendo um papel cada vez mais importante na educação, em especial na educação matemática. Isso faz com que elas constituam-se em um instrumento de trabalho essencial para todos os profissionais da educação. Além do mais, esses recursos provocam uma motivação extra nos educandos, em função, principalmente, do dinamismo que apresentam.

A verdadeira aprendizagem em matemática, em especial em Geometria, deve passar necessariamente pelas etapas de exploração concreta, experimentação, resolução de problemas, elaboração de conjecturas, justificativas informais e provas. Segundo Guimarães et al. (2002) estas etapas não são facilmente assimiladas pelos alunos, embora pareçam muito naturais do ponto de vista de quem já as superou.

Um bom exemplo dessas etapas para o ensino da geometria, por exemplo, é o uso de programas de Geometria Dinâmica (GD). Podemos dizer que a GD é a implementação, no computador, de construções com régua e compasso, na qual o estudante pode, a partir de uma construção inicial, mover com o mouse algum dos objetos iniciais. O programa encarrega-se de redesenhar toda sua construção, de modo aparentemente contínuo. Dessa forma, um programa de GD possibilita ao aprendiz, a partir de uma única construção, efetuar um número arbitrário de testes (para procurar ou verificar uma conjectura), o que seria praticamente impossível com régua e compasso.

Baseado, portanto, na compreensão da importância das TIC's para o Ensino, sobretudo de matemática, e visando enfrentar as problemáticas acima citadas sobre o ensino atual das Seções Cônicas, vê-se a necessidade de motivar o estudo do tema através de uma nova sequência didática e do emprego das novas tecnologias como ferramentas didáticas.

Nessa perspectiva, esse trabalho, estruturado em três partes, apresentará uma nova sequência didática para o estudo das Seções Cônicas, aliada a uma ferramenta tecnológica de apoio ao ensino criada especialmente para motivar os alunos e tornar o conhecimento mais sólido e completo.

Na Parte I, apresenta-se uma proposta para uma sequência de assuntos a serem estudados sobre as Seções Cônicas no Ensino Médio. Tanto na sequência, quanto na abordagem do tema, a proposta é inovadora, visto que procura valorizar os fatos históricos, os autores do processo, dando ênfase às relações que existem entre as curvas e valorizando a exploração das mesmas sob o ponto de vista geométrico com intuito de motivar e preparar o aluno para exploração algébrica do tema. Ao final da proposta, tem-se uma apresentação consistente das várias aplicações dessas curvas nas tecnologias atuais, com o intuito de justificar mais ainda, a importância do estudo geral sobre as cônicas.

Na parte II do trabalho, apresenta-se um novo procedimento metodológico proposto para ensino das Seções Cônicas. Tal metodologia consiste num Ambiente Dinâmico de Ensino das Seções Cônicas (ADESC) criado em consonância com a proposta teórica apresentada na parte I.

O ambiente é uma página da web com textos e elementos dinâmicos, que pode ser utilizado de forma online, acessando o endereço “www.adesc.blog.br”, ou off-line, baixando-o em “<http://1drv.ms/PAVdnV>”.

O ADESC foi concebido em um ambiente computacional, a partir de uma abordagem dinâmica do assunto, buscando contribuir para a compreensão e articulação dos conteúdos envolvidos, de forma autônoma e criativa, integrando as formas de pensamento algébrico e geométrico. Seus elementos dinâmicos são baseados em construções feitas no software livre de geometria dinâmica, GeoGebra¹.

Para que o leitor possa ter uma visão prévia do ambiente, na parte II do presente trabalho será feita a apresentação geral do mesmo, suas páginas, botões, elementos, funcionalidades e aplicações. Ainda, na mesma seção, serão dadas orientações de utilização da ferramenta em sala de aula.

Na parte III e última, algumas considerações finais sobre o trabalho e perspectivas futuras sobre os conteúdos propostos e o ambiente desenvolvido.

¹ O GeoGebra é um Software de matemática dinâmica que junta geometria, álgebra e cálculo. Foi desenvolvido para aprender e ensinar matemática nas escolas. Markus Hohenwarter, professor de Matemática Austríaco, criou o GeoGebra como parte de sua Dissertação de Mestrado em Educação Matemática e Ciência da Computação, na Universidade de Salzburgo na Áustria. Continuou o Desenvolvimento do Software durante o seu Doutorado em Educação Matemática.

PARTE I

Uma Proposta de Ensino das Seções Cônica

1 A Origem das Seções Cônicas

A origem do estudo das Seções Cônicas (ou somente Cônicas) foi provavelmente por volta do século IV a.C. (Boyer, 1996 p. 102). Muitos foram os matemáticos que se dedicaram ao estudo dessas curvas no decorrer da história. De fato, estas curvas estão entre as mais sistemática e exaustivamente estudadas desde a antiguidade. Não é de estranhar que esse interesse seja tão antigo. Suas propriedades, muitas já conhecidas pelos gregos, desempenham um papel importante em vários domínios da Física, como Astronomia, Ótica e Acústica, da Engenharia e Arquitetura e atualmente exercem um papel de primordial importância no desenvolvimento da tecnologia moderna.

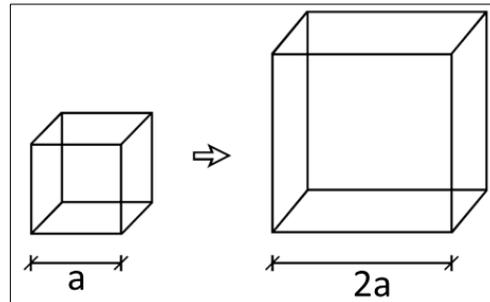
Neste capítulo será apresentada uma breve análise, não exaustiva, a respeito da origem do Estudo das Seções Cônicas e as contribuições dadas por alguns matemáticos.

1.1 Problema da duplicação do cubo

Os estudiosos da Grécia clássica estudaram três problemas de Geometria que desempenharam papel importante no desenvolvimento da Matemática. Eles são problemas de construção e resistiram a todas as tentativas desses estudiosos para resolvê-los utilizando somente régua sem graduação e compasso. Um dos três problemas geométricos (trissecação do ângulo, duplicação do cubo e quadratura do círculo) que desafiaram o poder inventivo de inúmeros matemáticos e intelectuais durante mais de dois mil anos, com início nos primeiros quatro séculos do período helénico (compreendido entre o século VI a.C. e o séc. V d.C.) consistia em, dado um cubo de volume conhecido, determinar, com régua e compasso, a aresta de um novo cubo de volume igual ao dobro do anterior. Esse ficou então conhecido como o **Problema da Duplicação do Cubo** ou **Problema Deliano**, devido a uma lenda sobre a cidade de Delos, na Grécia (Venturi, 1949 p. 235). Ainda de acordo com Venturi, diz a lenda que durante o cerco espartano da Guerra do Peloponeso cerca de 430 a.C., uma peste dizimou um quarto da

população de Atenas. Ainda segundo a lenda, uma plêiade de sábios fora enviada ao oráculo de Apolo em Delos para inquirir sobre como a peste poderia ser eliminada. Conta-se que o oráculo respondeu que o altar de Apólo, que tinha forma cúbica, deveria ser duplicado. Os Atenienses celeremente dobraram as medidas das arestas do cubo, conforme Figura 1 abaixo:

Figura 1: Tentativa de duplicação do cubo de aresta a pelos Atenienses



Fonte: autoria própria

Ainda segundo a lenda, a peste em vez retroceder, cresceu. Qual o erro? Em vez de dobrar, os atenienses octuplicaram o volume do altar. Pois,

$$\text{Para } a = 1 \Rightarrow \text{Volume do cubo de aresta "a" : } a^3 = 1$$

$$\text{Para } a_0 = 2 \Rightarrow \text{Volume do cubo de aresta "a_0" : } (a_0)^3 = 8 = 8a$$

Considerando os recursos atuais da álgebra, a solução do problema da duplicação do cubo é trivial: procura-se a aresta x de um cubo, cujo volume seja o dobro do volume de um cubo de aresta a . Para encontrar o valor de x basta resolver a equação:

$$x^3 = 2a^3 \Rightarrow x = a\sqrt[3]{2} \quad (1)$$

De acordo com a equação (1), a solução da duplicação do cubo residia, afinal, na determinação do valor exato de $\sqrt[3]{2}$.

Em tempo, é importante relembrar que resolver um problema para os gregos significava resolvê-lo através de construções com régua (sem escala) e compasso. Em seu excelente livro O Romance das Equações Algébricas, Gilberto G. Garbi descreve que:

“Esta limitação de apenas dois instrumentos espelhava o conceito de elegância com que os gregos tratavam das questões geométricas e, também, a atração tipicamente helênica que eles nutriam pelos desafios intelectuais, independentemente de qualquer utilidade prática.” (Garbi, 2009)

Portanto, a dificuldade residia na determinação de $\sqrt[3]{2}$ utilizando-se apenas desses instrumentos. Vários matemáticos da Grécia Antiga, bem como outros posteriormente, estudaram o problema. As tentativas de resolver este problema foram de fundamental importância, pois estimularam a pesquisa matemática de épocas posteriores e por não estarem ligados a nenhum problema prático, tornaram-se assim uma das sementes da matemática pura.

Hoje se sabe por que apesar de tantas tentativas os matemáticos gregos não obtiveram êxito na solução do problema, pois:

“Em 1837, o francês Pierre L. Wantzel demonstrou que o problema deliano não admite solução com uso de régua e compasso apenas. Com apenas 23 anos Wantzel, engenheiro da prestigiosa Ecole Polytechnique, pôs fim a discussões de quase dois milênios. Wantzell demonstrou que um número real é construtível com régua e compasso se e somente se ele é um número algébrico, de grau igual a uma potência de dois, sobre os racionais.” (Venturi, 1949 p. 236)

1.2 Proporções contínuas

Na busca de solução para o problema da quadratura do círculo, os matemáticos atenienses se tornaram hábeis em tratar transformações de áreas e proporções (Boyer, 1996). Em particular, evidentemente, não havia dificuldade em converter um retângulo de lados a e b num quadrado. Isso exige achar a

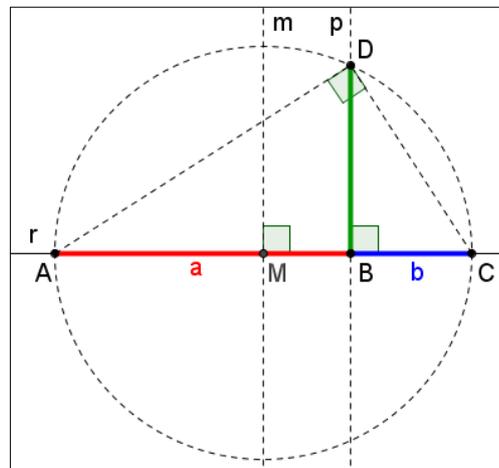
média proporcional, ou geométrica, entre a e b . Isto é, em notação moderna equivalente à:

$$\frac{a}{l} = \frac{l}{b} \Rightarrow l^2 = ab \quad (2)$$

Utilizando-se apenas de régua e compasso, o valor de l pode ser encontrado seguindo os passos abaixo (Figura 2):

- 1 – Trace uma reta r ;
- 2 – Sobre a reta r , marque os pontos: $A = (0,0)$, $B = (a,0)$ e $C = (a + b,0)$;
- 3 – Trace a mediatriz do segmento AC e marque o ponto M , médio de AC ;
- 4 – Trace o círculo c de centro M e diâmetro AC ;
- 5 – Trace a perpendicular p a reta r passando por B ;
- 6 – Marque o ponto D , interseção do círculo com a perpendicular p traçada;
- 7 – Trace o segmento BD ;

Figura 2: Obtenção da média proporcional l entre os segmentos a e b



Fonte: autoria própria

Note que o segmento BD é justamente o valor de l procurado, visto que, pelas relações métricas no triângulo retângulo $\triangle ADC$, temos:

$$(\overline{BD})^2 = \overline{AB} \times \overline{BC} = axb \quad (3)$$

Portanto, dada a possibilidade de quadrar um retângulo a por b usando proporções, como visto acima, era natural, pois que tentassem generalizar a questão inserindo dois meios entre duas grandezas dadas a e b (Boyer, 1996). Isto é, dados dois segmentos a e b , esperavam construir dois outros x e y tais que formassem a **Proporção estendida**, que em notação atual se escreve:

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{b} \quad (4)$$

Segundo (Boyer, 1996 p. 46), o matemático Hipócrates de Quio (480 a.C.) foi quem percebeu **que a solução desse problema levaria à solução do problema Duplicação do Cubo**. De fato, em notação moderna, se fizermos $b = 2a$, teremos:

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{2a} \quad (5)$$

Onde se resolvendo por eliminação de y , chegamos à conclusão de que:

$$x^3 = 2a^3 \quad (6)$$

Assim, o x da proporção estendida entre os segmentos a e $2a$, caso encontrado, seria a aresta do cubo cujo volume é duas vezes o volume do cubo de aresta a dado. O comprimento x seria, portanto, **a solução do problema da duplicação do cubo**.

Com os recursos da álgebra moderna, podemos perceber que durante o processo de eliminação de y , na proporção estendida (5) surgem três equações de curvas cuja resolução simultânea leva a (6). Essas equações na notação atual se escrevem:

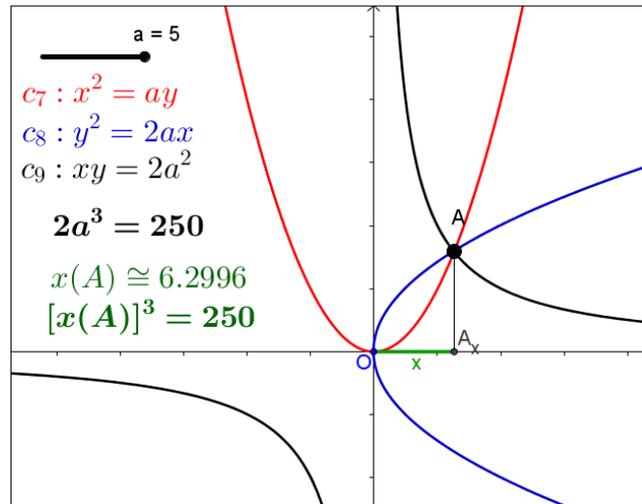
$$x^2 = ay \quad (7)$$

$$y^2 = 2ax \quad (8)$$

$$xy = 2a^2 \quad (9)$$

Em notação atual, se plotarmos em um sistema de eixos cartesiano ortogonal, as curvas expressa pelas equações (7) a (9), obteremos a imagem da Figura 3:

Figura 3: Curvas de Hipócrates conforme equações (7), (8) e (9)



Fonte: autoria própria

Nota-se, portanto, pela análise da Figura 3 que há um ponto (A) comum às três curvas. E esse ponto é tal que as suas coordenadas satisfazem as equações (7) a (9) simultaneamente, isto é, a abscissa e a ordenada do ponto A , são respectivamente as médias proporcionais x e y entre os segmentos a e $2a$ procurados. Ou seja, a abscissa do ponto A é o valor da aresta do cubo procurado, o valor da média x . Perceba, ainda pela análise da figura, que $[x(A)]^3 = 2a^3$.

Portanto, a solução do problema da duplicação do cubo, residia na possibilidade de determinar com régua e compasso essas três curvas expressas pelas equações (7), (8) e (9).

Nesse contexto, os matemáticos gregos passaram a procurar formas de traçar essas curvas, pois como vimos, os seus traçados resolveriam o problema da duplicação do cubo. Esse então passou a ser o novo desafio para os matemáticos da época.

É importante ressaltar que para os gregos, encontrar uma curva, significava exprimi-la estereometricamente por secção de sólidos ou através de propriedades mecânicas, isto é, com régua e compasso. Vale ainda ressaltar que

essas construções de certo ponto de intersecção de duas curvas de maneira alguma indicam a forma de como os gregos tentaram resolver o problema da duplicação, mas apenas mostram em termos modernos como essas curvas foram descobertas a partir da busca pela solução do problema da duplicação do cubo. Isto é, este modo de encarar a questão, associando uma equação a uma curva, é inteiramente estranho à geometria antiga; com ele, apenas se pretende fazer notar que as duas questões matemáticas estão intimamente ligadas e que, portanto, as reflexões sobre uma delas podem ter conduzido, de maneira natural, à tomada de consciência acerca da outra.

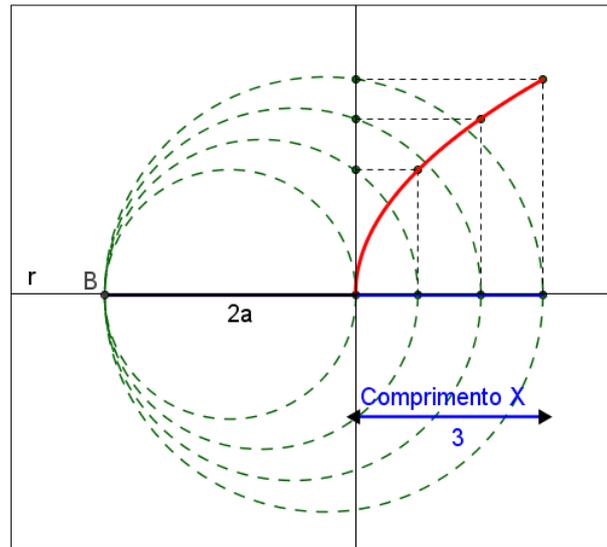
1.3 Menaecmus e a Descoberta das Seções Cônicas

Depois de Hipócrates ter descoberto que o problema da duplicação do cubo se podia reduzir ao problema de encontrar dois meios proporcionais entre a aresta do cubo dado e o dobro desta, parece que todo o esforço subsequente foi no sentido de encontrar uma construção para os dois meios proporcionais em causa. Essas buscas foram muito frutíferas no desenvolvimento da matemática, sendo um exemplo de tal facto a " (...) descoberta (ou, pelo menos, estudo atento) das secções cônicas." (Boyer, 1996 p. 65).

Após a descoberta das curvas que levariam à solução da duplicação do cubo, era necessário traçá-las mecanicamente no plano, de forma a obter a medida x , aresta do cubo procurado como intersecção dessas curvas. Vários esforços então foram feitos nessa perspectiva.

O matemático grego Menaecmus (380 - 320 a.C.) por volta de 360 ou 350 a.C., seguindo um método euclidiano, esboçou a curva expressa pela equação (8) $y^2 = 2ax$, aplicando repetidamente o seguinte método Figura 4 (Boyer, 1996):

Figura 4: Traçado do esboço da curva (8) $y^2 = 2ax$ por Menaecmus



Fonte: autoria própria

Primeiramente, sobre uma reta r , traça-se um segmento de reta de comprimento $2a$ e um prolongamento desse segmento com medida x . Em seguida, trançam-se duas circunferências uma de diâmetro $2a$ e outra com diâmetro $2a + x$. Traça-se uma reta p perpendicular à r passando pelo ponto onde se iniciou o prolongamento de $2a$. O segmento determinado pela interseção dessa perpendicular com a circunferência maior e o ponto inicial do prolongamento tem comprimento y satisfazendo a equação $y^2 = 2ax$. Esta relação é obtida por semelhança de triângulos a partir do triângulo retângulo de base $2a + x$ e altura y . O ponto da curva pode ser marcado pela interseção das retas paralelas aos segmentos x e y passando respectivamente nas extremidades de y e x . Dessa forma, obtinham-se os demais pontos da curva, fazendo o prolongamento x variar o seu comprimento.

Acredita-se que Menaecmus pode ter observado que o diagrama circular da Figura 4 poderia ser pensado como curvas de nível de um cone e por isso a curva poderia ser gerada pela secção desse cone por um plano. Assim,

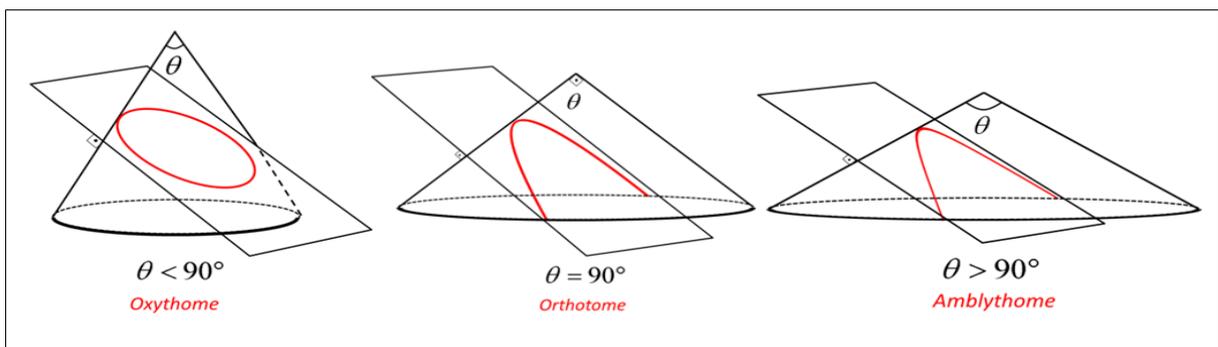
“usando a perspectiva de determinação de curvas adotada pelos gregos, Menaecmus percebeu que havia uma família de curvas adequadas, que poderiam ser obtidas de uma mesma fonte, **seccionando um cone circular reto por um plano perpendicular a um elemento do mesmo**”. (Boyer, 1996 p. 65) (grifo nosso)

Portanto, Menaecmus foi o primeiro a descobrir as curvas que satisfaziam as equações (7) a (9) mediante a secção de cones por planos e que, ficaram, por esse motivo, conhecidas como **Seções Cônicas** (ou somente **Cônicas**).

Embora Menaecmus houvesse descoberto como obter essas curvas, não se sabia como traçá-las mecanicamente no plano com apenas régua e compasso. Mas isso não diminui a importância da descoberta de Menaecmus. Assim, Menaecmus encontrava as cônicas tomando a intersecção da secção de um cone por um plano perpendicular a uma de suas geratrizes (Figura 5) e, conforme o ângulo do vértice do cone fosse agudo, reto ou obtuso (cone acutângulo, retângulo ou obtusângulo respectivamente), a curva obtida da intersecção do plano com a superfície do cone era chamada, respectivamente, de **oxytome**, **orthotome** e **amblythome**, as quais mais tarde foram chamadas, respectivamente, de **Elipse**, **Parábola** e **Hipérbole** (as razões desses nomes serão vistas mais adiante).

Cabe salientar que as equações (7) e (8), como veremos em detalhe no capítulo 4 deste trabalho, representam uma Parábola, já a equação (9), uma Hipérbole. A terceira curva, Elipse, embora não participasse diretamente da solução do problema da duplicação, como visto, também foi descoberta por Menaecmus, como um subproduto da secção do cone pelo plano.

Figura 5: Seções cônicas segundo Menaecmus



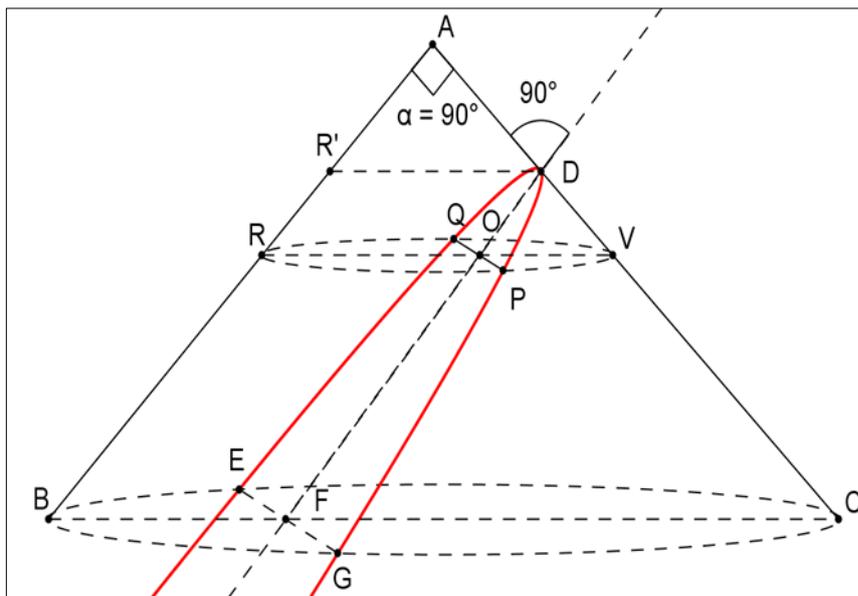
Fonte: autoria própria

Mostraremos, em linguagem moderna, que a curva obtida por Menaecmus a partir da secção do cone retângulo por um plano perpendicular a uma geratriz tem expressão algébrica equivalente a equação (8), isto é, trata-se realmente de uma Orthotome (Parábola). De forma semelhante, pode ser demonstrado que a

curva obtida por Menaecmus a partir da secção de um cone obtusângulo tem expressão algébrica semelhante à equação (9), isto é, uma Amblythome (Hipérbole). No caso da Oxythome (Elipse), conheceremos mais adiante a sua expressão algébrica em linguagem moderna. De forma semelhante ao método usado para a Orthotome e a Amblythome, é possível mostrar que a secção do cone acutângulo por um plano perpendicular a uma geratriz, gera uma curva de expressão algébrica semelhante a que será definida para Elipse.

Para a demonstração anunciada acima, suponha um cone reto de ângulo do vértice igual a 90° (cone retângulo). Trace um plano contendo o vértice do cone e perpendicular a sua base. Seja o ΔABC (Figura 6) a intersecção do cone com o plano.

Figura 6: Cone reto seccionado por um plano perpendicular a uma geratriz



Fonte: autoria própria

Neste caso a secção determinada pelo plano perpendicular à geratriz AC do cone é a curva EDG . Seja P um ponto pertencente a esta curva. Seccionando o cone por um plano paralelo a sua base e que contém P , determina-se o círculo PVR , onde R e V são as intersecções das geratrizes do cone e o plano. Sendo Q o outro ponto da curva que intersecta o círculo temos que:

1. $\overline{PQ} \perp \overline{RV}$, pois das simetrias envolvidas \overline{RV} é um diâmetro que secciona \overline{PQ} em seu ponto médio O ;
2. Logo, do ΔOPR inscrito na semicircunferência, portanto retângulo em P , \overline{OP} é a média proporcional entre \overline{OR} e \overline{OV} , isto é: $(\overline{OP})^2 = \overline{OR} \cdot \overline{OV}$ (basta perceber que \overline{OP} é altura relativa à hipotenusa do triângulo).
3. Os triângulos ΔDOV e ΔABC são semelhantes, pois $\overline{OD} \perp \overline{AC}$ e \overline{OV} é paralelo a \overline{BC} . Daí,

$$\frac{\overline{OV}}{\overline{OD}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{BA}};$$

4. Passando uma paralela a \overline{BC} por D , a intersecção desta com a geratriz perpendicular a \overline{AC} , denominamos R' . Logo, os triângulos $\Delta R'DA$ e ΔBCA são semelhantes. Daí,

$$\frac{\overline{R'D}}{\overline{AR'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}};$$

5. Tomando $\overline{OP} = y$ e $\overline{OD} = x$ e dos itens 2, 3 e 4, temos: $y^2 = \overline{OR} \cdot \overline{OV}$. Como $R'DOR$ é um paralelogramo, $\overline{R'D} = \overline{OR}$. Logo,

$$y^2 = \left(\overline{AR'} \cdot \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} \right) \cdot \left(\overline{OD} \cdot \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} \right) = \frac{\overline{AR'} \cdot (\overline{BC})^2}{(\overline{AB})^2} \cdot x$$

6. Como $\overline{AR'}$, \overline{BC} e \overline{AB} são os mesmos para todo P , tomemos $l = \frac{\overline{AR'} \cdot (\overline{BC})^2}{(\overline{AB})^2}$ e teremos:

$$\boxed{y^2 = lx}$$

7. Fazendo $l = 2a$ temos a equação em (8).

A constante l foi mais tarde chamada de **latus rectum** da curva e depende da distância em que o plano de secção se encontra do vértice do cone. Assim, as curvas expressas por (7) $x^2 = ay$ e (8) $y^2 = 2ax$ eram obtidas da secção de um cone reto por um plano perpendicular a uma geratriz do mesmo, a uma distância

do vértice do cone tal que os *latus rectum* fossem respectivamente a e $2a$. Essa era a maneira de Menaecmus visualizar a Parábola e de forma semelhante, fazia para a Elipse e Hipérbole.

Após os trabalhos de Menaecmus vários matemáticos gregos produziram trabalhos explorando estas curvas e suas propriedades, entre eles, Euclides e Arquimedes. Contudo, a obra grega sobre cônicas que se destacou foi aquela produzida por Apolônio de Perga (262 a 190 a.C) (Boyer, 1996).

No próximo capítulo, estudaremos as descobertas de Apolônio e sua relevante contribuição para o estudo a das Seções Cônicas.

2 As contribuições de Apolônio

2.1 Apolônio de Perga

O matemático Apolônio nasceu em Perga (sul da Ásia Menor), e acredita-se tenha vivido por volta de 262 a 190 a.C. (Boyer, 1996). Ele, juntamente com Euclides e Arquimedes, produziu obras que justificaram o nome "Idade Áurea da Matemática Grega" dado à época em que viveram. Dos muitos tratados de Apolônio, "As Cônicas", foi certamente a sua obra prima (Boyer, 1996). Sendo composta por oito volumes, apenas os sete primeiros foram preservados até os dias atuais, sendo os quatro primeiros em grego e as outras traduções em árabe por Thabit Ibn Querra (836 a 901). Em 1710, Edmund Halley (1656-1742) traduziu os sete volumes sobreviventes para o latim, possibilitando as demais traduções para as outras línguas modernas.

Na época em que Apolônio escreveu seu célebre tratado sobre as cônicas, outras exposições já tinham sido escritas sobre essas curvas. Mas a obra de Apolônio foi de suma importância para o desenvolvimento desse assunto no campo da Matemática.

"... assim como Os elementos de Euclides substituíram textos elementares anteriores, assim em nível mais avançado o tratado sobre Cônicas de Apolônio derrotou todos os rivais no campo das seções cônicas, inclusive As Cônicas de Euclides, e na antiguidade nenhuma tentativa parece ter sido feita para aperfeiçoá-la. Se sobrevivência é uma medida de qualidade, Os elementos de Euclides e As Cônicas de Apolônio foram claramente as melhores obras em seus campos."

(Boyer, 1996 p. 99)

2.2 As descobertas de Apolônio

Como vimos no capítulo 1 deste trabalho, antes do tempo de Apolônio, as Seções Cônicas (Elipse, Parábola e Hipérbole) eram obtidas como secções de três tipos diferentes de cone circular reto, conforme o ângulo no vértice fosse agudo, reto ou obtuso. Era preciso ainda, que a secção fosse feita sempre perpendicular a uma geratriz do cone. Apolônio, por sua vez, mostrou sistematicamente que **não é necessário tomar secções perpendiculares** e que de **um único cone (acutângulo, retângulo ou obtusângulo) podem ser obtidas todas as três espécies de secções cônicas**, simplesmente variando a inclinação do plano de secção. Essa última descoberta foi passo importantíssimo para relacionar as três curvas.

Uma segunda generalização importante se efetuou quando Apolônio provou que **o cone não precisava ser reto**, isto é, um cone cujo eixo é perpendicular à base circular - mas pode também ser oblíquo.

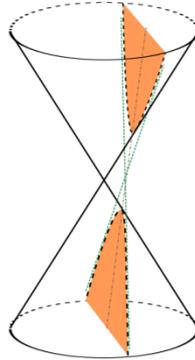
Outra contribuição importante de Apolônio foi a **substituição do cone de uma só folha por um cone duplo** o qual foi definido da seguinte forma:

"... Se fizer uma reta de comprimento indefinido e passando sempre por um ponto fixo mover-se ao longo da circunferência de um círculo que não está num mesmo plano com o ponto de modo a passar sucessivamente por cada um dos pontos dessa circunferência, a reta móvel descreverá a superfície de um cone duplo. O ponto fixado é o vértice e o segmento de reta do vértice ao centro do círculo é o eixo... O círculo é a base do cone. "

(Boyer, 1996 p. 112)

Uma consequência dessa última contribuição foi que a hipérbole passou a ser vista como uma curva com dois ramos e não se tratava de duas hipérbolas independentes, como se pensava anteriormente. Veja figura a seguir:

Figura 7: Cone duplo e os dois ramos da hipérbole



Fonte: autoria própria

2.3 As Seções Cônicas Segundo Apolônio

Como vimos acima, Apolônio foi o primeiro geômetra a mostrar sistematicamente que **não é necessário tomar secções perpendiculares** a um elemento do cone e que é possível, **a partir de um único cone (acutângulo, retângulo ou obtusângulo), obter as três espécies de seções cônicas**, simplesmente variando a inclinação do plano de secção. Ele ainda mostrou que as propriedades dessas curvas não são diferentes conforme o cone utilizado seja reto ou oblíquo.

Em notação moderna, a definição de Apolônio para as Seções Cônicas pode ser vista da seguinte forma: primeiro corta-se um cone de ângulo do vértice θ qualquer por um plano através de seu eixo (Figura 8 a 10). O triângulo ΔVCD , intersecção do cone pelo plano, será chamado de **triângulo axial** do cone. Em seguida secciona-se o lado \overline{VC} do triângulo por um plano num ponto A , ($A \in \overline{VC}$ com $A \neq V$ e $A \neq C$) e chama o ângulo α , entre o plano de secção e o segmento \overline{AV} , de **ângulo de secção**. Assim, segundo Apolônio:

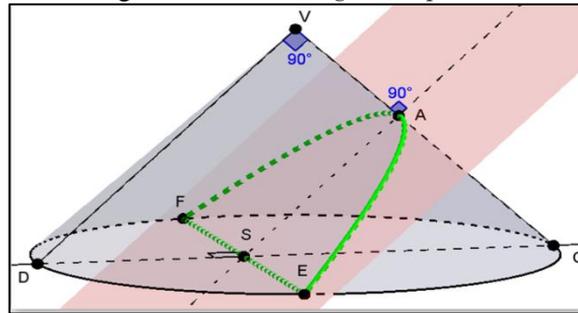
Definição 2.3.1: se $\theta = \alpha$, o plano é paralelo ao lado \overline{VC} , a secção é uma **PARÁBOLA** (Figura 8);

Definição 2.3.2: se $\theta < \alpha$, o plano secciona o lado \overline{VD} (ou seu prolongamento além de D), a secção é uma **ELIPSE** (Figura 9);

Definição 2.3.3: se $\theta > \alpha$, o plano secciona o prolongamento do lado \overline{VD} além de V , a secção é uma **HIPÉRBOLE** (Figura 10)

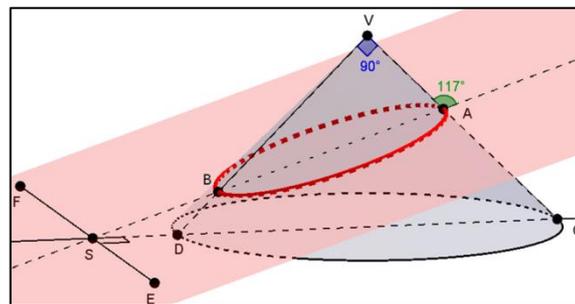
Veja as figuras a seguir:

Figura 8: Parábola segundo Apolônio



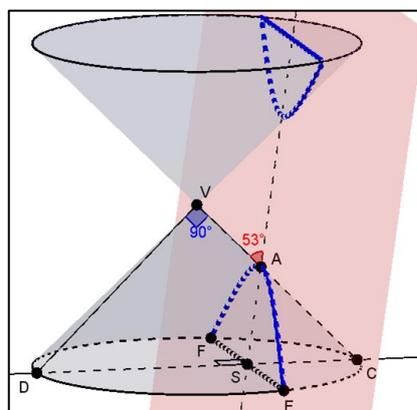
Fonte: autoria própria

Figura 9: Elipse segundo Apolônio



Fonte: autoria própria

Figura 10: Hipérbole segundo Apolônio



Fonte: autoria própria

Caso o ponto A coincidisse com o vértice V , isto é, o plano de secção passasse pelo vértice do cone teríamos as **Cônicas Degeneradas: Um Ponto**

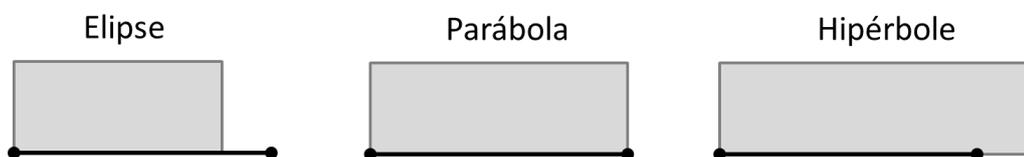
(quando $\theta < \alpha$, elipse degenerada), **Uma Reta** (quando $\theta = \alpha$, parábola degenerada) ou **Duas Retas concorrentes em V** (quando $\theta > \alpha$, hipérbole degenerada).

2.4 Por que Elipse, Parábola e Hipérbole?

Outro feito de Apolônio, também bastante notável, foi a utilização dos termos pitagóricos (utilizados para problemas de áreas) Elipse, Parábola e Hipérbole para designar as então Seções Cônicas. Durante um século e meio essas curvas apresentavam designações simples dadas pela forma na qual tinham sido descobertas - seção de cone acutângulo (oxythome), seção de cone retângulo (orthotome) e seção de cone obtusângulo (amblytome). Arquimedes ainda usava esses nomes, mas embora haja relatos de que ele usou o nome parábola como sinônimo para a seção do cone retângulo, foi Apolônio quem introduziu os nomes elipse e hipérbole para essas curvas (Boyer, 1996).

Provavelmente Apolônio tenha tirado esses nomes de uma terminologia pitagórica, usada na solução de equações quadráticas por aplicações de áreas. Quando os pitagóricos faziam a base de um retângulo ficar sobre um segmento retilíneo de modo que uma extremidade dessa base coincidisse com uma das extremidades do segmento, diziam que tinham um caso de elipse, parábola ou hipérbole conforme a referida base fosse menor do que o segmento, com ele coincidisse ou o excedesse (veja a Figura 11). Observamos que a razão dessas designações está na própria significação dos termos, pois elipse quer dizer falta, parábola, corresponde à igualdade e hipérbole exprime excesso.

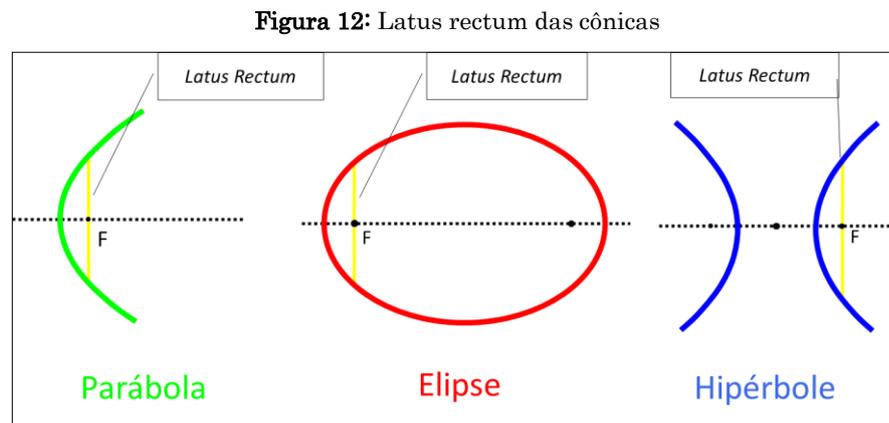
Figura 11: Definição dos nomes: elipse, parábola e hipérbole



Fonte: autoria própria

É certo que os gregos não exprimiam as seções cônicas como expressões algébricas. Mas Apolônio utilizava as relações entre segmentos de forma semelhante ao que fazemos hoje com as coordenadas de um ponto no plano.

Um desses segmentos já bastante conhecido de Apolônio era o *Latus rectum* da curva, que hoje pode ser definido como **o segmento que passa pelo foco², e é perpendicular ao eixo de simetria e tem extremos em pontos da curva.** Veja nas figuras abaixo o *latus rectum* das seções cônicas:

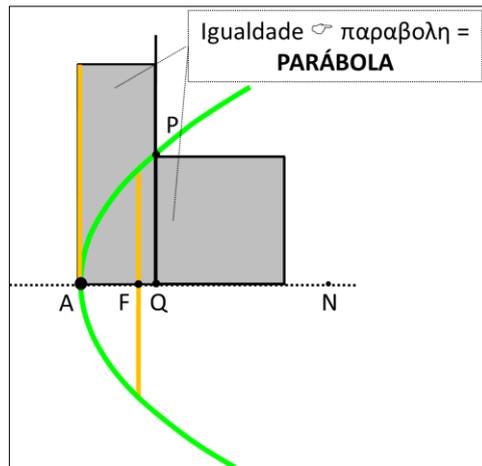


Fonte: autoria própria

Usando simbologia moderna, para justificar a escolha dos nomes Parábola, Elipse e Hipérbole, por Apolônio, vamos supor A o vértice de uma cônica, AN o eixo principal (eixo de simetria), P um ponto qualquer da curva e Q o pé da perpendicular à AN por P , conforme Figura 13 a Figura 15 abaixo.

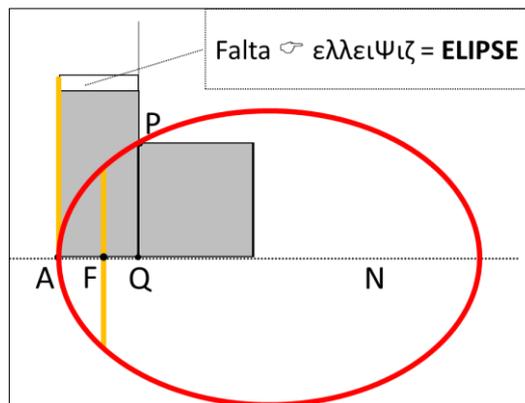
² Os gregos antigos, incluindo Apolônio, embora soubessem da existência do foco da cônica, não tinham um nome específico para esse ponto, o termo “foco” foi introduzido posteriormente por Johann Kepler (1571-1630).

Figura 13: Relação de igualdade na parábola



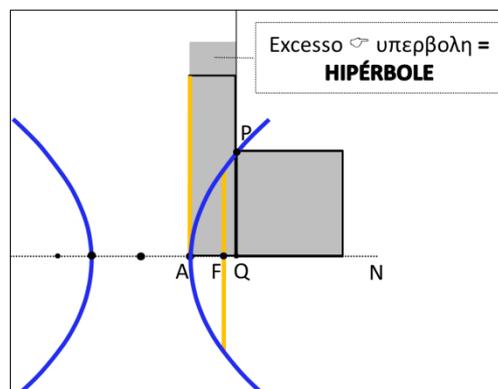
Fonte: autoria própria

Figura 14: Relação de falta na elipse



Fonte: autoria própria

Figura 15: Relação de excesso na hipérbole



Fonte: autoria própria

Por A traça-se um segmento perpendicular à AN de medida igual ao *latus rectum* da curva. Constrói-se um retângulo de base AQ e altura igual ao *latus rectum*. Constrói-se sobre o segmento PQ um quadrado de lado igual a esse segmento. As áreas em cinza claro na Figura 13, na Figura 14, e na Figura 15 são iguais.

Apolônio percebeu que para a *orthotome* qualquer que fosse o ponto P da curva, a área do quadrado de lado PQ é sempre igual à área do retângulo de base AQ e altura igual ao *latus rectum*, por isso passou a chamar esta curva de PARÁBOLA, que significa igualdade. Já nos casos da *oxythome* e *amblythome* a área do quadrado de lado AQ é, respectivamente, menor e maior, que a área do retângulo de base AQ e altura igual ao *latus rectum* da curva, justificando, portanto, os nomes ELIPSE (falta) para a primeira e HIPÉRBOLÉ (excesso) para a segunda.

3 Cônicas como lugar geométrico no plano

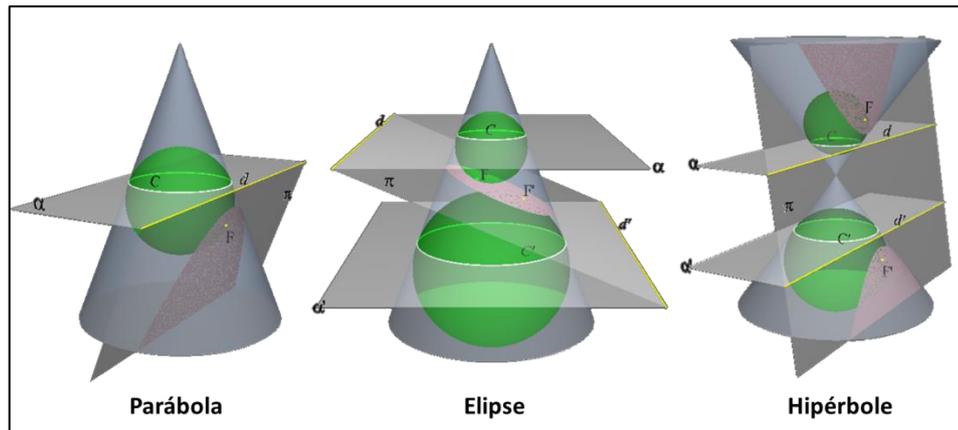
Neste capítulo focalizamos o estudo das seções cônicas seguindo de perto o trabalho apresentado em 1822 pelo matemático belga G. P. Dandelin, abordando o tratamento dado a essas curvas por Apolônio ($\pm 262-190$ a.C.) e deduzindo suas propriedades focais por meio da Geometria Euclidiana sintética. Procuraremos redefinir as seções cônicas como curvas do plano cujos pontos satisfazem determinadas propriedades. Essas novas definições de cônicas serão importantes para o estudo mais detalhado, abrangendo suas propriedades, equações e aplicações que faremos mais adiante neste trabalho.

3.1 Esferas de Dandelin

Vimos no capítulo 2 que, de acordo com as descobertas de Apolônio, uma secção C de um cone K por um plano π será uma Elipse, Parábola ou Hipérbole, conforme o ângulo de secção do plano π com a geratriz seccionada, seja maior, igual ou menor que o ângulo do vértice do cone K .

Vamos mostrar que essas seções cônicas possuem certas propriedades que nos permitirão redefini-las e interpretá-las como Lugar Geométrico (LG) dos pontos do plano que satisfazem essas propriedades. A demonstração é baseada nas descobertas de 1822 do matemático belga G. P. Dandelin. Suas descobertas comprovam que, dado um cone K e um plano de secção π , não contendo o vértice do cone, existe uma ou duas superfícies esféricas S_1 e S_2 que se inscrevem no cone K ao longo de círculos c_1 e c_2 e são tangentes ao Plano π nos pontos F_1 e F_2 , as quais ficaram conhecidas como **Esferas de Dandelin**. Se a secção cônica é uma **elipse** ou **hipérbole**, então temos **duas superfícies esféricas** tangentes ao cone e ao plano; se a secção cônica é uma **parábola**, então temos **apenas uma superfície esférica** tangente. Veja a Figura 16 a seguir:

Figura 16: Esferas de Dandelin



Fonte: http://commons.wikimedia.org/wiki/Main_Page

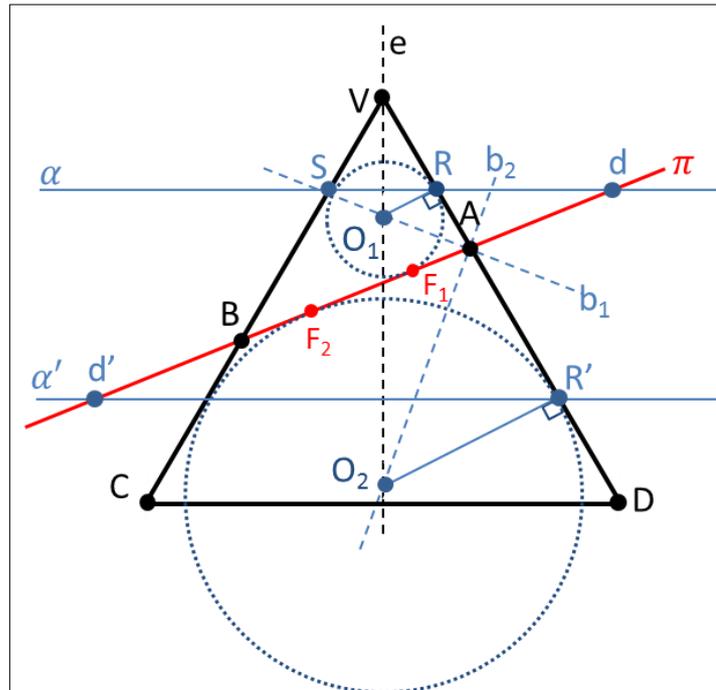
Será feita a comprovação da existência das Esferas de Dandelin para o caso em que a curva de secção é uma Elipse. Nos casos em que a curva é uma Parábola ou Hipérbole, o procedimento é semelhante ao que será mostrado para a elipse, deixaremos, portanto, apenas as imagens que auxiliam esse processo (

Figura 19 e Figura 20).

Seja um cone reto K de eixo de simetria e . Passe por K um plano contendo e e então tome o triângulo axial ΔVCD do cone, conforme Figura 17 a seguir. Tome um plano π secante ao lado \overline{VD} do triângulo sobre um ângulo de secção maior que o ângulo do vértice $C\hat{V}D$ do cone, isto é, o plano π interceptará os lados \overline{VD} e \overline{VC} (ou seu prolongamento) do triângulo axial respectivamente nos pontos A e B , sendo a curva de secção assim obtida, pela definição 2.3.2, uma Elipse. Trace a bissetriz b_1 do ângulo $V\hat{A}B$ e marque o ponto O_1 , intersecção de b_1 com o eixo e do cone. Trace uma reta passando por O_1 e perpendicular ao lado \overline{VD} do triângulo e marque o ponto R sobre a intersecção da perpendicular com \overline{VD} . Trace agora a circunferência C_1 de centro O_1 e raio igual ao segmento $\overline{O_1R}$. Essa circunferência tangencia o plano π no ponto F_1 e os lados \overline{VC} e \overline{VD} do triângulo sobre os pontos S e R , respectivamente. Isso se conclui do fato de e e b_1 serem bissetrizes dos ângulos $C\hat{V}D$ e $V\hat{A}B$, respectivamente. Portanto, o ponto O_1 , intersecção das duas bissetrizes, tem distância $\overline{O_1R}$ dos lados do triângulo axial do cone e do plano π . Suponha agora que a circunferência C_1 gire em torno do eixo e , temos a Esfera S_1 de Dandelin tangente ao cone K sobre uma circunferência c_1 e ao plano π no

ponto F_1 . De forma análoga, trace a bissetriz b_2 do ângulo $B\hat{A}D$ e marque o ponto O_2 , interseção de b_2 com e , que será o centro da Esfera S_2 de Dandelin, tangente ao cone K sobre uma circunferência c_2 e ao plano π no ponto F_2 .

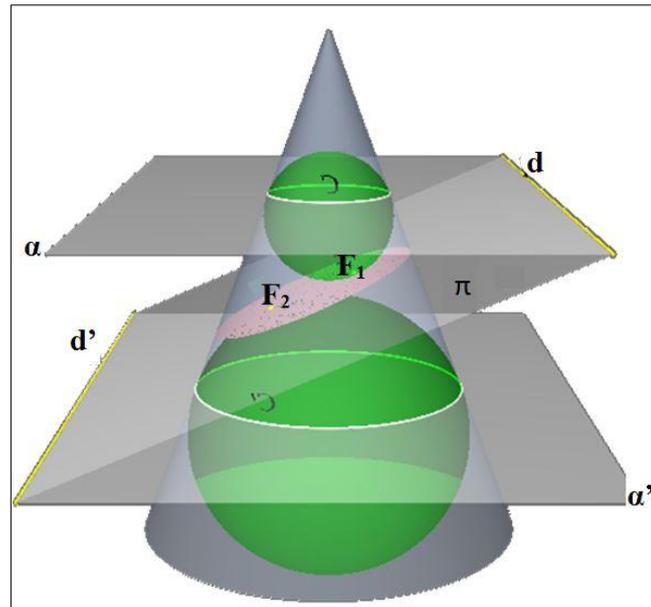
Figura 17: Elipse e as Esferas de Dandelin



Fonte: autoria própria

Portanto, analisando a figura acima sobre o aspecto tridimensional, a curva de secção é uma elipse, as circunferências C_1 e C_2 girando em torno do eixo e formam as esferas S_1 e S_2 de Dandelin, que são tangentes ao cone K sobre círculos c_1 e c_2 e ao plano π nos pontos F_1 e F_2 , chamados de **Focos** da Elipse. Traçando planos α e α' paralelos ao plano da base do cone e que contém os círculos c_1 e c_2 , respectivamente, e tomando as interseções desses planos com o plano π , temos as retas d e d' , chamadas **Diretrizes** da cônica. Veja a imagem a seguir:

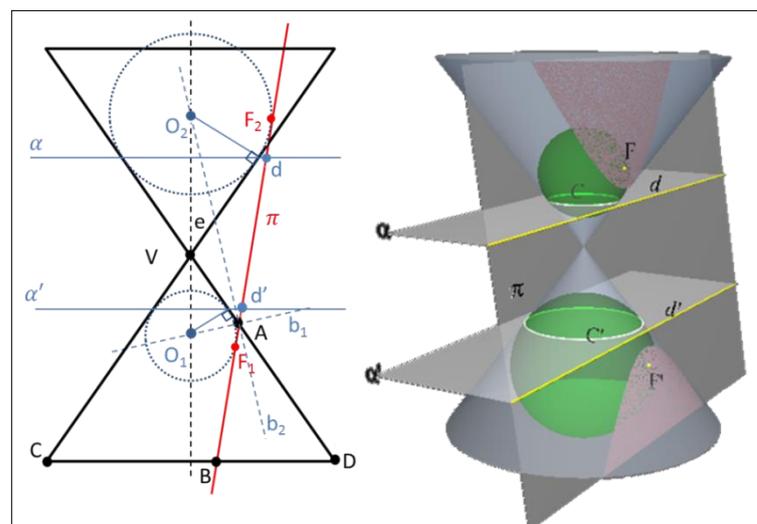
Figura 18: Esferas de Dandelin na elipse



Fonte: http://commons.wikimedia.org/wiki/Main_Page

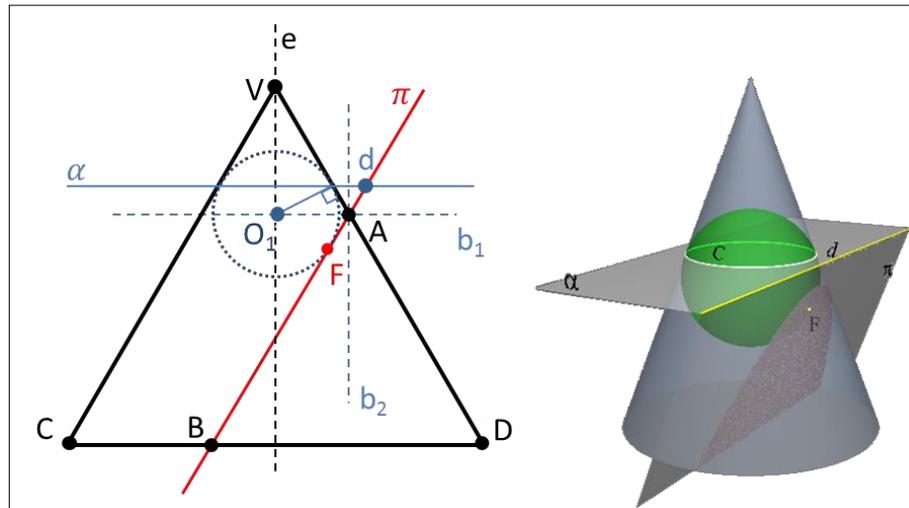
De maneira análoga ao que foi feito para o caso da Elipse, pode-se demonstrar que no caso da **Hipérbole**, existem **duas Esferas de Dandelin** e consequentemente a curva possui **dois focos** e **duas retas diretrizes**. Já no caso da **Parábola**, existe apenas **uma Esfera de Dandelin**, o que determina que a curva possua apenas **um foco** e **uma reta diretriz**. Veja as imagens a seguir:

Figura 19: Esferas de Dandelin para o caso da hipérbole



Fonte: autoria própria

Figura 20: Esferas de Dandelin no caso da parábola



Fonte: autoria própria

Note que para a parábola a bissetriz b_2 é paralela ao eixo e e, portanto não há o ponto O_2 interseção desses dois elementos, como acontece para a elipse e a hipérbole.

Resumindo o que foi exposto acima, temos:

- FOCO DA CÔNICA: são os pontos onde as esferas de Dandelin tocam o plano de secção do cone.
- DIRETRIZES DA CÔNICA: são as retas resultantes da intersecção do plano de secção do cone com os planos que contém os círculos de intersecção das Esferas de Dandelin com a superfície lateral do cone.
- ELIPSE: possui dois focos e duas diretrizes (salvo o caso particular da circunferência que possui único foco e nenhuma diretriz.)
- PARÁBOLA: possui um foco e uma diretriz.
- HIPÉRBOLE: possui dois focos e duas diretrizes.

Na próxima seção será mostrado, por meio das Esferas de Dandelin, que existe uma relação de distância constante entre os focos e as diretrizes das cônicas, específica para cada curva, o que nos permitirá redefini-las como lugar geométrico do plano, possibilitando-nos assim abandonar por hora o cone e a visão espacial de cônicas, focando no estudo planificado dessas curvas e suas

propriedades analíticas, bem como, na descoberta de novos elementos e suas relações com o formato da curva.

3.2 Cônicas como Lugar Geométrico no Plano

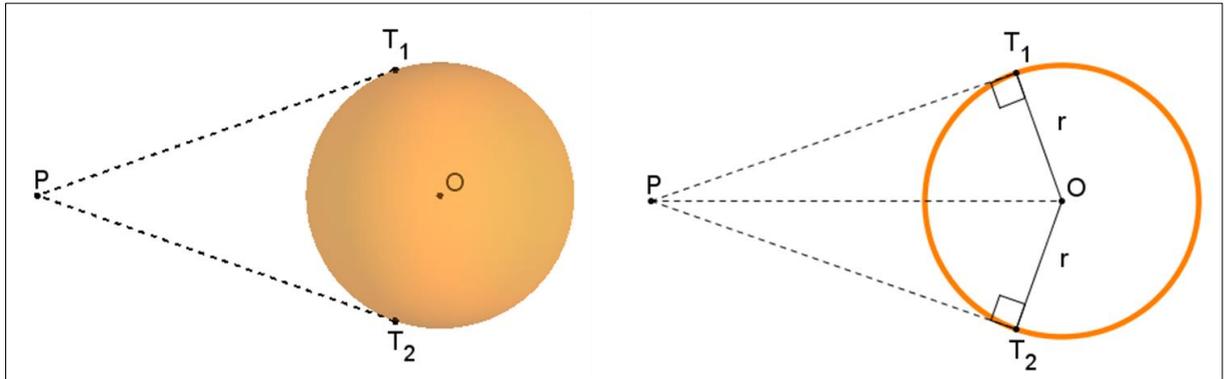
As seções cônicas quando analisadas sobre um plano, podem ser definidas como o lugar geométrico dos pontos deste plano que satisfazem determinada propriedade. Vejamos qual é essa propriedade para cada uma das curvas e logo em seguida faremos as respectivas demonstrações:

- **Propriedade 1:** Numa ELIPSE a soma das distâncias de qualquer um de seus pontos aos seus focos é constante.
- **Propriedade 2:** Numa PARÁBOLA a distância de qualquer um de seus pontos ao foco é igual à distância desse ponto à diretriz.
- **Propriedade 3:** Numa HIPÉRBOLA o módulo da diferença das distâncias de qualquer um de seus pontos aos seus focos é constante.

Para provar essas propriedades, utilizaremos os seguintes resultados:

- **Resultado 1:** Se P é um ponto exterior a uma superfície esférica $S(O, r)$ de centro O e raio r , e os segmentos $\overline{PT_1}$ e $\overline{PT_2}$ são tangentes à superfície S em T_1 e T_2 , respectivamente, então $\overline{PT_1} = \overline{PT_2}$.

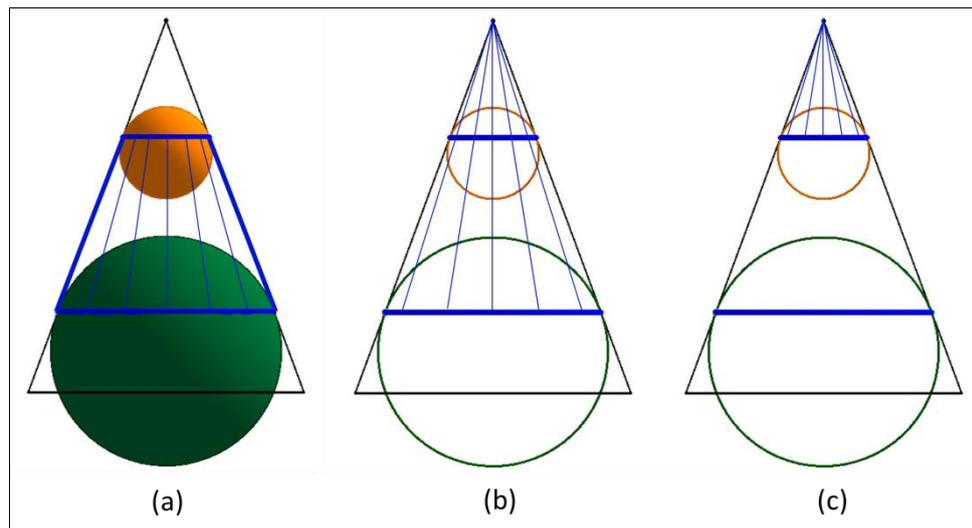
PROVA: Na Figura 21, note que os triângulos ΔPOT_1 e ΔPOT_2 são congruentes, pois são retângulos e possuem dois lados iguais, \overline{PO} e $\overline{OT_1} = \overline{OT_2} = r$. Portanto, $\overline{PT_1} = \overline{PT_2}$.

Figura 21: Segmentos tangentes a uma esfera

Fonte: autoria própria

► **Resultado 2:** As geratrizes de um tronco de cone reto (eixo perpendicular à base) são todas iguais.

PROVA: Da análise da Figura 22 abaixo, perceba que as geratrizes do tronco de cone reto em (a) são obtidas da subtração das geratrizes do cone médio em (b) pelas geratrizes do cone pequeno em (c). Como, pelo **Resultado 1**, as geratrizes dos cones em (b) e (c) são todas iguais, então as geratrizes do tronco (a) também são iguais. Isso prova o resultado 2.

Figura 22: Igualdade das geratrizes de um tronco de cone

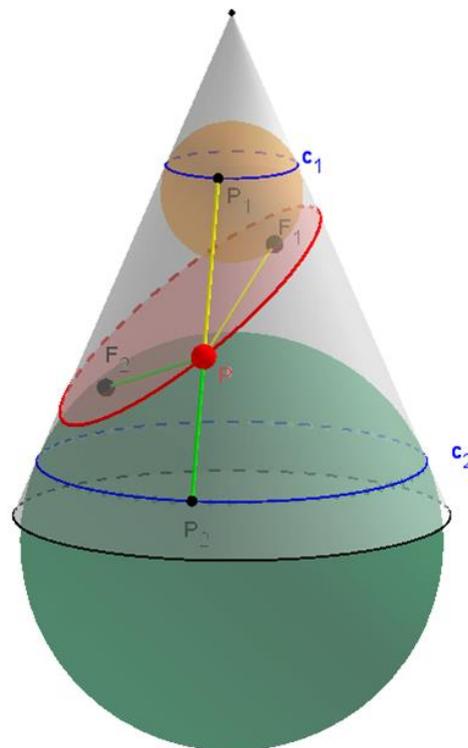
Fonte: autoria própria

Agora estamos prontos para provar as Propriedades 1 a 3 feitas no início desta seção. Utilizaremos, para tanto, os resultados 1 e 2 anterior, alguns argumentos geométricos e as Esferas de Dandelin.

□ PROVA DA PROPRIEDADE 1:

Veja a figura a seguir:

Figura 23: Elipse e seus focos



Fonte: autoria própria

Na Figura 23 identifique os seguintes elementos:

K → um cone reto;

π → plano de secção do cone K ;

C → elipse, curva de secção do cone K pelo plano π ;

P → ponto qualquer da elipse;

S_1 e S_2 → Esferas de Dandelin, nas cores amarela e verde, respectivamente;

c_1 e c_2 → círculos de intersecção das esferas com o cone;

F_1 e F_2 → focos da elipse;

P_1 e $P_2 \rightarrow$ intersecção de uma geratriz do cone passando por P , com os círculos c_1 e c_2 .

Como P é exterior às esferas, $\overline{PF_1}$ e $\overline{PF_2}$ pertencem ao plano de secção tangente às esferas e $\overline{PP_1}$ e $\overline{PP_2}$ pertencem à superfície do cone tangente às esferas, então:

1. Sendo $\overline{PF_1}$ e $\overline{PP_1}$ tangentes à esfera S_1 , então pelo Resultado 1,

$$\overline{PF_1} = \overline{PP_1} \quad (10)$$

2. Sendo $\overline{PF_2}$ e $\overline{PP_2}$ tangentes à esfera S_2 , então pelo Resultado 1,

$$\overline{PF_2} = \overline{PP_2} \quad (11)$$

3. Somando membro a membro (10) e (11), temos que:

$$\overline{PF_1} + \overline{PF_2} = \overline{PP_1} + \overline{PP_2} \quad (12)$$

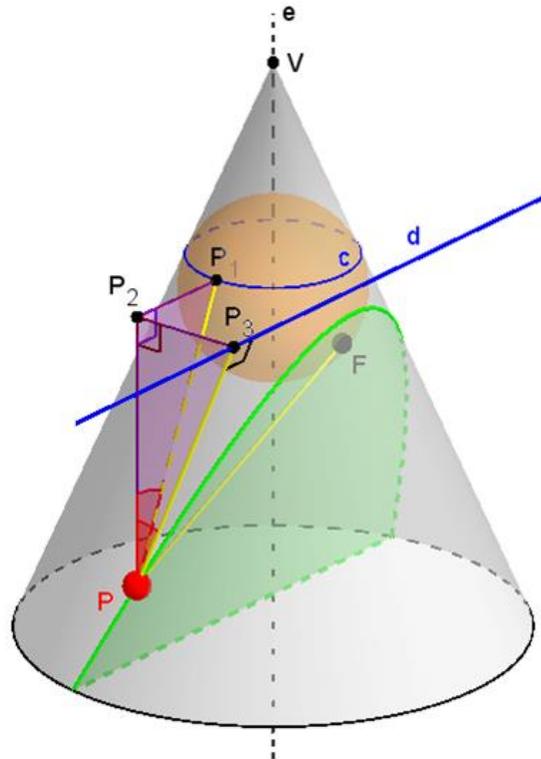
4. Como o segundo membro é a geratriz do tronco de cone T de círculos de base c_1 e c_2 , então, pelo Resultado 2,

$$\boxed{\overline{PF_1} + \overline{PF_2} = \text{geratriz de } T = \text{constante}} \quad (13)$$

5. Como P é um ponto qualquer da Elipse, essa conclusão prova a Propriedade 1.

- PROVA DA PROPRIEDADE 2:
Veja a figura a seguir:

Figura 24: Parábola com foco e diretriz



Fonte: autoria própria

Na Figura 24 identifique os seguintes elementos:

- K → um cone reto;
- e → eixo do cone;
- π → plano de secção do cone K ;
- C → parábola, curva de secção do cone K pelo plano π ;
- P → ponto qualquer da parábola;
- F → foco da parábola;
- V → vértice do cone;
- S → Esfera de Dandelin;
- c → círculos de intersecção da Esfera de Dandelin com o cone;
- d → diretriz da parábola;
- P_1 → intersecção da geratriz do cone que contém P , com o círculo c ;

$P_2 \rightarrow$ projeção do ponto P sobre o plano que contém o círculo c ;

$P_3 \rightarrow$ pé da perpendicular baixada de P à reta diretriz d .

Como P é exterior à esfera S , \overline{PF} pertence ao plano de secção π , que é tangente à esfera, e $\overline{PP_1}$ pertence à superfície do cone tangente à esfera, então \overline{PF} e $\overline{PP_1}$ são tangentes à esfera S , logo pelo Resultado 1,

$$\overline{PF} = \overline{PP_1} \quad (14)$$

Como os triângulos ΔPP_1P_2 e ΔPP_2P_3 são congruentes (verifique a Figura 25, no final desta prova), então:

$$\overline{PP_1} = \overline{PP_3} \quad (15)$$

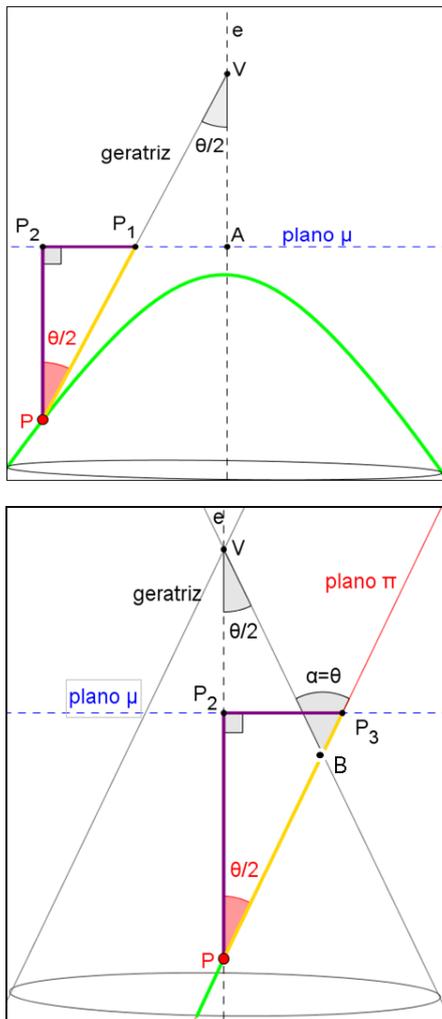
Como P_3 é o pé da perpendicular à diretriz d traçada por P , então o segmento $\overline{PP_3}$ representa a distância de P a d , e portanto, de (14) e (15), temos que:

$$\boxed{\overline{PF} = \overline{PP_3} = \text{distância de } P \text{ à diretriz } d} \quad (16)$$

Como P é um ponto qualquer da Parábola, essa conclusão prova a Propriedade 2.

A seguir, na Figura 25, segue a prova da congruência dos triângulos ΔPP_1P_2 e ΔPP_2P_3 , fato que foi utilizado na prova da afirmação 2 acima. Para a prova, considere os seguintes elementos adicionais: φ o plano que contém o eixo do cone e passa por P , μ o plano que contém o círculo c , θ o ângulo do vértice do cone, α o ângulo de secção do plano π , β o ângulo que o plano π faz com o eixo do cone.

Figura 25: Prova da congruência dos triângulos ΔPP_1P_2 e ΔPP_2P_3



Vamos provar que ΔPP_1P_2 e ΔPP_2P_3 são congruentes.

Na primeira figura:

Da definição de ângulos alternos internos, temos que:

$$\angle P_1VA = \angle P_1PP_2 = \frac{\theta}{2}$$

Na segunda figura:

Sendo a secção uma Parábola, então necessariamente o ângulo de secção α é igual ao ângulo do vértice do cone, isto é,

$$\alpha = \theta$$

Usando o teorema do ângulo externo no triângulo ΔBVP , temos que:

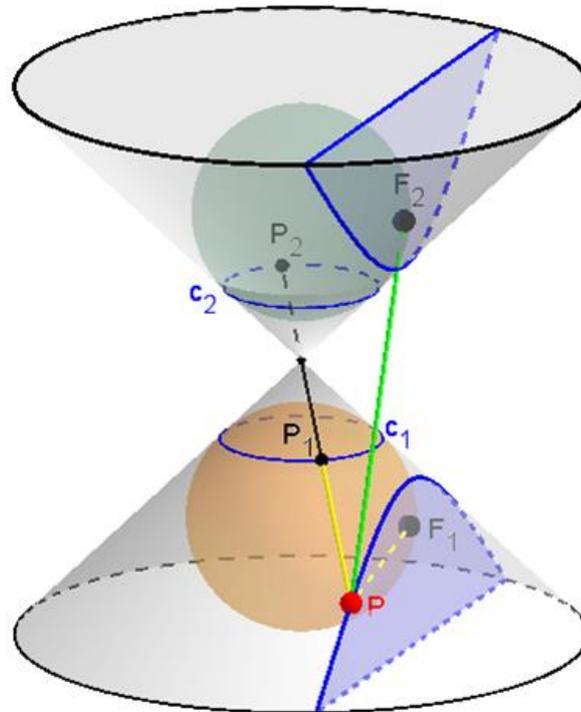
$$\begin{aligned} \alpha = \theta &= (\angle BVP + \angle BPV) \\ \Rightarrow \theta &= \left(\frac{\theta}{2} + \angle BPV \right) \\ \Rightarrow \angle BPV &= \frac{\theta}{2} \end{aligned}$$

Como o lado PP_2 é comum aos triângulos ΔPP_1P_2 e ΔPP_2P_3 e estes ainda possuem dois ângulos iguais, então **são congruentes pelo caso ALA**. Como queríamos demonstrar.

Fonte: autoria própria

- PROVA DA PROPRIEDADE 3:
Veja a figura a seguir:

Figura 26: Hipérbole e seus focos



Fonte: autoria própria

Na Figura 26 identifique os seguintes elementos:

K → um cone reto;

π → plano de secção do cone K ;

C → Hipérbole, curva de secção do cone K pelo plano π ;

P → ponto qualquer da hipérbole;

S_1 e S_2 → Esferas de Dandelin, amarela e verde, respectivamente;

c_1 e c_2 → círculos de intersecção das esferas com o cone;

F_1 e F_2 → focos da hipérbole;

P_1 e P_2 → intersecção da geratriz do cone passando por P , com os círculos c_1 e c_2 .

Como P é exterior às esferas, $\overline{PF_1}$ e $\overline{PF_2}$ pertencem ao plano de secção tangente às esferas e $\overline{PP_1}$ e $\overline{PP_2}$ pertencem à superfície do cone tangente às esferas, então:

1. Como $\overline{PF_1}$ e $\overline{PP_1}$ são tangentes à esfera S_1 , então pelo Resultado 1,

$$\overline{PF_1} = \overline{PP_1} \quad (17)$$

2. Como $\overline{PF_2}$ e $\overline{PP_2}$ são tangentes à esfera S_2 , então pelo Resultado 1,

$$\overline{PF_2} = \overline{PP_2} \quad (18)$$

3. Subtraindo membro a membro (17) e (18) e tomando o módulo, temos que:

$$|\overline{PF_1} - \overline{PF_2}| = |\overline{PP_1} - \overline{PP_2}| \quad (19)$$

4. Como o segundo membro de (19) é o comprimento da geratriz do cone duplo K' de vértice V e círculos de base c_1 e c_2 , então, $|\overline{PP_1} - \overline{PP_2}|$ é uma constante. Logo:

$$\boxed{|\overline{PF_1} - \overline{PF_2}| = \text{geratriz de } K' = \text{constante}} \quad (20)$$

5. Como P é um ponto qualquer da Hipérbole, essa conclusão prova a Propriedade 3.

Dado, portanto, que as Propriedades 1 a 3 enunciadas no início desta seção sobre as cônicas, são verdadeiras, então, com base nessas propriedades podemos enunciar uma nova definição para cada uma das curvas. Vejamos:

Definição 3.1: ELIPSE

Dados dois pontos fixos F_1 e F_2 no plano, com $d(F_1, F_2) = 2c$, $c > 0$, dizemos que a Elipse, de focos F_1 e F_2 é o lugar geométrico dos pontos P do plano, tais que:

$$\boxed{\overline{PF_1} + \overline{PF_2} = 2a} \quad (21)$$

Onde a é uma constante e $a > c$.

Definição 3.2: PARÁBOLA

Dados uma reta d e um ponto fixo F , com F não pertencente a d , dizemos que a Parábola, de foco F e diretriz d é o lugar geométrico dos pontos P do plano, tais que:

$$\boxed{d(P, F) = d(P, d)} \quad (22)$$

Definição 3.3: HIPÉRBOLE

Dados dois pontos fixos F_1 e F_2 do plano, com $d(F_1, F_2) = 2c$, $c > 0$, dizemos que a Hipérbole, de focos F_1 e F_2 é o lugar geométrico dos pontos P do plano, tais que:

$$\boxed{|\overline{PF_1} - \overline{PF_2}| = 2a} \quad (23)$$

Onde a é uma constante e $0 < a < c$.

No caso da Elipse e Hipérbole essas definições são conhecidas como "**Definição pela propriedade bifocal**". No caso da Parábola, essa definição é conhecida como "**Definição via foco e diretriz**" o que também pode ser feito para a elipse e a hipérbole, haja vista essas curvas também possuem foco e diretriz. Na subseção 3.3, veremos como podem ser definidas a Elipse e a Hipérbole segundo a distância foco-diretriz e então apresentaremos o importante conceito de

Excentricidade das seções cônicas. Por hora, vamos utilizar as definições 3.1 a 3.3 para examinar as cônicas no plano.

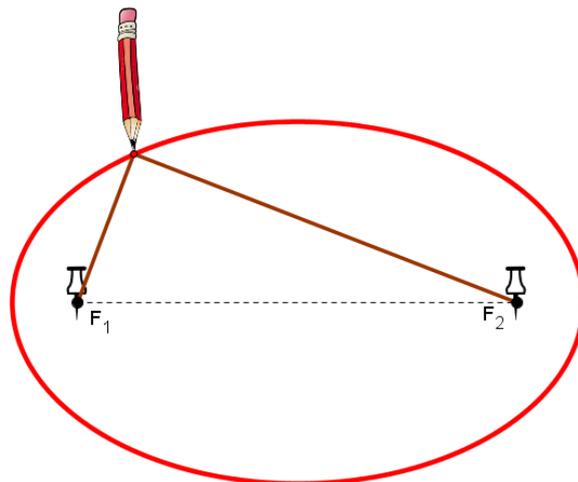
Com base nessas novas definições para as Seções Cônicas, podemos agora desenhá-las no plano quando conhecidos alguns de seus elementos, como os focos e o valor da constante a para o caso da Elipse e Hipérbole, ou o foco e a diretriz, para a parábola.

A seguir mostraremos como podemos traçar mecanicamente a Elipse, a Parábola e a Hipérbole no plano a partir das definições usuais 3.1 a 3.3. Esse processo é conhecido como “**Método do Jardineiro**”.

Para traçar uma Elipse no plano siga os seguintes passos (Figura 27):

- 1° - Fixe dois pontos no plano (serão os focos da elipse);
- 2° - Tome uma corda de comprimento maior que a distância focal e fixe suas extremidades nos focos;
- 3° - Com a ponta de um lápis estique a corda e movimente-o em torno dos focos com a corda sempre esticada.

Figura 27: Desenhando elipse no plano



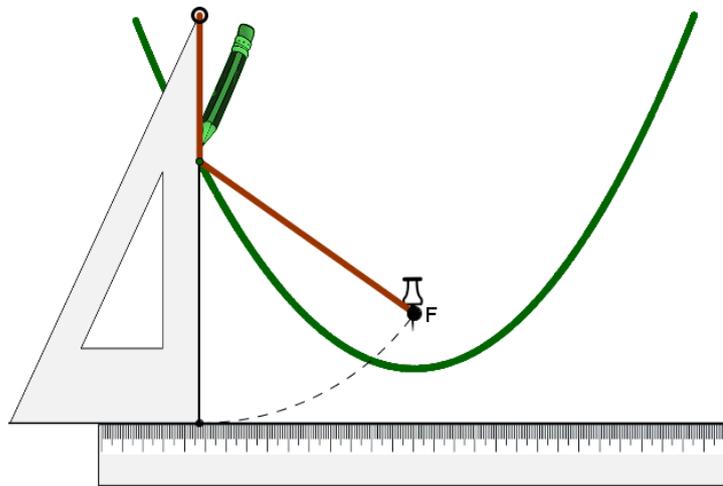
Fonte: autoria própria

Perceba que qualquer ponto da curva traçada mantém a soma das distâncias aos focos constante e igual ao comprimento da corda. Portanto, trata-se de uma Elipse de focos nos pontos fixos escolhidos e constante $2a$ igual ao comprimento da corda.

Para traçar uma Parábola no plano siga os seguintes passos (Figura 28):

- 1° - Fixe uma régua (diretriz) e um ponto que será o foco (F) da parábola;
- 2° - Tome um esquadro e uma corda de comprimento igual ao cateto maior do esquadro. Fixe a corda na extremidade de menor ângulo do esquadro e no foco;
- 3° - Com um lápis prenda a corda no lado do esquadro e movimente-o com a corda sempre esticada.

Figura 28: Desenhando parábola no plano



Fonte: autoria própria

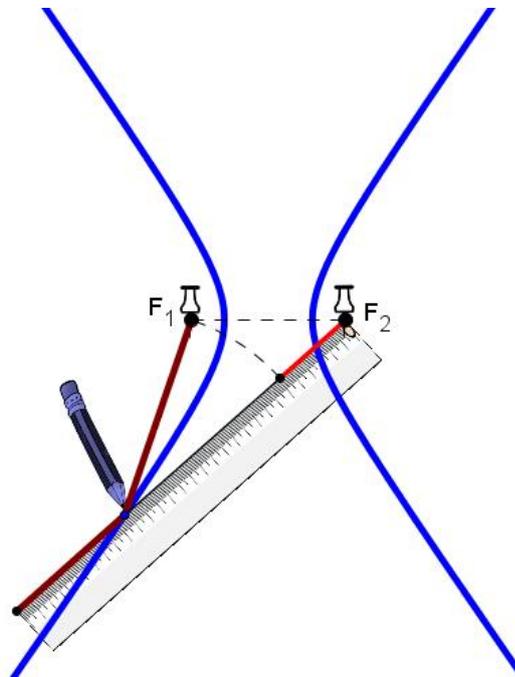
Perceba que qualquer ponto da curva traçada é equidistante à régua e ao ponto fixo, foco. Portanto, trata-se de uma parábola de foco no ponto fixo F escolhido e diretriz a reta que contém o lado da régua fixa em contato com o esquadro.

Para traçar uma Hipérbole no plano siga os seguintes passos (Figura 29):

- 1° - Fixe dois pontos no plano (serão os focos da hipérbole);
- 2° - Tome uma régua e uma corda de comprimento menor que a régua. Fixe a corda numa extremidade da régua e em um dos pontos fixos (foco F_1);
- 4° - Fixe a ponta livre da régua no outro ponto fixo (foco F_2);

5° - Com um lápis, prenda a corda sobre a régua e gire-a em torno do ponto fixo mantendo a corda sempre esticada.

Figura 29: Desenhando hipérbole no plano



Fonte: autoria própria

Perceba que qualquer ponto da curva traçada mantém o módulo da diferença das distâncias aos focos constante e igual ao comprimento da régua menos o da corda. Portanto, trata-se de um ramo de Hipérbole de focos nos pontos fixos escolhidos e constante $2a$ igual à diferença entre o comprimento da régua e da corda. Para desenhar o outro ramo da hipérbole, basta alternar os pontos fixos onde estão presas a corda e a régua.

3.3 Distância Foco-Diretriz e Excentricidade

Vimos nas seções anteriores que as cônicas, a menos do caso da circunferência (caso particular de elipse), possuem uma ou duas retas diretrizes. Vimos ainda, que no caso da parábola, dados uma reta fixa (diretriz) e um ponto fixo não pertencente à reta (Foco), podemos defini-la como o lugar geométrico dos pontos do plano que são equidistantes à reta e ao ponto. Veremos agora que a Elipse e Hipérbole também podem ser definidas com base na distância de seus pontos a um dos focos e à diretriz correspondente. Para isso, definiremos o importante conceito de **Excentricidade** das Seções Cônicas. Vejamos:

Definição 3.4 - (Excentricidade): dados uma seção cônica C de foco F e diretriz correspondente d e um ponto P qualquer da cônica, definimos como excentricidade (e) da seção cônica a relação:

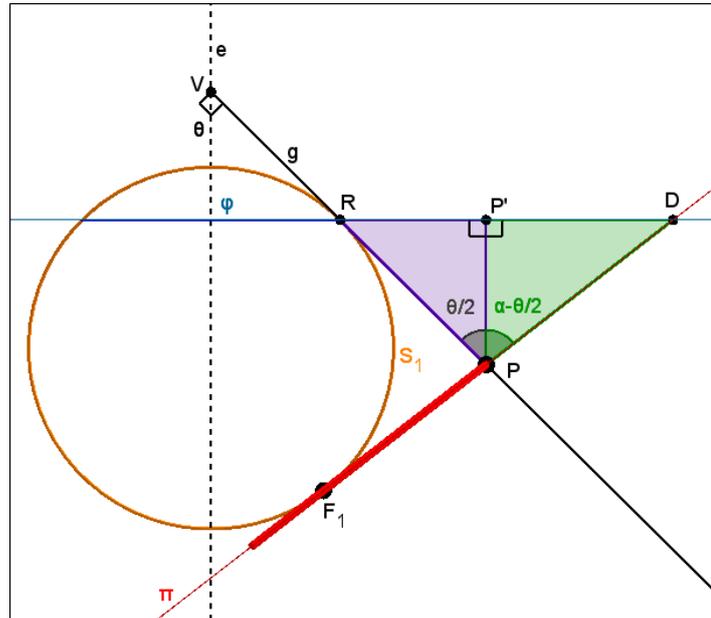
$$e = \frac{d(P, F)}{d(P, d)} \quad (24)$$

onde $d(P, F)$ e $d(P, d)$ representam às distâncias de P ao ponto F e à reta d , respectivamente.

Da definição 3.2 de parábola e da definição 3.4 de excentricidade, é imediato que a **excentricidade da parábola é igual a 1**, visto que, nessa curva a distância de um ponto ao foco é igual à distância à reta diretriz. Mas, quanto à Elipse e a Hipérbole? O que podemos afirmar sobre suas excentricidades?

Vamos tentar responder a essa pergunta. Analise a seguinte figura:

Figura 30: Excentricidade da cônica



Fonte: autoria própria

Identifique na figura acima os seguintes elementos:

- um cone K de eixo e , vértice V , geratriz g e ângulo do vértice θ ;
- um plano de secção π que faz um ângulo α ($\alpha = \widehat{VPD}$) com a geratriz do cone;
- uma Esfera de Dandelin S_1 tangente ao plano π em F_1 e ao cone K no círculo c_1 ;
- um plano φ paralelo à base do cone e que contém o círculo c_1 ;
- uma seção cônica C de foco F_1 e geratriz correspondente d (intersecção dos planos π e φ).

Seja ainda P um ponto qualquer da curva C . Trace por P a perpendicular ao plano φ e marque o ponto P' , pé da perpendicular. Trace ainda por P a perpendicular à diretriz d e marque o ponto D . Trace ainda por P a geratriz g e marque o ponto R , intersecção de g com o círculo c_1 .

Como $\overline{PP'}$ é paralelo ao eixo e , então o ângulo $\widehat{P'PR}$ é igual ao ângulo entre a geratriz g e o eixo e . Logo $\widehat{P'PR} = \frac{\theta}{2}$.

Como $\alpha = V\hat{P}D = P'\hat{P}R + D\hat{P}P' \Rightarrow D\hat{P}P' = \alpha - P'\hat{P}R$, isto é: $D\hat{P}P' = (\alpha - \frac{\theta}{2})$.

Como P é exterior à S_1 e \overline{PF} e \overline{PR} são tangentes à S_1 em F_1 e R respectivamente, então $\overline{PF} = \overline{PR}$. Logo, a excentricidade da curva C é dada por,

$$e = \frac{d(P, F)}{d(P, d)} = \frac{d(P, R)}{d(P, D)} = \frac{\frac{\overline{PP'}}{|\cos(P'\hat{P}R)|}}{\frac{\overline{PP'}}{|\cos(D\hat{P}P')|}} \quad (25)$$

Simplificando e fazendo as substituições devidas, temos:

$$e = \left| \frac{\cos\left(\alpha - \frac{\theta}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)} \right| \quad (26)$$

Note que, sendo θ o ângulo do vértice do cone e como α pode ser considerado ângulo entre duas retas (ou planos) não coincidentes (caso em que teríamos cônicas generalizadas), então, sempre teremos:

$$0 < \theta, \alpha < \pi \quad (27)$$

Ora, vimos no Capítulo 2 que, de acordo com Apolônio, se a seção cônica C é uma:

- ELIPSE, então:

$$\begin{aligned} \theta < \alpha \Rightarrow \frac{\theta}{2} < \alpha - \frac{\theta}{2} \Rightarrow \cos\left(\alpha - \frac{\theta}{2}\right) < \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \Rightarrow \frac{\cos\left(\alpha - \frac{\theta}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)} < 1 \\ \Rightarrow \boxed{0 < e < 1} \end{aligned} \quad (28)$$

- PARÁBOLA, então:

$$\begin{aligned} \theta = \alpha \Rightarrow \alpha - \frac{\theta}{2} = \frac{\theta}{2} \Rightarrow \cos\left(\alpha - \frac{\theta}{2}\right) = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \Rightarrow \frac{\cos\left(\alpha - \frac{\theta}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)} = 1 \\ \Rightarrow \boxed{e = 1} \end{aligned} \quad (29)$$

- **HIPÉRBOLE**, então:

$$\begin{aligned} \theta > \alpha &\Rightarrow \frac{\theta}{2} > \alpha - \frac{\theta}{2} \Rightarrow \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) < \cos\left(\alpha - \frac{\theta}{2}\right) \Rightarrow 1 < \frac{\cos\left(\alpha - \frac{\theta}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)} \\ &\Rightarrow \boxed{1 < e} \end{aligned} \quad (30)$$

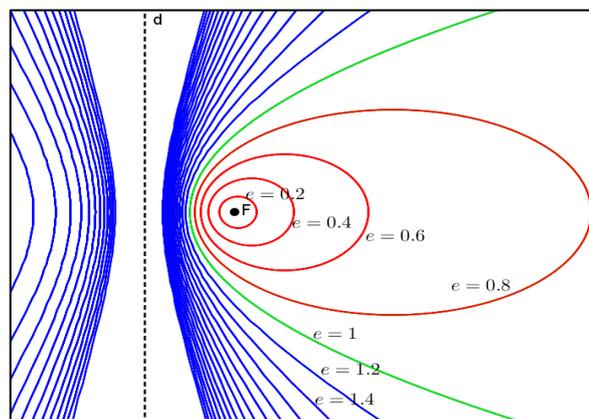
Note que, sendo $0 < \theta < \pi$ então $0 < \frac{\theta}{2} < \frac{\pi}{2}$, isto é, sempre teremos $\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) > 0$, o que nos permite dividir as inequações acima por $\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$ sem invertermos o sinal das inequações.

Com base nas conclusões (28), (29) e (30), podemos redefinir as seções cônicas segundo a excentricidade, da seguinte forma:

Definição 3.5 – foco-diretriz: Dado uma reta fixa d , um ponto fixo F não pertencente à d e um número positivo e , denomina-se cônica o lugar geométrico dos pontos do plano cuja razão entre as distâncias a F e a reta d é constante e igual a e . O ponto fixo F é chamado de **foco**, a reta fixa d de **diretriz** e a razão constante e de **excentricidade** da cônica. Quando $e = 1$ a cônica é chamada de **Parábola**, quando $0 < e < 1$ de **Elipse** e quando $e > 1$ de **Hipérbole**.

Veja na figura a seguir como variam as seções cônicas conforme a excentricidade da curva assume valores diferentes:

Figura 31: Cônica segundo a excentricidade



Fonte: autoria própria

As curvas da Figura 31 foram construídas no software de matemática GeoGebra mediante o seguinte processo: fixou-se uma reta d e um ponto F , não pertencente à d . Criou-se uma grandeza numérica positiva e . Traçou-se o lugar geométrico dos pontos do plano tais que a razão da distância à reta d e ao ponto F fosse igual a e . Atribuiu-se diversos valores positivos para a constante e e então surgiram as diversas curvas da figura, para cada um dos valores atribuído à e .

Perceba que para os valores de excentricidade $0 < e < 1$ a seção cônica é uma elipse (curvas na cor vermelha). Quando $e = 1$, temos uma parábola (curva na cor verde). Por fim, quando a excentricidade $e > 1$, a curva é uma hipérbole (curva na cor azul).

Na Elipse a excentricidade mede o quanto a curva é mais “achatada” ou “arredondada”, já na Hipérbole, mede o quanto os ramos da curva é mais “fechado” ou “aberto”.

4 Estudo analítico das cônicas

Uma curva pode ser definida como sendo o conjunto de pontos que gozam de uma mesma propriedade, ou seja, como um lugar geométrico. Ou, pode ainda, ser descrita pelo movimento de um ponto móvel que se desloca no plano ou no espaço, ou ainda, como a interseção de duas superfícies.

As Seções Cônicas, até o momento, foram inicialmente caracterizadas como interseções de superfícies (cônicas de Menaecmus e Apolônio). Em seguida, foram caracterizadas por suas propriedades focais e por fim, pela propriedade foco-diretriz (excentricidade), constituindo-se lugares geométricos no plano, como foi visto no capítulo anterior.

Neste capítulo, vamos caracterizar as cônicas como lugar geométrico dos pontos do plano cujas coordenadas satisfazem determinadas equações algébricas, ou seja, vamos aplicar o método da Geometria Analítica para descrever e resolver problemas geométricos. O mérito desse método é creditado ao pai da filosofia moderna René Descartes (1.596-1.650). Sua obra "Discours de la Méthode", publicada em 1.637 em Leyden, na Holanda, continha um apêndice denominado La Géométrie, que apresentava as ideias fundamentais sobre a resolução dos problemas geométricos usando coordenadas (sistema cartesiano) e equações algébricas.

“Entretanto Descartes não tratou de quase nada do que se entende hoje por geometria analítica, não tendo deduzido sequer a equação de uma reta. Esse mérito do marco zero da geometria analítica deve ser creditado a Pierre de Fermat que conclui em 1.629 o manuscrito "Ad locos planos e et sólidos isagoge" (Introdução aos lugares planos e sólidos)". (Sato, 2004)

Iniciaremos o estudo analítico das cônicas com a determinação de uma equação conjunta das cônicas, que terá como variável o valor da excentricidade (e), e em seguida, encontraremos as equações canônicas de cada uma das curvas.

4.1 Equação conjunta Foco-Diretriz

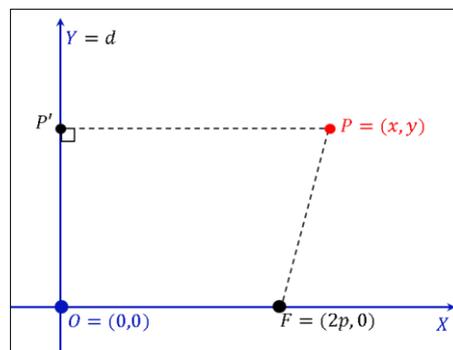
Utilizaremos agora a definição de excentricidade e seus valores específicos para cada cônica, visto no capítulo anterior, para determinar expressões algébricas que descreverão o lugar geométrico no plano de cada uma das cônicas.

Para encontrarmos uma expressão analítica para as cônicas, usaremos a seguinte **definição 3.5** de foco e diretriz vista no capítulo anterior:

*(Definição 3.5 – foco-diretriz: Dado uma reta fixa d , um ponto fixo F não-pertencente à d e um número positivo e , denomina-se cônica o lugar geométrico dos pontos do plano cuja razão entre as distâncias a F e a reta d é constante e igual a e . O ponto fixo F é chamado de **foco**, a reta fixa d de **diretriz** e a razão constante e de **excentricidade** da cônica. Quando $e = 1$ a cônica é chamada de **Parábola**, quando $0 < e < 1$ de **Elipse** e quando $e > 1$ de **Hipérbole**.)*

Considere no plano uma reta fixa d , um ponto fixo F não pertencente à d e uma constante positiva e . Considere ainda o Sistema de Coordenadas Cartesianas Ortogonal xOy , em que o eixo Oy coincida com a reta d e o eixo Ox seja a reta perpendicular a d passando pelo ponto F . Suponha ainda que as coordenadas de F nesse sistema, sejam $(2p, 0)$, onde $p > 0$, conforme Figura 32. Seja $P = (x, y)$ um ponto qualquer sobre a cônica $C = (F, d, e)$, de foco F , diretriz d e excentricidade e .

Figura 32: Sistema cartesiano e reta diretriz.



Fonte: autoria própria

Pela definição 3.5 tem-se que:

$$\frac{d(P, F)}{d(P, d)} = e \quad (31)$$

onde $d(P, F)$ e $d(P, d)$ representam respectivamente as distâncias euclidianas de P a F e à d . Da geometria analítica, sabe-se que:

$$d(P, F) = \sqrt{(x - 2p)^2 + y^2} \quad (32)$$

$$d(P, d) = |x| \quad (33)$$

Substituindo (32) e (33) em (31) e multiplicando os termos da proporção, tem-se:

$$\sqrt{(x - 2p)^2 + y^2} = e|x| \quad (34)$$

Elevando ao quadrado ambos os membros, expandindo e simplificando, obtêm:

$$\boxed{(1 - e^2)x^2 - 4px + y^2 + 4p^2 = 0} \quad (35)$$

que é a **Equação Geral de uma Cônica** dada pela definição 3.5. Essa equação descreve uma Elipse, Parábola ou Hipérbole, conforme a excentricidade seja: $0 < e < 1$, $e = 1$ e $1 < e$, respectivamente.

Uma análise detalhada da equação (35) em cada um dos três casos em que se divide o valor de e , nos leva a obtenção das equações canônicas de cada uma das cônicas. Para isso, faz-se seguidamente e assumir valores respectivos em cada um dos casos possíveis e com translação de eixos e substituição de variáveis apropriada chega-se a essas equações. Contudo, uma forma mais simples de obter as mesmas equações canônicas das cônicas, é com base nas definições usuais 3.1, 3.2 e 3.3 dessas curvas. É isso que iremos fazer nas próximas seções. Para o leitor

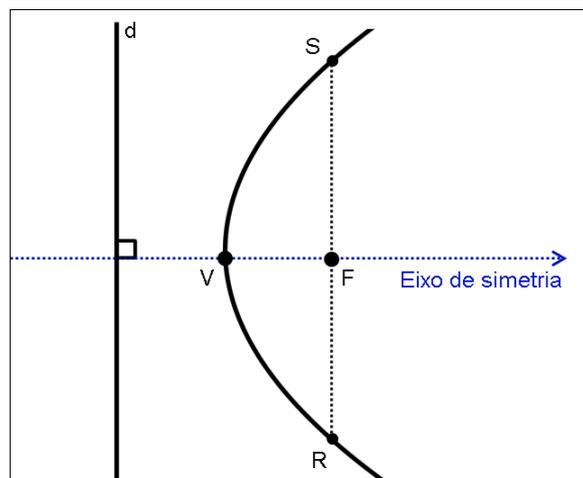
que deseja ver o desenvolvimento da equação (35) para os três possíveis conjuntos de valores da grandeza e , recomendamos ver (Lopes, 2011).

4.2 Equações da Parábola

Antes de obtermos a equação da parábola, faz-se necessário conhecermos seus elementos principais. Assim, na parábola arbitrária, temos sempre os seguintes elementos (veja figura a seguir):

- **FOCO:** o ponto fixo F ;
- **DIRETRIZ:** a reta fixa d , não contendo F ;
- **EXCENTRICIDADE:** $e = 1$
- **LATUS RECTUM:** segmento paralelo à diretriz d , passando por F e com extremidades nos pontos R e S da parábola;
- **EIXO DE SIMETRIA** ou **RETA FOCAL:** a reta r perpendicular à diretriz d passando por F ;
- **VÉRTICE:** o ponto V , intersecção do eixo de simetria com a parábola.

Figura 33: Elementos da parábola

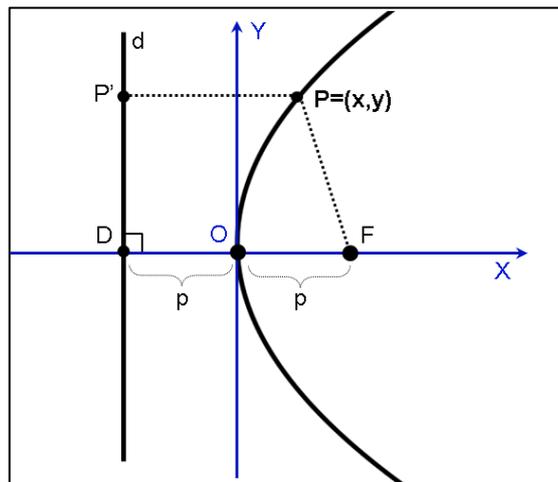


Fonte: autoria própria

4.2.1 Equação da parábola com vértice na origem do sistema

Dada uma parábola de foco F e diretriz d com $d(F, d) = 2p$ e $p > 0$, tome o sistema xOy (veja Figura 34) tal que a origem O coincida com o vértice V da parábola e o eixo Ox coincida com o eixo de simetria. Suponha ainda que F esteja à direita da diretriz.

Figura 34: Parábola com vértice na origem e foco sobre o eixo Ox à direita da diretriz



Fonte: autoria própria

Um ponto qualquer $P = (x, y)$ da parábola satisfaz a definição 3.2 usual da curva, isto é, a distância de P ao foco F é igual à sua distância à diretriz d , ou seja:

$$d(P, F) = d(P, d) \quad (36)$$

Seja P' o pé da perpendicular à diretriz d passando por P . Então $d(P, d) = d(P, P')$. Como $P' = (-p, y)$ temos que:

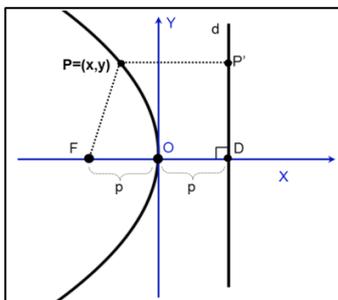
$$\begin{aligned} d(P, F) &= d(P, d) = d(P, P') \\ \Rightarrow \sqrt{(x - p)^2 + (y - 0)^2} &= \sqrt{(x - (-p))^2 + (y - y)^2} \end{aligned} \quad (37)$$

Elevando ao quadrado ambos os membros, simplificando e isolando y , tem-se:

$$\boxed{y^2 = 4px} \quad x \geq 0, p > 0 \quad (38)$$

que é a **Equação Canônica da Parábola** de vértice na origem do sistema e foco à direita da diretriz. Caso F estivesse à esquerda da diretriz, ou sobre o eixo y (acima ou abaixo da diretriz) a equação correspondente em cada caso poderia ser obtida pelo mesmo processo acima. Veja as figuras a seguir:

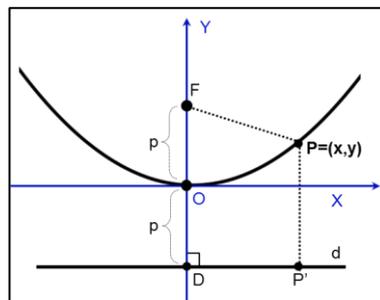
Figura 35: Parábola com vértice na origem e foco sobre o eixo Ox à esquerda da diretriz



$$\boxed{y^2 = -4px}$$

Fonte: autoria própria

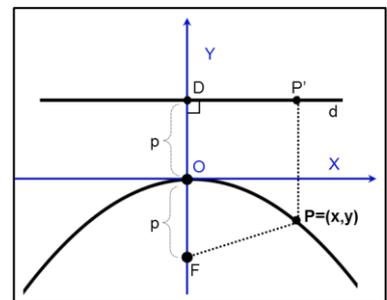
Figura 36: Parábola com vértice na origem e foco sobre o eixo Oy acima da diretriz



$$\boxed{x^2 = 4py}$$

Fonte: autoria própria

Figura 37: Parábola com vértice na origem e foco sobre o eixo Oy abaixo da diretriz



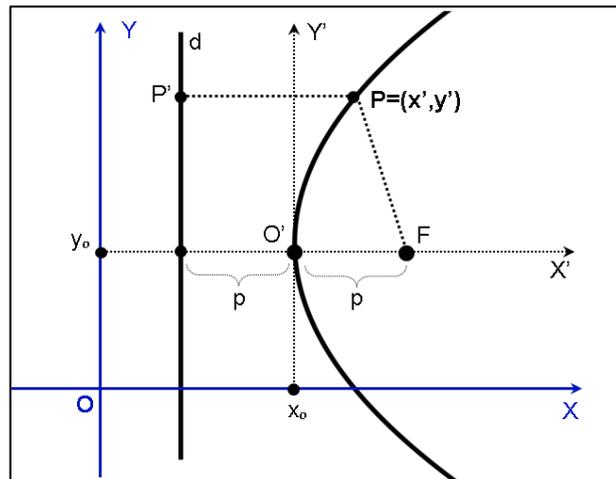
$$\boxed{x^2 = -4py}$$

Fonte: autoria própria

4.2.2 Equação da parábola com vértice no ponto $V = (x_o, y_o)$

Suponha agora que a parábola tenha o vértice $V = (x_o, y_o)$ diferente da origem do sistema xOy , foco à direita da diretriz e eixo de simetria paralelo ao eixo Ox . Veja a Figura 38 a seguir:

Figura 38: Parábola com vértice $V = (x_0, y_0)$, eixo paralelo à Ox e foco à direita da diretriz



Fonte: autoria própria

Considere o sistema $x'O'y'$ tal que $O' = V = (x_0, y_0)$ e os eixos $O'x'$ e $O'y'$ são respectivamente paralelos aos eixos Ox e Oy do sistema xOy . Face ao exposto, em 4.2.1 a equação da parábola nesse novo sistema é:

$$y'^2 = 4px' \quad (39)$$

Como as coordenadas do ponto P nos dois sistemas se relacionam segundo as equações de translação:

$$\begin{cases} x' = x - x_0 \\ e \\ y' = y - y_0 \end{cases} \quad (40)$$

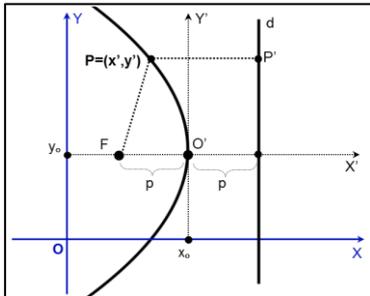
Substituindo (40) em (39), temos:

$$\boxed{(y - y_0)^2 = 4p(x - x_0)} \quad (41)$$

que é a **Equação da Parábola de centro no ponto $V = (x_0, y_0)$, eixo de simetria paralelo a Ox e foco à direita da diretriz** no sistema xOy . Caso F estivesse à esquerda da diretriz, ou o eixo de simetria fosse paralelo à Oy , com o foco acima

ou abaixo da diretriz, a equação correspondente em cada caso poderia ser obtida pelo mesmo processo acima. Veja as figuras a seguir:

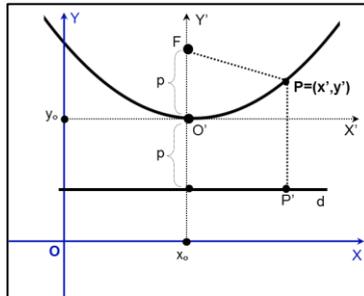
Figura 39: Parábola com vértice $V = (x_0, y_0)$, eixo paralelo à Ox e foco à esquerda da diretriz



$$(y - y_0)^2 = -4p(x - x_0)$$

Fonte: autoria própria

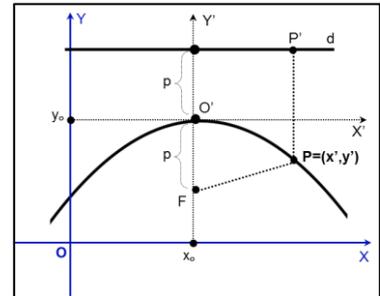
Figura 40: Parábola com vértice $V = (x_0, y_0)$, eixo paralelo à Oy e foco acima da diretriz



$$(x - x_0)^2 = 4p(y - y_0)$$

Fonte: autoria própria

Figura 41: Parábola com vértice $V = (x_0, y_0)$, eixo paralelo à Oy e foco abaixo da diretriz



$$(x - x_0)^2 = -4p(y - y_0)$$

Fonte: autoria própria

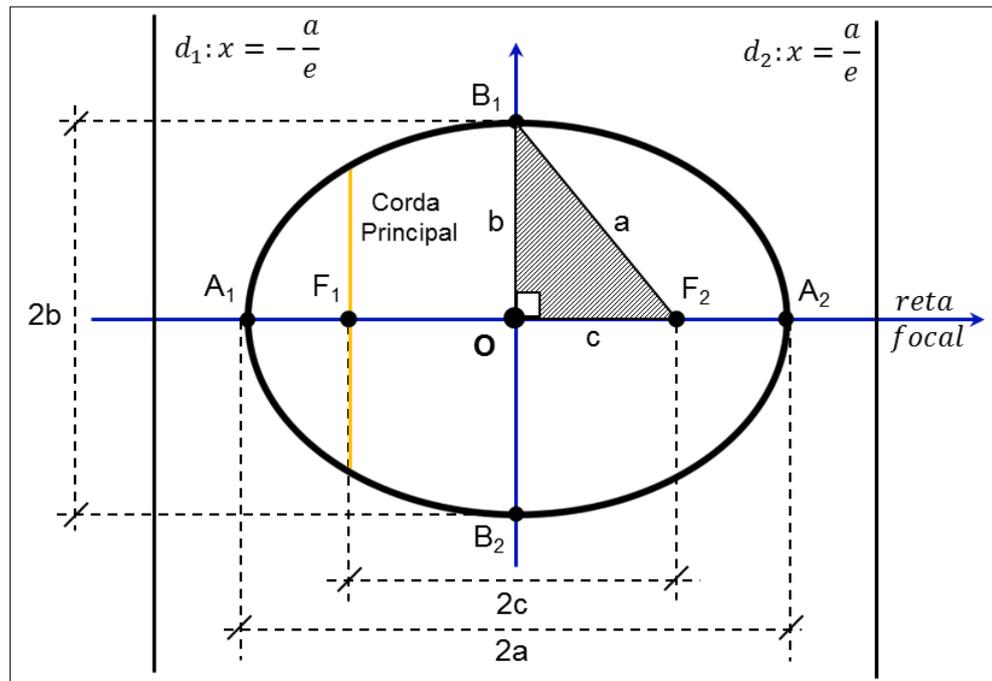
4.3 Equações da Elipse

Antes de obtermos as equações da Elipse, faz-se necessário conhecermos seus elementos principais. Assim, na Elipse arbitrária, temos sempre os seguintes elementos (veja Figura 42):

- FOCOS: os pontos fixos F_1 e F_2 ;
- DISTÂNCIA FOCAL: distância entre os focos $\overline{F_1F_2} = 2c$;
- CENTRO (O): o ponto médio do segmento focal $\overline{F_1F_2}$;
- VÉRTICES (A_1 e A_2): interseção da elipse com a reta focal $\overline{F_1F_2}$;
- VÉRTICES (B_1 e B_2): interseção da elipse com a mediatriz do segmento focal $\overline{F_1F_2}$;
- EIXO MAIOR: segmento $\overline{A_1A_2}$ de medida $2a$;
- EIXO MENOR: segmento $\overline{B_1B_2}$ de medida $2b$;
- PARÂMETROS GEOMÉTRICOS: os números "a", "b" e "c";

- **CORDA PRINCIPAL:** segmento passando por um dos focos e perpendicular à reta focal, com extremidades nos pontos R e S da elipse;
- **EXCENTRICIDADE:** número $0 < e < 1$;
- **DIRETRIZES:** retas d_1 e d_2 perpendiculares à reta focal e a uma distância " $\frac{a}{e}$ " do centro O ;
- **EIXOS DE SIMETRIAS:** as retas que contem o segmento focal $\overline{F_1F_2}$ e sua mediatriz (contendo o segmento $\overline{B_1B_2}$).

Figura 42: Elementos da elipse



Fonte: autoria própria

Como B_1 está na elipse, então a soma das suas distâncias aos focos é $2a$. Como B_1 também está na mediatriz do segmento focal, então é equidistante aos focos, isto é, $\overline{B_1F_1} = \overline{B_1F_2} = 2a$. Logo, do triângulo retângulo ΔB_1OF_2 , temos a seguinte **Relação Fundamental** sobre os parâmetros da elipse:

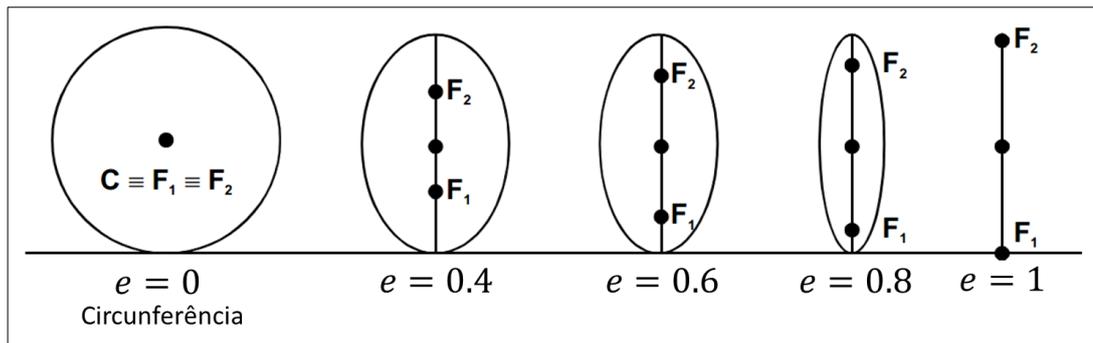
$$\boxed{a^2 = b^2 + c^2} \quad (42)$$

No caso da elipse de distância focal $\overline{F_1F_2} = 2c$ e eixo maior $\overline{A_1A_2} = 2a$ pode-se mostrar pelo desenvolvimento da Equação Geral de uma Cônica, equação (35) da seção 4.1, para o caso particular $0 < e < 1$, que a sua excentricidade pode ser encontrada pela seguinte relação:

$$e = \frac{c}{a} \quad (43)$$

Nota-se que essa razão mede o quanto os focos se afastam ou se aproximam do centro O ou dos vértices $A_1 = (-a, 0)$ e $A_2 = (a, 0)$ da elipse, justificando a palavra excentricidade. Veja a figura abaixo:

Figura 43: Variação da excentricidade na elipse



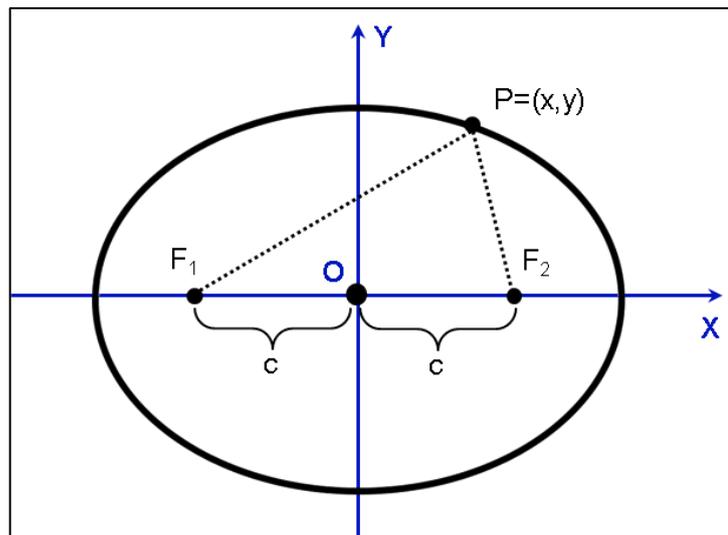
Fonte: autoria própria

A excentricidade de uma elipse satisfaz $0 < e = c/a < 1$, e no limite, isto é, quando $c = 0$ tem-se $F_1 = O = F_2$, e a excentricidade se anula, logo, pela relação fundamental, temos $a = b$. Nesse caso, a elipse se degenera em uma circunferência com raio igual $r = a = b$ e $e = 0$, não havendo, portanto, diretrizes. Quando c tende para a , pela relação fundamental, notamos que b tende para zero, e a elipse se achata mais e mais. E no limite, quando $c = a$, então $b = 0$ e a elipse se degenera numa reta.

4.3.1 Equação da elipse com centro na origem do sistema

Dada uma elipse de focos F_1 e F_2 com $d(F_1, F_2) = 2c$, $c > 0$, e eixo maior igual a $2a$, $a > c$, tome o sistema xOy (veja Figura 44) tal que a origem O coincida com o centro da elipse e o eixo Ox coincida com o seu eixo maior (focal).

Figura 44: Elipse com centro na origem e focos sobre o eixo Ox



Fonte: autoria própria

Sabemos que um ponto qualquer $P = (x, y)$ da elipse satisfaz a **definição 3.3** usual da curva, isto é, **a soma das distâncias de P aos focos F_1 e F_2 é constante e igual a $2a$** , ou seja:

$$d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a \quad (44)$$

Como $P = (x, y)$, $F_1 = (-c, 0)$ e $F_2 = (c, 0)$ usando a fórmula para calcular a distância entre dois pontos no plano, temos:

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a \quad (45)$$

Passando a segunda raiz para o segundo membro, elevando ao quadrado e simplificando, tem-se:

$$\begin{aligned}(x+c)^2 + y^2 &= [(x-c)^2 + y^2] - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + 4a^2 \Rightarrow \\ &\Rightarrow a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = a^2 - cx\end{aligned}\quad (46)$$

Elevando novamente ao quadrado:

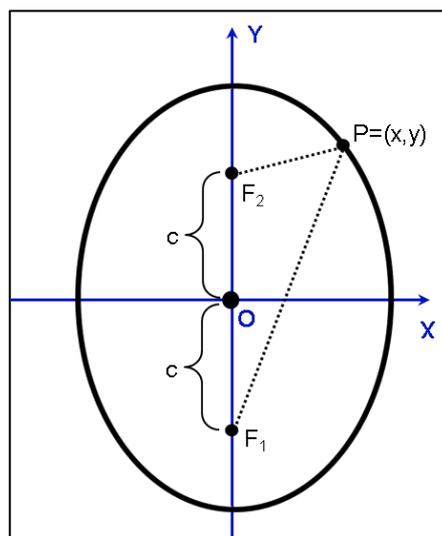
$$\begin{aligned}a^2x^2 - 2a^2cx + a^2c^2 + a^2y^2 &= a^4 - 2a^2xc + c^2x^2 \Rightarrow \\ &\Rightarrow (a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2)\end{aligned}\quad (47)$$

Da relação fundamental sabe-se que $a^2 - c^2 = b^2$, portanto substituindo essa igualdade em (47) e ainda dividindo ambos os membros por " a^2b^2 ", tem-se:

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1}\quad (48)$$

que é a **Equação Canônica da Elipse** de centro na origem do sistema e focos sobre o eixo Ox . Caso a elipse tivesse centro na origem e os focos sobre o eixo Oy , a equação correspondente poderia ser obtida pelo mesmo processo acima. Veja a figura abaixo:

Figura 45: Elipse com centro na origem e focos sobre o eixo Oy



Fonte: autoria própria

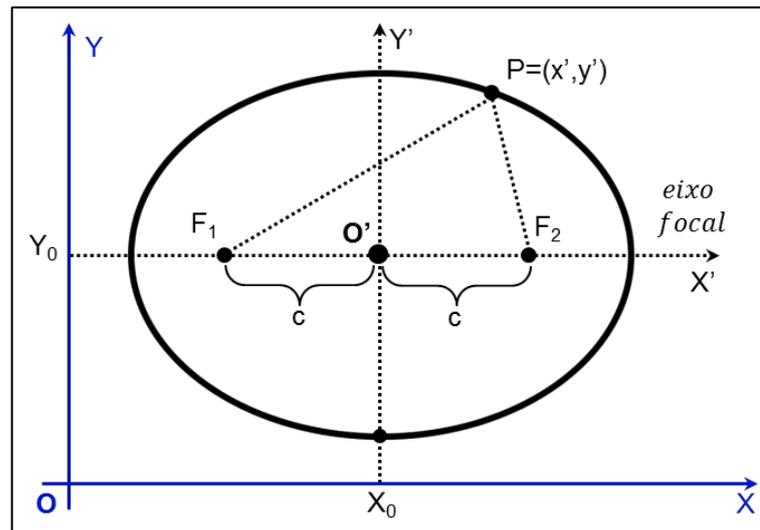
$$\boxed{\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1} \quad (49)$$

Note a inversão da posição dos parâmetros a e b . Conclui-se, portanto, que o parâmetro a estará sempre como denominador na fração da coordenada (x ou y) do eixo onde se encontra os focos. Vale ressaltar que para distinguir entre os valores a e b , basta lembrar que a é uma hipotenusa de um triângulo retângulo em que b e c são os catetos, portanto, a é sempre maior do que b .

4.3.2 Equação da elipse com centro no ponto $O' = (x_0, y_0)$

Suponha agora que a elipse tenha centro (x_0, y_0) diferente da origem do sistema xOy e eixo focal paralelo ao eixo Ox do sistema. Veja a figura a seguir:

Figura 46: Elipse com centro $O' = (x_0, y_0)$ e eixo focal paralelo à Ox



Fonte: autoria própria

Considere o sistema $x'O'y'$ tal que $O' = (x_0, y_0)$, o centro da elipse, e os eixos $O'x'$ e $O'y'$ são respectivamente paralelos aos eixos Ox e Oy do sistema xOy . Face ao exposto, em 4.3.1 a equação da elipse nesse novo sistema é:

$$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 1 \quad (50)$$

Como as coordenadas do ponto P nos dois sistemas se relacionam segundo as equações de translação:

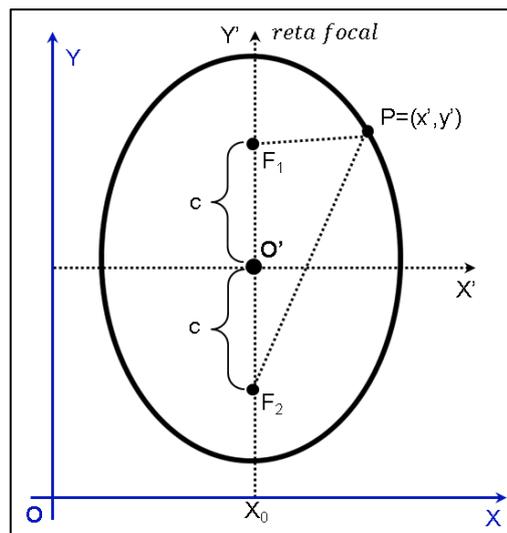
$$\begin{cases} x' = x - x_0 \\ \text{e} \\ y' = y - y_0 \end{cases} \quad (51)$$

Substituindo (51) em (50), temos:

$$\boxed{\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1} \quad (52)$$

que é a **Equação da Elipse de centro no ponto $O' = (x_0, y_0)$ e eixo focal paralelo à Ox** no sistema xOy . Caso o centro continuasse sendo no ponto $O' = (x_0, y_0)$ mas o eixo focal fosse paralelo ao eixo Oy , a equação correspondente poderia ser obtida pelo mesmo processo acima. Veja a figura abaixo:

Figura 47: Elipse com centro $O' = (x_0, y_0)$ e eixo focal paralelo à Oy



Fonte: autoria própria

$$\boxed{\frac{(x - x_0)^2}{b^2} + \frac{(y - y_0)^2}{a^2} = 1} \quad (53)$$

Mais uma vez, perceba a inversão da posição dos parâmetros a e b .

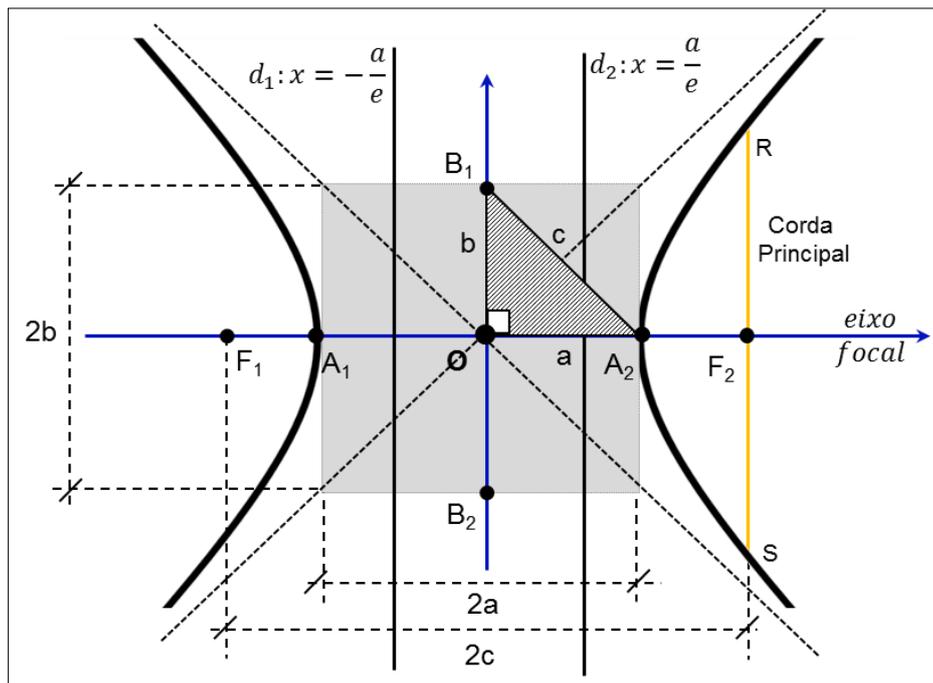
4.4 Equações da Hipérbole

Antes de obtermos as equações da Hipérbole, faz-se necessário conhecermos seus elementos principais. Na Hipérbole arbitrária, temos sempre os seguintes elementos (veja Figura 48):

- FOCOS: os pontos fixos F_1 e F_2 ;
- CENTRO (O): o ponto médio do segmento focal $\overline{F_1F_2}$;
- DISTÂNCIA FOCAL: distância entre os focos $\overline{F_1F_2} = 2c$;
- EIXO FOCAL (ou REAL ou TRANSVERSO): segmento $\overline{A_1A_2}$ de medida $2a$, com $a < c$;
- PARÂMETROS GEOMÉTRICOS: os números " a ", " b " e " c ";
- EIXO CONJUGADO (ou IMAGINÁRIO): segmento $\overline{B_1B_2}$ contido na mediatriz do eixo focal, de medida $2b$ e cujo ponto médio é o centro O;
- VÉRTICES (A_1 e A_2): interseção da hipérbole com o eixo focal $\overline{F_1F_2}$;
- VÉRTICES (B_1 e B_2): extremidades do eixo conjugado;
- RETÂNGULO FUNDAMENTAL: retângulo determinado pelas retas paralelas aos eixos (transverso e conjugado) e passando pelos vértices A_1 , A_2 , B_1 e B_2 ;
- ASSÍNTOTAS: retas suportes das diagonais do retângulo fundamental;
- CORDA PRINCIPAL: segmento passando por um dos focos e perpendicular ao eixo focal, com extremidades nos pontos R e S da hipérbole;

- EXCENTRICIDADE: número $e > 1$;
- DIRETRIZES: retas d_1 e d_2 perpendiculares à reta focal e a uma distância " $\frac{a}{e}$ " do centro O ;
- EIXOS DE SIMETRIAS: as retas que contem o segmento focal $\overline{F_1F_2}$ e sua a mediatriz (contendo o segmento $\overline{B_1B_2}$).

Figura 48: Elementos da hipérbole



Fonte: autoria própria

Como O é o ponto médio do segmento $\overline{A_1A_2} = 2a$, então $\overline{OA_2} = a$. Traçando um segmento de comprimento b , tal que $b = \sqrt{c^2 - a^2}$, na mediatriz do segmento focal a partir de O e marcando o ponto B_1 no outro extremo do segmento construído, então o triângulo ΔB_1OA_2 , retângulo em O , tem hipotenusa $\overline{B_1A_2} = c$. Isso implica na seguinte **Relação Fundamental** sobre os parâmetros da hipérbole:

$$\boxed{c^2 = a^2 + b^2} \quad (54)$$

No caso da hipérbole de distância focal $\overline{F_1F_2} = 2c$ e eixo maior $\overline{A_1A_2} = 2a$, com $a < c$, pode-se mostrar pelo desenvolvimento da Equação Geral de uma

Cônica, equação (35) da seção 4.1, para o caso particular $e > 1$, que a sua excentricidade pode ser encontrada pela seguinte relação:

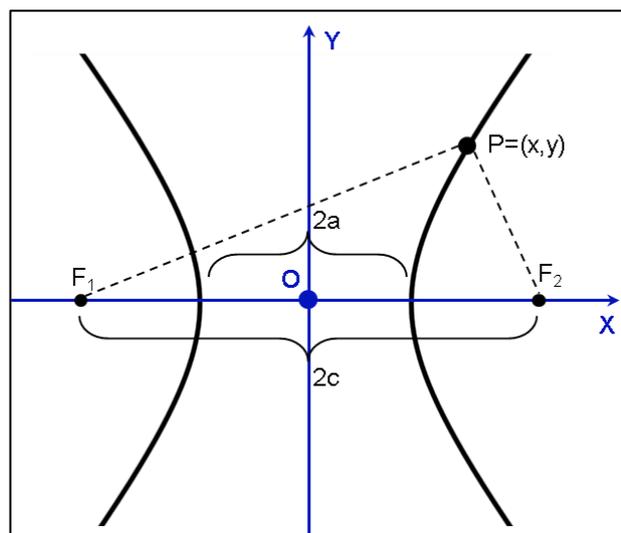
$$\boxed{e = \frac{c}{a}} \quad (55)$$

Nota-se que essa razão mede o quanto os focos se afastam ou se aproximam dos vértices $A_1 = (-a, 0)$ e $A_2 = (a, 0)$ da hipérbole, o que torna a curva com concavidade mais aberta (quanto maior a excentricidade) ou mais fechada (quanto mais a excentricidade se aproxima de 1).

4.4.1 Equação da hipérbole com centro na origem do sistema

Dada uma hipérbole de focos F_1 e F_2 com $d(F_1, F_2) = 2c$, $c > 0$, e eixo focal igual a $2a$, $0 < a < c$, tome o sistema xOy (veja Figura 49) tal que a origem O coincida com o centro da hipérbole e o eixo Ox coincida com o seu eixo focal (real).

Figura 49: Hipérbole com centro na origem e focos sobre o eixo Ox



Fonte: autoria própria

Sabemos que um ponto qualquer $P = (x, y)$ da hipérbole satisfaz a **definição 3.5** usual da curva, isto é, **o módulo da diferença das distâncias de P aos focos F_1 e F_2 é constante e igual a $2a$** , ou seja:

$$|d(P, F_1) - d(P, F_2)| = 2a \quad (56)$$

Como $P = (x, y)$, $F_1 = (-c, 0)$ e $F_2 = (c, 0)$ usando a fórmula para calcular a distância entre dois pontos no plano, temos:

$$\left| \sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} \right| = 2a \quad (57)$$

Extraindo do módulo, passando a segunda raiz para o segundo membro, elevando ao quadrado e simplificando, tem-se:

$$\begin{aligned} (x+c)^2 + y^2 &= [(x-c)^2 + y^2] \pm 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + 4a^2 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \pm a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = -a^2 + cx \end{aligned} \quad (58)$$

Elevando novamente ao quadrado:

$$\begin{aligned} a^2x^2 - 2a^2cx + a^2c^2 + a^2y^2 &= a^4 - 2a^2xc + c^2x^2 \Rightarrow \\ &\Rightarrow (c^2 - a^2)x^2 - a^2y^2 = a^2(c^2 - a^2) \end{aligned} \quad (59)$$

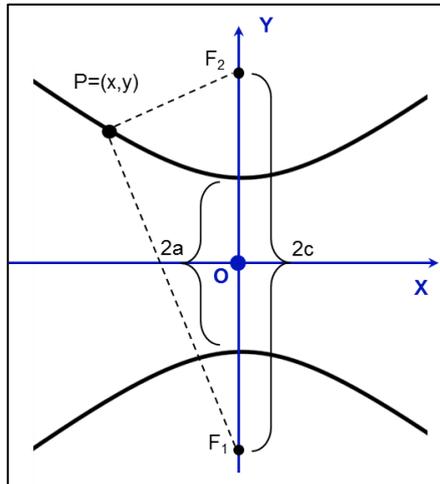
Da relação fundamental sabe-se que $c^2 - a^2 = b^2$, portanto substituindo essa igualdade em (47) e ainda dividindo ambos os membros por " a^2b^2 ", tem-se:

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1} \quad (60)$$

que é a **Equação Canônica da Hipérbole** de centro na origem do sistema e focos sobre o eixo Ox . Caso a hipérbole tivesse centro na origem e os focos sobre o eixo

Oy , a equação correspondente poderia ser obtida pelo mesmo processo acima. Veja a figura abaixo:

Figura 50: Hipérbole com centro na origem e focos sobre o eixo Oy



Fonte: autoria própria

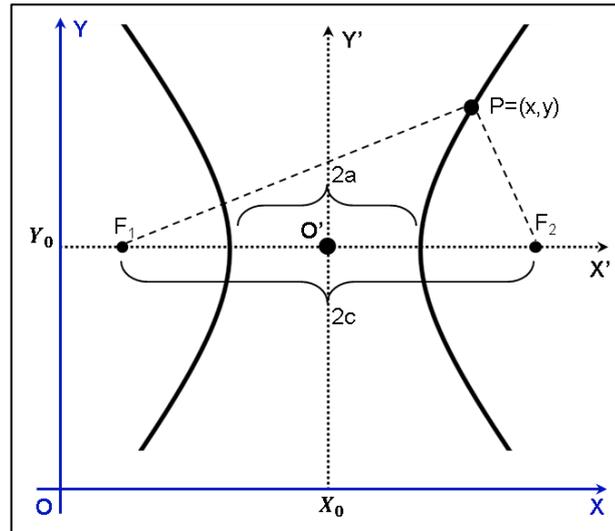
$$\boxed{-\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1} \quad (61)$$

Note a inversão da posição dos parâmetros a e b . Conclui-se, portanto, que o parâmetro b estará sempre como denominador na fração da coordenada (x ou y) do eixo onde se encontra os focos. Vale ressaltar que para distinguir entre os valores a e b , basta lembrar que a fração cujo b é denominador, tem sempre sinal negativo.

4.4.2 Equação da hipérbole com centro no ponto $O' = (x_o, y_o)$

Suponha agora que a hipérbole tenha centro $O' = (x_o, y_o)$ diferente da origem do sistema xOy e eixo focal paralelo ao eixo Ox do sistema. Veja a Figura 51 a seguir:

Figura 51: Hipérbole com centro $O' = (x_0, y_0)$ e eixo focal paralelo à Ox



Fonte: autoria própria

Considere o sistema $x'O'y'$ tal que $O' = (x_0, y_0)$ o centro da hipérbole e os eixos $O'x'$ e $O'y'$ são respectivamente paralelos aos eixos Ox e Oy do sistema xOy . Face ao exposto, em 4.4.1 a equação da hipérbole nesse novo sistema é:

$$\frac{x'^2}{a^2} - \frac{y'^2}{b^2} = 1 \quad (62)$$

Como as coordenadas do ponto P nos dois sistemas se relacionam segundo as equações de translação:

$$\begin{cases} x' = x - x_0 \\ e \\ y' = y - y_0 \end{cases} \quad (63)$$

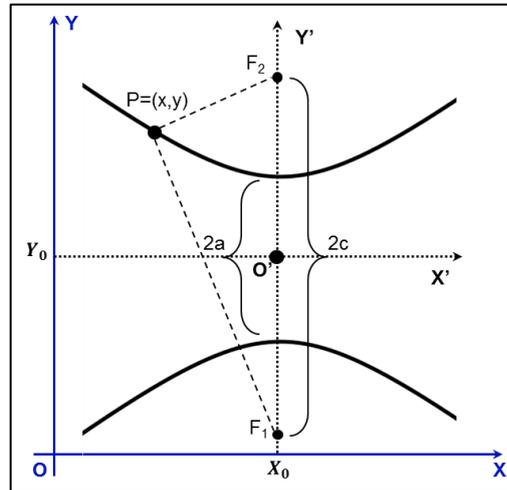
Substituindo (63) em (62), temos:

$$\boxed{\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1} \quad (64)$$

que é a **Equação da Hipérbole de centro no ponto $O' = (x_0, y_0)$ e eixo focal paralelo à Ox** no sistema xOy . Caso o centro continuasse sendo no ponto $O' = (x_0, y_0)$ mas o

eixo focal fosse paralelo ao eixo Oy , a equação correspondente poderia ser obtida pelo mesmo processo acima. Veja a figura abaixo:

Figura 52: Hipérbole com centro $O' = (x_0, y_0)$ e eixo focal paralelo à Oy



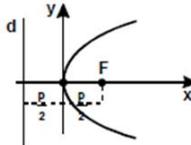
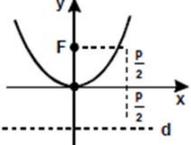
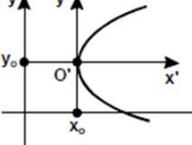
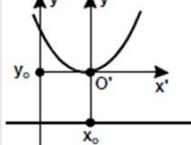
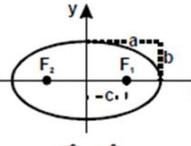
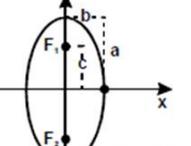
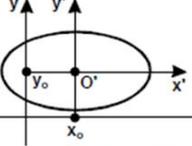
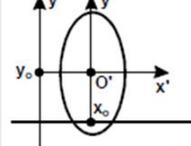
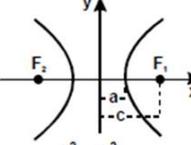
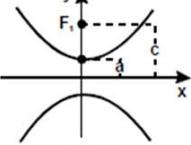
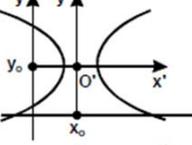
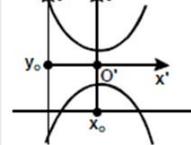
Fonte: autoria própria

$$\boxed{-\frac{(x - x_0)^2}{b^2} + \frac{(y - y_0)^2}{a^2} = 1} \quad (65)$$

Mais uma vez, perceba a inversão da posição dos parâmetros a e b .

Para finalizarmos esse capítulo, segue um quadro resumo das equações das cônicas retirado de (Venturi, 1949):

QUADRO RESUMO

	1. ^a EQUAÇÃO (CANÔNICA)		2. ^a EQUAÇÃO		RELAÇÕES NOTÁVEIS
	EIXO FOCAL COINCIDE COM O EIXO X	EIXO FOCAL COINCIDE COM O EIXO Y	EIXO FOCAL É PARALELO AO EIXO X	EIXO FOCAL É PARALELO AO EIXO Y	
PARÁBOLA	 $y^2 = 4px$	 $x^2 = 4py$	 $(y - y_0)^2 = 4p(x - x_0)$	 $(x - x_0)^2 = 4p(y - y_0)$	$VF = p$
ELIPSE	 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$	 $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$	 $\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$	 $\frac{(x - x_0)^2}{b^2} + \frac{(y - y_0)^2}{a^2} = 1$	$a^2 = b^2 + c^2$
HIPÉRBOLA	 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$	 $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$	 $\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$	 $\frac{(y - y_0)^2}{a^2} - \frac{(x - x_0)^2}{b^2} = 1$	$c^2 = a^2 + b^2$

Fonte: Cônicas e Quádricas. Jacir J. Venturi.

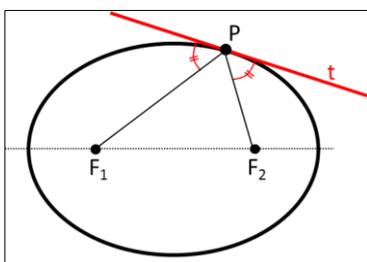
5 Aplicações das Seções Cônicas

As superfícies geradas pela revolução de uma parábola, elipse ou hipérbole, cada uma delas em torno de seu eixo focal, apresentam propriedades de reflexão que podem ser observadas em diversas aplicações tecnológicas. Iniciaremos este capítulo conhecendo as propriedades da reta tangente a uma cônica. Essas propriedades permitirão entender as propriedades refletoras das superfícies cônicas e compreender melhor os motivos que levam essas superfícies a serem largamente utilizadas na indústria, astronomia, arquitetura, navegação, entre outras aplicações tecnológicas.

5.1 Propriedades da reta tangente a uma cônica

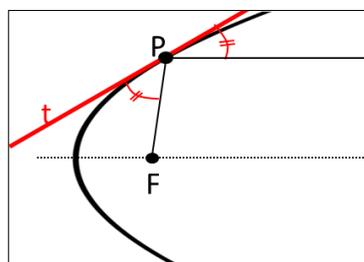
Dizemos que uma reta t é tangente a uma cônica C em um ponto P , pertencente à cônica, se a reta, a menos do ponto P , esteja totalmente contida na região exterior (não focal) da curva. Veja figuras abaixo:

Figura 53: Reta tangente à elipse



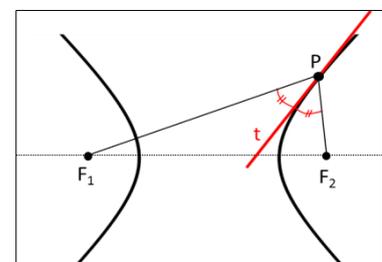
Fonte: autoria própria

Figura 54: Reta tangente à parábola



Fonte: autoria própria

Figura 55: Reta tangente à hipérbole



Fonte: autoria própria

Com base na definição de reta tangente a uma cônica podemos enunciar as seguintes propriedades, cujas provas são feitas em sequência:

■ **Propriedade 5.1: (reta tangente a uma elipse)** A reta tangente à elipse num ponto P forma ângulos iguais com os segmentos que unem P aos focos.

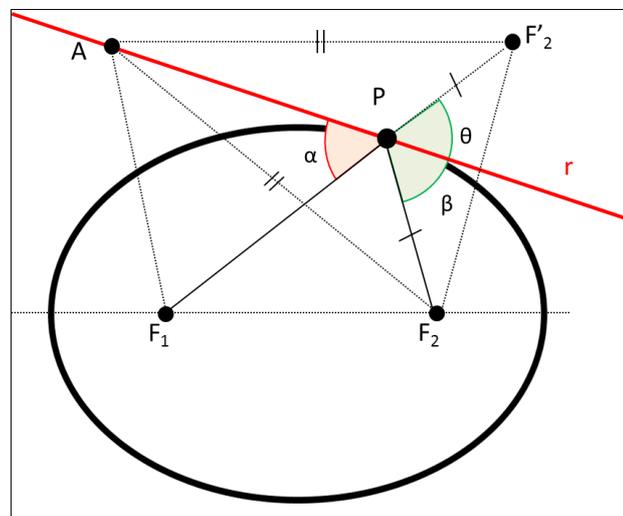
■ **Propriedade 5.2: (reta tangente a uma parábola)** A reta tangente à parábola num ponto P forma ângulos iguais com a reta que passa por P paralela ao eixo de simetria e com o segmento que liga P ao foco.

■ **Propriedade 5.3: (reta tangente a uma hipérbole)** A reta tangente à hipérbole num ponto P forma ângulos iguais com os segmentos que unem P aos focos.

Segue as provas das propriedades enunciadas acima:

□ **PROVA DA PROPRIEDADE 5.1 (reta tangente à elipse)**

Figura 56: Prova da propriedade da reta tangente à elipse



Fonte: autoria própria

Seja ε a elipse de focos F_1 e F_2 e eixo maior igual $2a$, conforme Figura 56. Seja, ainda, P um ponto pertencente à elipse ε , F'_2 um ponto da reta contendo o segmento $\overline{PF_1}$ tal que $\overline{PF_2} = \overline{PF'_2}$, r a reta bissetriz do ângulo $F_2\hat{P}F'_2$ e A um ponto qualquer da reta r , com $A \neq P$.

Como $P \in \varepsilon$ então:

$$d(P, F_1) + d(P, F_2) = d(P, F_1) + d(P, F'_2) = 2a \quad (66)$$

Pela desigualdade triangular em $\Delta AF_1F'_2$ temos:

$$d(A, F_1) + d(A, F'_2) > d(F_1, F'_2) = d(P, F_1) + d(P, F'_2) = 2a \quad (67)$$

Portanto, A não pertence à elipse. Como A é um ponto qualquer da reta r , $A \neq P$, então a reta r só tem o ponto P em comum com a elipse, portanto r , a menos do ponto P , é exterior à elipse, logo **é uma tangente à cônica em P** .

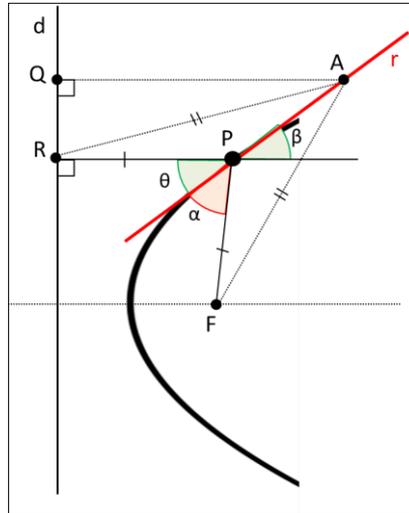
Considere agora os ângulos: α (entre a reta r e a reta que contém o segmento $\overline{PF_1}$), θ (entre a reta r e $\overline{PF'_2}$) e β entre a reta r e o prolongamento de $\overline{PF_2}$. Sendo r a reta bissetriz do ângulo $F_2\hat{P}F'_2$, α e θ ângulos opostos pelos vértices, temos:

$$\beta = \theta \text{ e } \theta = \alpha \Rightarrow \boxed{\beta = \alpha} \quad (68)$$

O que prova a propriedade 5.1.

□ PROVA DA PROPRIEDADE 5.2 (reta tangente à parábola)

Figura 57: Prova da propriedade da reta tangente à parábola



Fonte: autoria própria

Seja a parábola \wp de foco F e diretriz d , conforme Figura 57. Seja ainda, P um ponto de \wp , R o pé da perpendicular à d passando por P , r a bissetriz do ângulo $F\hat{P}R$, A um ponto qualquer de r , com $A \neq P$, e Q o pé da perpendicular à d passando por A .

Pela definição de parábola $\overline{PF} = \overline{PR}$, logo o ΔPFR é isósceles e, portanto, a reta r é também mediana do segmento \overline{FR} , isto é:

$$\overline{AR} = \overline{AF} \quad (69)$$

Como \overline{AQ} é a distância de A à reta d e o ΔARQ é retângulo em Q , então:

$$d(A, d) = \overline{AQ} < \overline{AR} = \overline{AF} \quad (70)$$

Portanto A não pertence à parábola. Como A é um ponto qualquer da reta r , $A \neq P$, então a reta r só tem o ponto P em comum com a parábola e mais, como, $d(A, d) < \overline{AF}$, então A é exterior à região focal da curva, ou seja, **r é uma tangente à cônica em P .**

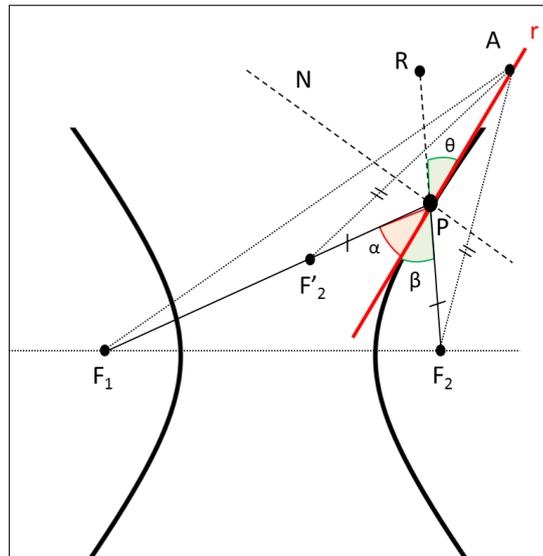
Considere agora os ângulos: α (entre a reta r e \overline{PF}), θ (entre a reta r e \overline{PR}) e β (entre a reta r e o prolongamento de \overline{PR}). Sendo r a reta bissetriz do ângulo $F\hat{P}R$, β e θ ângulos opostos pelos vértices, temos:

$$\alpha = \theta \text{ e } \theta = \beta \Rightarrow \boxed{\alpha = \beta} \quad (71)$$

Isso prova a Propriedade 5.2

□ PROVA DA PROPRIEDADE 5.3 (reta tangente à hipérbole)

Figura 58: Prova da propriedade da reta tangente à hipérbole



Fonte: autoria própria

Seja a hipérbole \mathcal{H} de foco F_1 e F_2 e eixo focal igual a $2a$, conforme Figura 58. Seja ainda P um ponto pertencente à hipérbole \mathcal{H} , F'_2 um ponto da reta que contém o segmento $\overline{PF_1}$ tal que $\overline{PF'_2} = \overline{PF_2}$, r a reta bissetriz do ângulo $F_2\hat{P}F'_2$ e A um ponto qualquer da reta r , com $A \neq P$.

Como $P \in \mathcal{H}$ então:

$$|d(P, F_1) - d(P, F_2)| = |d(P, F_1) - d(P, F'_2)| = d(F_1, F'_2) = 2a \quad (72)$$

Pela desigualdade triangular em $\Delta AF_1F'_2$ temos:

$$\begin{aligned}
d(A, F'_2) + d(F_1, F'_2) &> d(A, F_1) \Rightarrow d(A, F_1) - d(A, F'_2) < d(F_1, F'_2) \\
d(A, F_1) + d(F_1, F'_2) &> d(A, F'_2) \Rightarrow d(A, F_1) - d(A, F'_2) > -d(F_1, F'_2) \\
\Rightarrow |d(A, F_1) - d(A, F'_2)| &= |d(A, F_1) - d(A, F_2)| < d(F_1, F'_2) = 2a \quad (73)
\end{aligned}$$

Logo A não pertence à hipérbole. Como A é um ponto qualquer da reta r , $A \neq P$, então a reta r só tem o ponto P em comum com a hipérbole, logo r é exterior à região focal da hipérbole, portanto **r é uma tangente à cônica em P** .

Considere agora os ângulos: α (entre a reta r e $\overline{PF'_2}$), β (entre a reta r e $\overline{PF_2}$) e θ (entre a reta r e o prolongamento de $\overline{PF_2}$). Sendo r a reta bissetriz do ângulo $F_2\hat{P}F'_2$, β e θ ângulos opostos pelo vértice, temos:

$$\alpha = \beta \text{ e } \beta = \theta \Rightarrow \boxed{\alpha = \theta} \quad (74)$$

Isso prova a Propriedade 5.3.

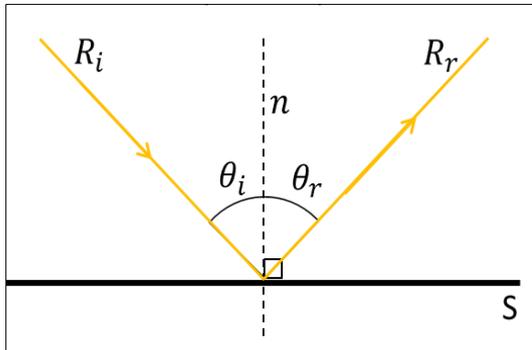
5.2 Superfícies Cônicas e Propriedades Refletoras

De acordo com a Física Clássica, os raios de luz e as ondas sonoras propagam-se no espaço em linha reta e radialmente a partir de sua fonte. Além disso, se a fonte está muito distante de seu destino essas ondas chegam ao destino formando um feixe praticamente paralelo, como é o caso das ondas de rádio ou as luminosas provenientes de um corpo celeste distante. Chegando em linha reta elas refletem num ponto de uma superfície suave na mesma direção que refletiriam num plano que é tangente à superfície nesse ponto. Os princípios da Lei da Reflexão da Luz são os seguintes:

- O raio incidente (R_i), a reta normal (n) e o raio refletido (R_r) são coplanares;
- O ângulo de incidência (θ_i) é igual ao ângulo de reflexão (θ_r).

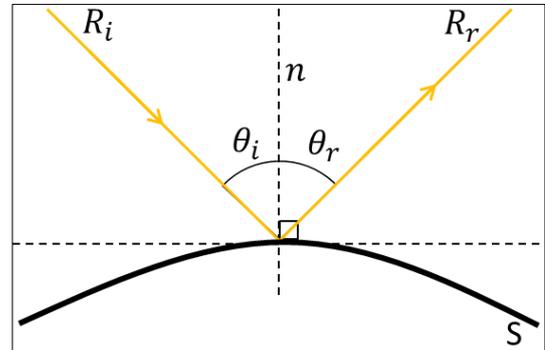
Veja as figuras abaixo:

Figura 59: Lei da reflexão: superfície plana



Fonte: autoria própria

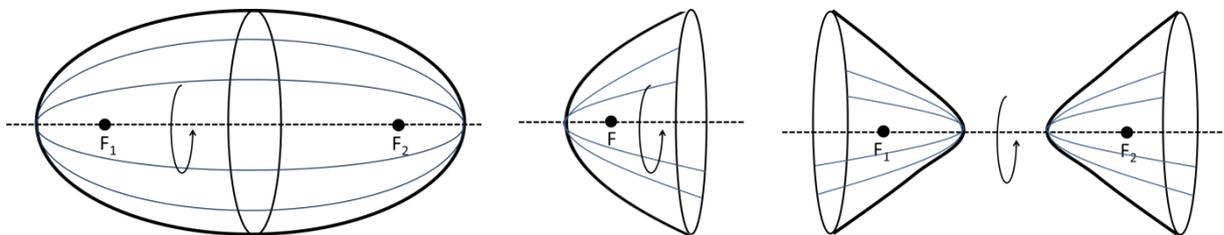
Figura 60: Lei da reflexão: superfície curva



Fonte: autoria própria

Considere as **superfícies cônicas** geradas pela revolução das seções cônicas em torno de seu eixo focal, como ilustra a figura abaixo:

Figura 61: Superfícies de revolução

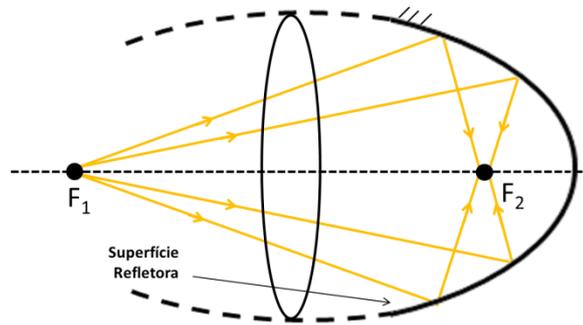


Fonte: autoria própria

Das propriedades 5.1 a 5.3 da reta tangente a uma cônica e a Lei Física da Reflexão da Luz, pode-se inferir sobre as seguintes propriedades das superfícies de revolução acima descritas:

- **Propriedade 5.4:** Se uma fonte de luz estiver situada em um dos focos de um espelho elíptico, todos os raios refletidos por este espelho se concentrarão no outro foco.

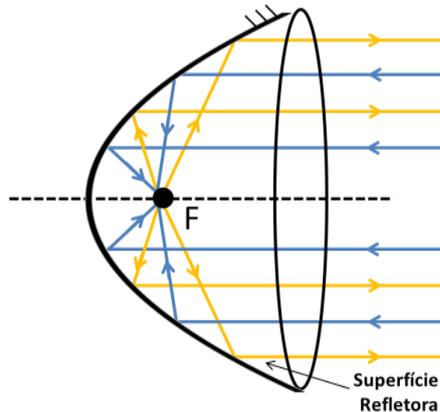
Figura 62: Reflexão no espelho elíptico



Fonte: autoria própria

- **Propriedade 5.5:** Se a fonte de luz estiver situada no foco de um espelho parabólico, todos seus raios refletidos serão paralelos ao eixo de simetria. Se os raios chegarem à superfície deste espelho paralelamente ao eixo de simetria serão refletidos para o foco.

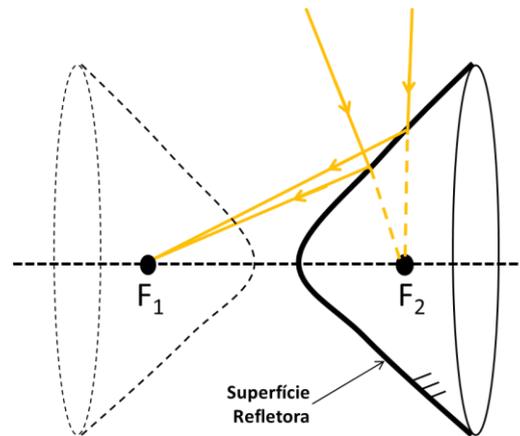
Figura 63: Reflexão no espelho parabólico



Fonte: autoria própria

- **Propriedade 5.6:** Se a luz for dirigida a um dos focos de um espelho hiperbólico será refletida em direção ao outro foco.

Figura 64: Reflexão no espelho hiperbólico



Fonte: autoria própria

5.3 Aplicações das Superfícies Cônicas

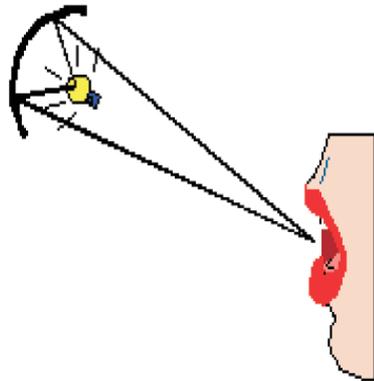
Devido às propriedades refletoras das superfícies geradas pela rotação em torno do eixo focal das seções cônicas (superfícies cônicas), conforme vimos na subseção 5.2 acima, essas superfícies tem sido utilizadas em larga escala em diversas aplicações tecnológicas. Veremos a seguir algumas dessas aplicações.

5.3.1 Superfícies refletoras elípticas

Como visto acima, as superfícies elípticas (elipsoides) tem a propriedade de que todo raio de luz que é emitido de um dos focos reflete-se sobre a superfície e passa pelo segundo foco. Essa característica das superfícies elípticas lhes possibilitam diversas aplicações. Vejamos:

- Equipamentos Odontológicos

Figura 65: Refletor elíptico



Fonte: Wikimedia commons

Figura 66: Refletor de odontólogo

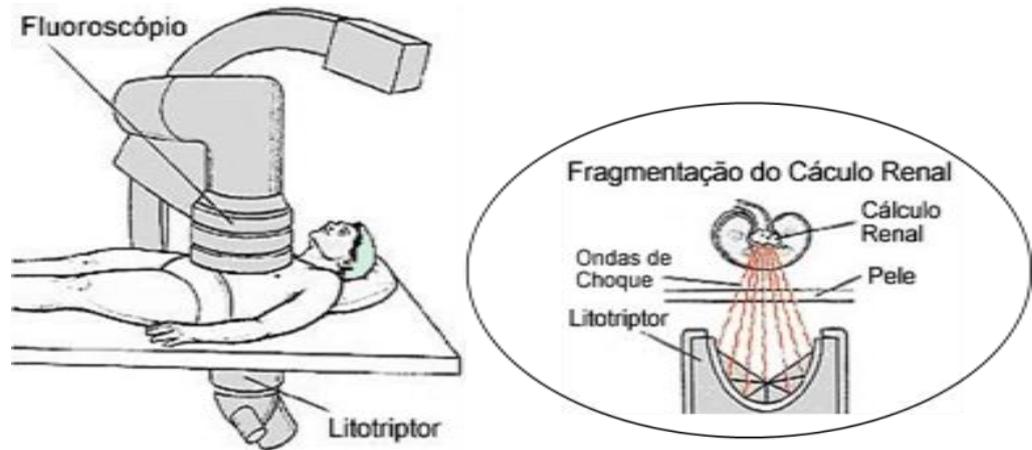


Fonte: Wikimedia commons

Os refletores de dentistas usam espelhos elípticos que têm como objetivo concentrar o máximo de luz onde se está trabalhando e também evitar que os raios luminosos ofusquem a visão do paciente, causando certo desconforto. Dessa forma, o ponto de luz do refletor consiste em um dos focos da elipse. Os raios emitidos do ponto de luz são refletidos na superfície elíptica e direcionados para o outro ponto da elipse. Assim, basta que se posicione o segundo foco da elipse sobre a região onde está trabalhando, conseguindo o máximo de luz em um único ponto.

- Tratamento de Cálculo Renal (Litotripsia)

Figura 67: Litotripsia



Fonte: Wikimedia commons

A litotripsia, processo utilizado por médicos para o tratamento de quadros de litase (pedra nos rins, calculo renal, cálculo urinário), evita a cirurgia para remoção de cálculos renais. Neste procedimento, o paciente é colocado em um aparelho no formato de elipsoide de tal forma que o calculo renal esteja posicionado em um de seus focos. Uma fonte de ondas sonoras de alta frequência (ultrassom) é colocada no outro foco. Todas as ondas sonoras emitidas pela fonte convergem para o calculo provocando vibrações que acabam por quebrá-lo em pedaços minúsculos que possam ser expelidos naturalmente e de modo indolor na urina do paciente.

- Tratamento do Câncer

Figura 68: Equipamento utilizado na radioterapia



Fonte: Wikimedia commons

A radioterapia é uma modalidade de tratamento do câncer que utiliza radiações de alta energia para combater células malignas, é usada para tratamento de tumores localizados, uma vez que só funciona na área que está recebendo a radiação. Na radioterapia, os raios devem destruir os tecidos doentes, sem afetar os tecidos saudáveis que se encontram ao redor. O equipamento utilizado é semelhante ao utilizado na litotripsia e consiste na emissão de raios oriundos de um dos focos de um espelho elíptico, centralizando no outro foco, onde se deve encontrar o tumor.

- Sala de Sussurros

Figura 69: Edifício Capitólio em Washington



Fonte: Wikimedia commons

Outra interessante aplicação da propriedade de reflexão da elipse encontra-se em algumas construções existentes em museus e exposições, chamadas salas de sussurro. Nessas salas, em forma de elipsoide, uma pessoa colocada em um dos focos pode se comunicar em voz sussurrada com outra pessoa que está exatamente no outro foco, no entanto, tal comunicação será inaudível no restante da sala. A forma da sala é de fundamental importância. Ao projetá-la, fixam-se dois pontos, os focos, que ficam na altura da cabeça das pessoas que vão se comunicar. A seguir, admite-se uma elipse com estes focos e a sala é construída de tal maneira que qualquer plano que passe por esses pontos intercepte a sala segundo uma elipse congruente com a escolhida. Assim, pelas propriedades da elipse, todas as ondas sonoras emitidas em um dos focos chegarão ao mesmo tempo no outro foco, o que proporciona uma ampliação natural do som. Exemplos de construções que utilizam esse recurso são a Catedral de S. Paulo (Londres) e o edifício do Capitólio em Washington, D. C.

5.3.2 Superfícies refletoras parabólicas

Como vimos acima, as superfícies parabólicas (paraboloides) tem a propriedade de que todo raio de luz que é emitido do foco reflete-se sobre a superfície e escapa paralelamente ao eixo focal. Se o raio chegar à superfície refletora paralelo ao eixo focal, ele irá refletir-se em direção ao foco. Essas características das superfícies parabólicas lhes possibilitam diversas aplicações. Vejamos:

- Antenas Parabólicas

Figura 70: Antena parabólica



Fonte: Wikimedia commons

Os satélites em órbita enviam sinais (ondas de rádio ou televisão) que chegam muito fracos à superfície terrestre devido a grande distância da qual são emitidos. Estes sinais chegam praticamente paralelos entre si, por isso é necessário captá-los em uma área relativamente grande e concentrá-los em um único ponto para que sejam amplificados. Desta forma, pela propriedade da reflexão e as características geométricas da parábola a superfície que atende esta necessidade é o paraboloide. No foco da parábola é posicionado um receptor que, após o processo de reflexão dos sinais que chegam do satélite, receberá uma intensidade alta de sinais suficientes para que o processo de transmissão ocorra.

- Forno Solar

Figura 71: Forno solar de Odélio na França

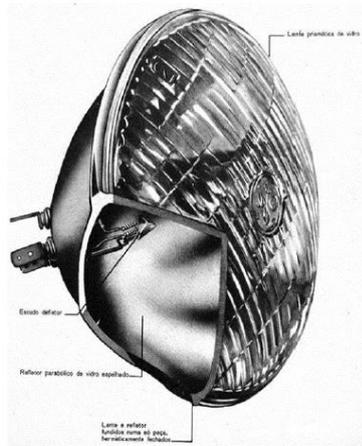


Fonte: Wikimedia commons

Semelhante às antenas, a propriedade da superfície parabólica de concentrar no foco os raios que incidem na superfície refletora paralelamente ao eixo é também aplicada nos coletores solares onde a temperatura no ponto focal pode chegar a $3.500\text{ }^{\circ}\text{C}$ e, neste ponto, é colocado o dispositivo que irá utilizar a energia concentrada. Esta energia pode ser usada para gerar eletricidade, derretimento de aço, fazer combustível de hidrogênio, ou nanomateriais. O maior forno solar do mundo está em Odeillo nos Pirinéus Orientais, na França, inaugurado em 1970.

- Faróis e Holofotes

Figura 72: Farol de carro



Fonte: Wikimedia commons

Figura 73: Facho de luz



Fonte: Wikimedia commons

Imagine que os raios de luzes façam o caminho inverso dos raios recebidos nas antenas, isto é, suponha que haja uma fonte de luz no foco da parábola. Neste caso, os raios são refletidos paralelamente ao eixo focal da parábola. Esse processo acontece nos faróis de carros e holofotes, gerando o que chamamos de fecho de luz.

5.3.3 Superfícies refletoras hiperbólicas

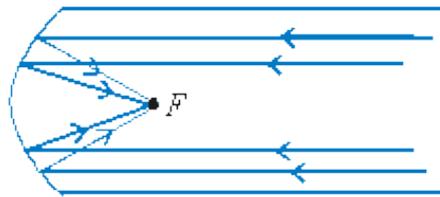
Como vimos acima, as superfícies hiperbólicas (hiperboloides) tem a propriedade de que todo raio que partir de um dos focos ao encontrar a curva será refletido em direção ao outro foco. Essa característica das superfícies hiperbólicas lhes possibilita diversas aplicações. Vejamos:

- Telescópios Refletores

(Adaptado da Revista do Professor de Matemática (RPM nº 34 - A hipérbole e os telescópios - Geraldo Ávila)

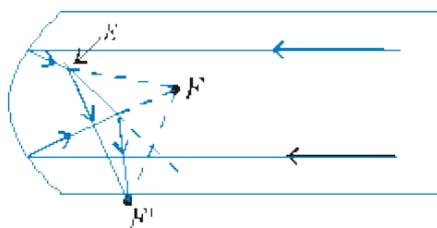
Os primeiros telescópios eram refratores, baseados na refração da luz e tinham muitos inconvenientes. As lentes refratárias deformam as imagens que elas reproduzem e ainda, decompõem a luz branca em várias cores produzindo um efeito cromático indesejado. Esses inconvenientes dos telescópios refratores não existem nos **telescópios refletores**. O telescópio refletor nada mais é do que um espelho parabólico no fundo de um tubo, como ilustra a figura abaixo. Os raios provenientes de um corpo celeste distante (estrela, galáxia, planeta, etc.) formam um feixe praticamente paralelo, que se reflete no espelho e vai formar a imagem do objeto no foco F .

Figura 74: Esquema de telescópio refletor



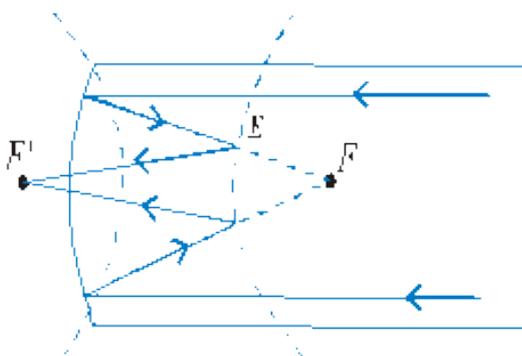
Fonte: Revista do professor de matemática (RPM – nº 34)

O problema agora é que, para observar essa imagem, o observador teria de estar com seu olho posicionado no foco da parábola, mas isso é impossível na prática. Isaac Newton (1642-1727) resolveu esse problema em seu telescópio refletor, colocando um espelho plano E entre o espelho parabólico e o foco F . Com isso, os raios que iriam formar a imagem em F são novamente refletidos e vão formar essa imagem num ponto fora do tubo do telescópio, onde se posiciona o observador.

Figura 75: Esquema de telescópio refletor (Newton)

Fonte: Revista do professor de matemática (RPM – nº 34)

Em 1672 o astrônomo francês Cassegrain propôs a utilização de um espelho hiperbólico E, como ilustra a figura a seguir, em lugar do espelho plano de Newton. Um dos focos da hipérbole coincide com o foco F da parábola.

Figura 76: Esquema de telescópio refletor (Cassegrain)

Fonte: Revista do professor de matemática (RPM – nº 34)

Agora os raios que iriam formar a imagem no foco F são refletidos pelo espelho E e formarão essa imagem no outro foco F' da hipérbole. Para compreender a vantagem desse espelho hiperbólico de Cassegrain sobre o espelho plano de Newton, devemos observar que o espelho plano não pode ficar muito próximo do foco F, sob pena de o ponto F' da Figura 5.20 ficar dentro do telescópio; em consequência, o espelho plano precisa ser de razoável tamanho, o que resulta num bloqueio significativo da luz incidente no espelho parabólico que forma a parte principal do telescópio.

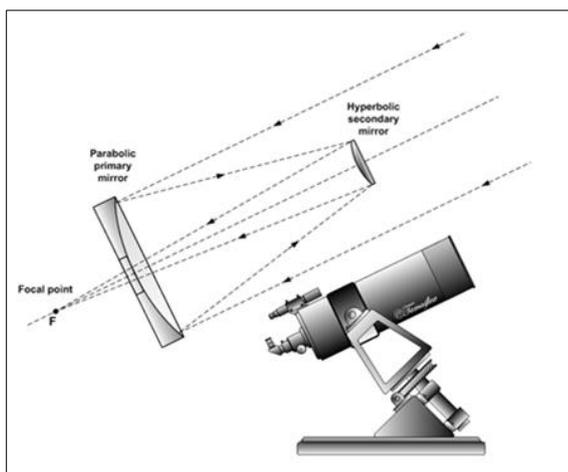
O espelho de Cassegrain, pelo contrário, pode ser construído mais próximo ou mais afastado do foco F, mantendo-se fixa a distância FF' entre os focos da hipérbole; em consequência, o tamanho desse espelho pode ser maior ou menor. A distância entre os focos F e F' também pode ser alterada para mais ou

para menos, sem mudar a posição do foco F . A combinação desses fatores permite grande flexibilidade na montagem do refletor hiperbólico E , adequando-a, assim, às exigências das observações.

Essas montagens de Cassegrain somente começaram a ser utilizadas nos telescópios cerca de um século após terem sido propostas. Desde então passaram a ser largamente usadas, e hoje em dia estão presentes, não apenas nos telescópios óticos, mas também nos radiotelescópios.

O famoso telescópio ótico do observatório de Monte Palomar, que fica 80 km a nordeste de San Diego, na Califórnia, utiliza várias montagens do tipo de Cassegrain.

Figura 77: Esquema de telescópio hiperbólico



Fonte: Wikimedia commons

5.4 Outras Aplicações das Seções Cônicas

Ainda devido às propriedades refletoras das superfícies geradas pela rotação em torno do eixo focal das seções cônicas (superfícies cônicas), conforme vimos na subseção 5.2 acima, e também devido as suas formas, essas curvas possuem ainda diversas outras aplicações, como veremos a seguir.

5.4.1 Arquitetura e Engenharia

Devido às suas propriedades físicas e estéticas, os arcos de cónicas surgem frequentemente em Engenharia e Arquitetura, em pontes, pórticos, cúpulas, torres e arcos. Por exemplo, o cabo de suspensão de uma ponte, quando o peso total é uniformemente distribuído segundo o eixo horizontal da ponte, toma a forma de uma parábola.

- Igreja da Pampulha – BH/MG

Figura 78: Igreja da Pampulha – BH/MG



Fonte: <http://www.lumini.com.br/>

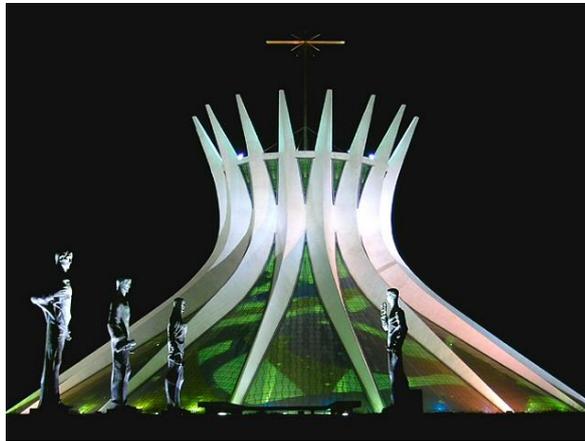
A Igreja São Francisco de Assis da Pampulha, em Belo Horizonte, Minas Gerais, foi inaugurada em 1943. O projeto arquitetônico da igreja é de Oscar Niemeyer e cálculo estrutural de Joaquim Cardozo. Foi o último prédio a ser inaugurado do Conjunto Arquitetônico da Pampulha.

É considerada a obra-prima do conjunto. No projeto da capela Oscar Niemeyer faz novos experimentos em concreto armado, abandonando a laje sob

pilotis e criando uma abóbada parabólica em concreto, até então só utilizada em hangares. A abóbada na capela da Pampulha seria ao mesmo tempo estrutura e fechamento, eliminando a necessidade de alvenarias. Inicia aquilo que seria a diretriz de toda a sua obra: uma arquitetura onde será preponderante a plasticidade da estrutura de concreto armado, em formas ousadas, inusitadas e marcantes.

- Catedral de Brasília

Figura 79: Catedral de Brasília



Fonte: <http://www.wikipedia.com>

Projetada pelo arquiteto Oscar Niemeyer, com cálculo estrutural do engenheiro Joaquim Cardoso, foi o primeiro monumento a ser criado em Brasília.¹ Sua pedra fundamental foi lançada em 12 de setembro de 1958. Teve sua estrutura pronta em 1960, onde aparecia somente a área circular de setenta metros de diâmetro, da qual se elevam dezesseis colunas de concreto (pilares de secção parabólica) num formato hiperboloide, que pesam noventa toneladas. O engenheiro Joaquim Cardozo foi o responsável pelo cálculo estrutural que permitiu a construção da catedral.

- Usina nuclear de Temelin - República Tcheca

Figura 80: Usina nuclear de Temelin - República Tcheca



Fonte: <http://www.wikipedia.com>

As torres de refrigeração de uma usina nuclear, como as mostradas na figura acima, geralmente são estruturas em formato de hiperboloide de uma folha gerado pela rotação de uma hipérbole em torno de um de seus eixos. “Podemos mostrar que o hiperboloide de uma folha gerado pela rotação de uma hipérbole em torno do seu eixo transversal é também gerado por uma reta. Ou seja, ele pode ser considerado como sendo formado por uma união de retas (superfície regrada). Assim, seu formato é usado na construção de centrais de energia atômica, onde barras de aço retilíneas (que têm alta resistência) se cruzam para obter estruturas extremamente fortes.” (SATO, J., 2005).

- Coliseu – Roma/Itália

Figura 81: Coliseu – Roma/Itália



Fonte: <http://www.wikipedia.com>

O Coliseu, também conhecido como Anfiteatro Flaviano ou Flávio, é um anfiteatro construído no período da Roma Antiga. Deve seu nome à expressão

latina Colosseum, devido à estátua colossal do imperador romano Nero, que ficava perto da edificação. No Coliseu eram realizados diversos espetáculos, com os vários jogos realizados na urbe. Os combates entre gladiadores, chamados muneras, não eram pagos pelo Estado, mas sim por indivíduos em busca de prestígio e poder. É construído em mármore, pedra travertina, ladrilho e tufo (pedra calcária com grandes poros). A sua planta elíptica mede dois eixos que se estendem aproximadamente de 190 metros por 155 metros.

- Ponte Akashi-Kaikyo - Japão

Figura 82: Ponte Akashi-Kaikyo - Japão



Fonte: <http://www.wikipedia.com>

Ponte pênsil ou ponte suspensa é um tipo de ponte sustentada por cabos ou tirantes de suspensão. As primeiras pontes suspensa modernas, com plataformas niveladas, são datadas do século XIX, porém existem relatos desse modelo de ponte desde o século III. Nessas pontes, os cabos suspensos sustentam todo o corpo da ponte, distribuindo o peso uniformemente. Esses cabos formam arcos de parábolas. Na figura acima temos a Ponte Akashi-Kaikyo, que é a maior ponte pênsil do mundo, inaugurada em 1998 com 3911 m de comprimento total e 1991 m de vão central. Localizada no estreito de Akashi (Japão) entre a cidade de Kobe e a ilha Awaji.

5.4.2 Astronomia

O astrónomo e matemático alemão Johannes Kepler precisou de muita persistência, de muito trabalho e de muitas observações astronômicas, para concluir, em 1609, que:

"Cada planeta move-se em torno do Sol com uma trajetória que é uma elipse, da qual o Sol ocupa um dos focos." (1ª Lei de Kepler)

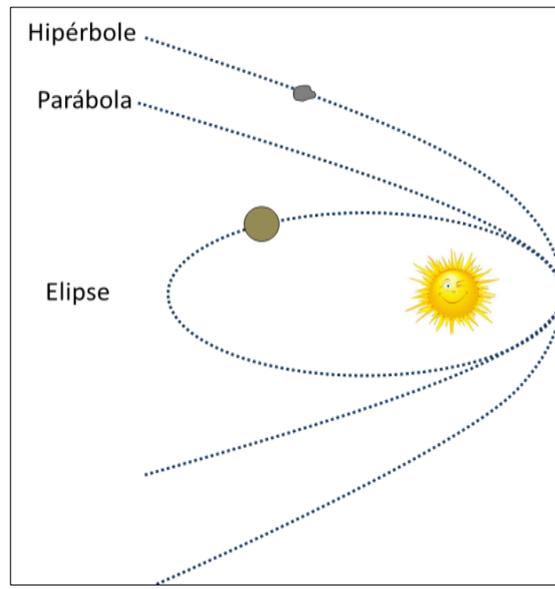
Esta lei rege os planetas naturais, cometas e asteroides, bem como todos os satélites artificiais e astronaves, cujas trajetórias podem, ser cuidadosamente pré-estabelecidas pelos matemáticos, minuto a minuto.

Os cometas podem descrever três tipos de órbitas, sendo elas elípticas, parabólicas ou hiperbólicas. Os cometas cujas órbitas são elípticas se caracterizam por serem periódicos e mover-se ao redor do Sol que ocupa um dos focos da trajetória elíptica.

Como os cometas têm massa muito pequena, a influência gravitacional sobre os planetas é quase nula. Mas devido às perturbações gravitacionais do Sol e de alguns planetas muito grandes como Júpiter e Saturno, a órbita de alguns cometas pode se alterar.

Os cometas cujas órbitas são hiperbólicas ou parabólicas não são periódicos, pois sua órbita não é fechada. Dessa maneira aparece uma única vez surgindo das profundezas do espaço e afastando da mesma maneira desaparecendo para sempre.

Outro fator que interfere nas órbitas dos cometas é a velocidade que determina uma órbita elíptica, parabólica ou hiperbólica lembrando que o Sol coincide com o foco da cônica formada pela trajetória do planeta. A velocidade é o fator determinante para o tipo de trajetória de cada cometa.

Figura 83: Movimento de corpos celestes

Fonte: autoria própria

5.4.3 Sistema de Navegação Loran

O sistema LORAN de localização em navegação (Navegação de Longa Distância) permite ao navegante de um navio ou avião achar sua posição sem confiar em marcos visíveis. Usando para isso o conceito de lugar geométrico que define a hipérbole. Seu princípio básico de funcionamento é bastante simples, o qual passamos a descrever:

Estações de rádio situadas simultaneamente em posições F_1 e F_2 emitem sinais que são recebidos pelo navegante situado numa posição P. O navegante mede o intervalo de tempo decorrido entre o recebimento dos sinais.

$$\Delta T = T_2 - T_1 \quad (75)$$

entre o instante T_2 , momento em que ele recebe o sinal enviado por F_2 , e o instante T_1 , momento em que ele recebe o sinal de F_1 .

Se t_1 e t_2 são, respectivamente, o intervalo de tempo que leva o sinal emitido por F_1 e por F_2 para alcançar a posição do navegante (P), então as distâncias do navegante às torres de controle F_1 e F_2 são dadas por

$$PF_1 = c \cdot t_1 \quad \text{e} \quad PF_2 = c \cdot t_2 \quad (76)$$

onde " c " é a velocidade de propagação do som no ar.

Portanto, a diferença entre a distância da posição do navegante (P) aos pontos F_1 e F_2 é dada por

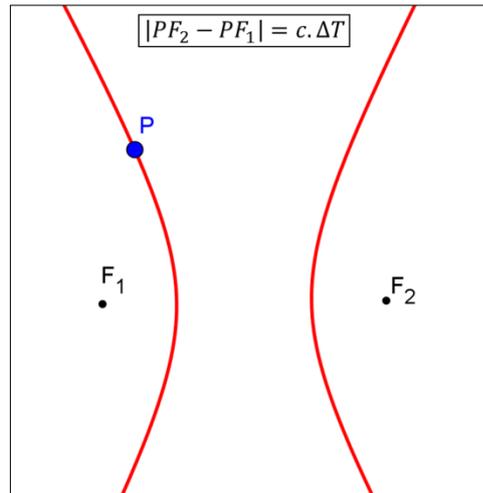
$$PF_2 - PF_1 = c \cdot t_2 - c \cdot t_1 = c \cdot \Delta t = c \cdot \Delta T \quad (77)$$

Portanto, embora o navegante não possa medir os tempos t_1 e t_2 diretamente, sem saber quando os sinais foram enviados, ele pode medir com precisão a diferença entre os instantes que os sinais foram recebidos (T_1 e T_2), e, sendo os sinais emitidos simultaneamente das estações F_1 e F_2 , essa diferença é precisamente a diferença de tempo entre os tempos gastos pelos sinais até chegar ao navegante (t_1 e t_2). Assim, como visto na equação (77) acima, a diferença entre os tempos é o suficiente para determinar que o navio esteja em algum ponto P da hipérbole de equação:

$$|PF_2 - PF_1| = c \cdot \Delta T \quad (78)$$

Assim, o navegante pode traçar a sua Hipérbole de Posição em relação às estações de rádios em F_1 e F_2 .

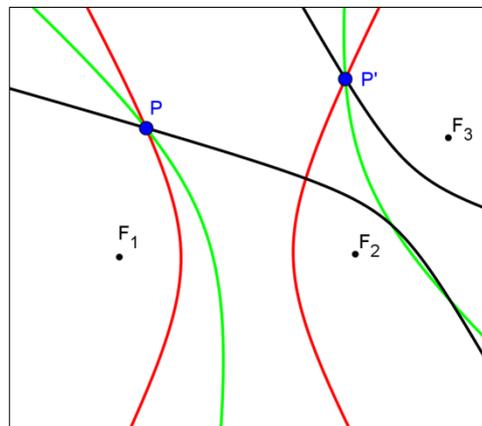
Figura 84: Hipérbole de posição em relação às estações de rádio nos pontos F_1 e F_2 .



Fonte: autoria própria

Contudo, para saber a sua posição exata, ele precisa de uma terceira estação em F_3 . Dessa forma, traçando as três hipérbolas de posição em relação às estações em F_1 , F_2 e F_3 , tomadas duas a duas, ele poderá encontrar sua posição nos pontos onde as três hipérbolas se intersectam.

Figura 85: Hipérbole de posição em relação às estações de rádio nos pontos F_1 , F_2 e F_3

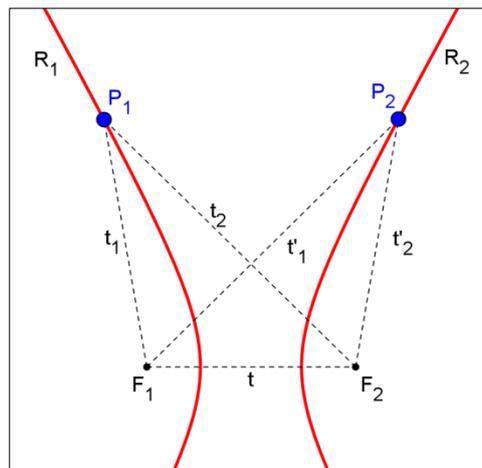


Fonte: autoria própria

Nessa situação, o navegante tem ainda duas opções que podem vir a ser a sua posição exata, os pontos P e P' . Para eliminar essa ambiguidade, a maioria dos sistemas hiperbólicos de navegação usa o processo de escalonamento das emissões. Agrupando as transmissões em redes de três ou quatro estações. Em uma rede, uma estação transmite primeiro e as demais só emitem os respectivos sinais ao receberem a onda de rádio emitida pela primeira estação.

Vamos analisar, por exemplo, a hipérbole de posição em relação a F_1 e F_2 , para determinarmos em qual ramo se encontra o ponto P . Suponha que o tempo que o sinal emitido de F_1 leva para chegar em F_2 seja t e este tempo seja conhecido (o que é fácil determinar previamente, visto que as estações têm posições fixas). Suponha que F_2 só emitirá um sinal após receber o sinal de F_1 , isto é, após o tempo t . Seja R_1 e R_2 os ramos da hipérbole em relação aos focos F_1 e F_2 respectivamente. Seja ainda P_1 e P_2 , pontos de R_1 e R_2 , respectivamente. Seja ainda t_1 , t'_1 , t_2 e t'_2 os tempos necessários para o sinal percorrer as distâncias conforme expresso na Figura 86 abaixo. Seja por fim T_1 e T_2 os momentos em que o navegador recebeu os sinais das estações F_1 e F_2 , respectivamente.

Figura 86: Hipérbole de posição em relação às estações de rádio nos pontos F_1 e F_2



Fonte: autoria própria

Note que independente do navegador está no ramo R_1 ou R_2 , o sinal da estação F_2 sempre chega após o sinal de F_1 , isto é, $T_2 > T_1$. Para verificar isso, basta perceber que:

- se o navegador está em P_1 , então $T_2 = t + t_2 > t_1 = T_1$ (pela desigualdade triangular no $\Delta P_1 F_1 F_2$);
- se o navegador está em P_2 , então $T_2 = t + t'_2 > t'_1 = T_1$ (pela desigualdade triangular no $\Delta P_2 F_1 F_2$).

Portanto, se o navegador está em:

$$\begin{aligned}
 \boxed{P_1}: \quad \overline{P_1 F_2} > \overline{P_1 F_1} & \Rightarrow t_2 > t_1 \Rightarrow (t_2 - t_1) > 0 \\
 \Rightarrow \Delta T = T_2 - T_1 = (t + t_2) - t_1 = t + (t_2 - t_1) > t \\
 & \Rightarrow \boxed{\Delta T > t}
 \end{aligned} \tag{79}$$

$$\begin{aligned}
 \boxed{P_2}: \quad \overline{P_2 F_2} < \overline{P_2 F_1} & \Rightarrow t'_2 < t'_1 \Rightarrow (t'_2 - t'_1) < 0 \\
 \Rightarrow \Delta T = T_2 - T_1 = (t + t'_2) - t'_1 = t + (t'_2 - t'_1) < t \\
 & \Rightarrow \boxed{\Delta T < t}
 \end{aligned} \tag{80}$$

Portanto, conhecendo o tempo de espera " t " entre o envio da estação F_1 e F_2 , quando o navegador determinar a diferença de tempo ΔT entre a recepção dos sinais de F_1 e F_2 , se está for maior que t , então o navegador encontra-se no ramo R_1 , referente à estação F_1 , caso seja maior que t , então se encontra no ramo R_2 , referente à estação F_2 .

Para encontrar a constante " $2a$ " da hipérbole de posição nesse sistema de estações em rede, deve proceder da seguinte forma. Se o navegado se encontra no ramo:

$$\begin{aligned}
 \boxed{R_1}: \quad \Delta T = t + (t_2 - t_1) & \Rightarrow \Delta T - t = (t_2 - t_1) > 0 \\
 \Rightarrow |\overline{PF_2} - \overline{PF_1}| = |c \cdot t_2 - c \cdot t_1| = |c \cdot (t_2 - t_1)| = |c \cdot (\Delta T - t)| = 2a
 \end{aligned} \tag{81}$$

$$\begin{aligned}
 \boxed{R_2}: \quad \Delta T = t + (t_2 - t_1) & \Rightarrow \Delta T - t = (t'_2 - t'_1) < 0 \\
 \Rightarrow |\overline{PF_2} - \overline{PF_1}| = |c \cdot t'_2 - c \cdot t'_1| = |c \cdot (t'_2 - t'_1)| = |c \cdot (\Delta T - t)| = 2a
 \end{aligned} \tag{82}$$

Ou seja, para determinar a hipérbole de posição no caso de estações em rede, basta conhecer a diferença de tempo entre a recepção dos sinais (ΔT) e o tempo de transmissão do sinal entre as estações (t). E neste caso, ainda é possível determinar em qual dos dois ramos da hipérbole se encontra o navegador ($\Delta T > t$

ou $\Delta T < t$), acabando com as ambiguidades de posições e determinando precisamente a posição P do navegador. Todo esse processo é computadorizado, sendo as hipérboles de posição e a posição P do navegador continuamente expostas no mapa da navegação, possibilitando ao navegante visualizar a sua posição e tomar suas decisões.

PARTE II

Ambiente Dinâmico de Ensino das Seções Cônicas – ADESC

6 Conhecendo o ADESC

O “Ambiente Dinâmico de Ensino das Seções Cônicas – ADESC” é um ambiente de ensino e aprendizagem das Seções Cônicas construído na forma de página da world wide web (www) que pode ser utilizado de modo online, acessando o endereço “www.adesc.blog.br” ou off-line, baixando-o em “<http://1drv.ms/PAVdnV>”. No caso de ser utilizado Offline, basta abrir o arquivo “ABRIR.HTML”. Recomendamos fortemente que seja utilizado o browser (navegador) “GOOGLE CHROME” da empresa Google, que pode ser obtido no endereço “<https://www.google.com/intl/pt-BR/chrome/browser/>”. O motivo dessa escolha é que o navegador já dispõe de um complemento JAVA, necessário ao funcionamento adequado do ambiente. Recomendamos ainda que o professor dê preferência pelo uso off-line do ambiente, haja vista que nessa forma de acesso a execução do mesmo é muito mais rápida, já que não é necessário esperar carregar os elementos do ambiente, como acontece no uso online.

O ambiente foi desenvolvido com o intuito de apresentar uma nova proposta de ensino das Seções Cônicas, tanto com relação aos conteúdos abordados quanto a forma de apresentação do mesmo. No que concerne ao conteúdo, o ADESC foi desenvolvido seguindo integralmente a sequência de conteúdos para o ensino das Seções Cônicas proposta na PARTE I deste trabalho. Já com relação à forma de apresentação do conteúdo, o ambiente traz o diferencial do dinamismo e a praticidade inerente a um ambiente de ensino dinâmico. Recheado de construções geométricas de livre manipulação, o ambiente propicia ao usuário a possibilidade de interagir com a matemática, manipulando entes geométricos, observando, construindo, resolvendo problemas e conseqüentemente inferindo sobre propriedades, relações, condições, bem como descobrindo novos conceitos envolvidos.

A proposta do ADESC é desenvolver o conteúdo didático proposto na parte I em um ambiente computacional, a partir de uma abordagem dinâmica, buscando contribuir para a compreensão e articulação dos conteúdos envolvidos,

de forma autônoma e criativa, integrando as formas de pensamento geométrico e algébrico.

A parte dinâmica do ADESC, em sua maioria, compreende objetos digitais construídos no software de geometria dinâmica, GeoGebra, nas suas versões 4.0, versão de construções em 2D, e 5.0, uma versão beta (em fase de testes) do software que permite construções em 3D.

O GeoGebra é um software livre que possibilita que as construções geométricas sejam realizadas de maneira dinâmica e interativa, permitindo que as mesmas sejam exploradas com mais riqueza de detalhes do que as construções tradicionais. Além disso, ele também tem a vantagem de apresentar, simultaneamente, duas representações diferentes de um mesmo objeto: a representação geométrica e a representação algébrica. Esse software foi criado em 2001 pelo Professor austríaco Markus Hohenwarter e uma equipe computacional de programadores, como resultado de uma dissertação de mestrado e posteriormente foi melhorado na tese de doutorado. É de fácil utilização e totalmente gratuito e está disponível em “<http://www.geogebra.org>”.

A escolha do software GeoGebra para o desenvolvimento das construções do ADESC, além da facilidade de manuseio do programa e da sua gratuidade, deve-se ao fato de que com ele podemos construir e identificar vários entes matemáticos com duas diferentes vistas dos objetos: a zona Gráfica e a zona Algébrica (ou numérica). Elas permitem mostrar os objetos matemáticos em duas diferentes representações, graficamente e algebricamente, com o grande diferencial de que todas as representações do mesmo objeto estão ligadas dinamicamente e adaptam-se automaticamente às mudanças realizadas em qualquer delas.

Em termos gerais, o ADESC estrutura-se numa sequência de páginas, todas elas com links e botões que permitem uma navegação sobre todo o ambiente. São elas:

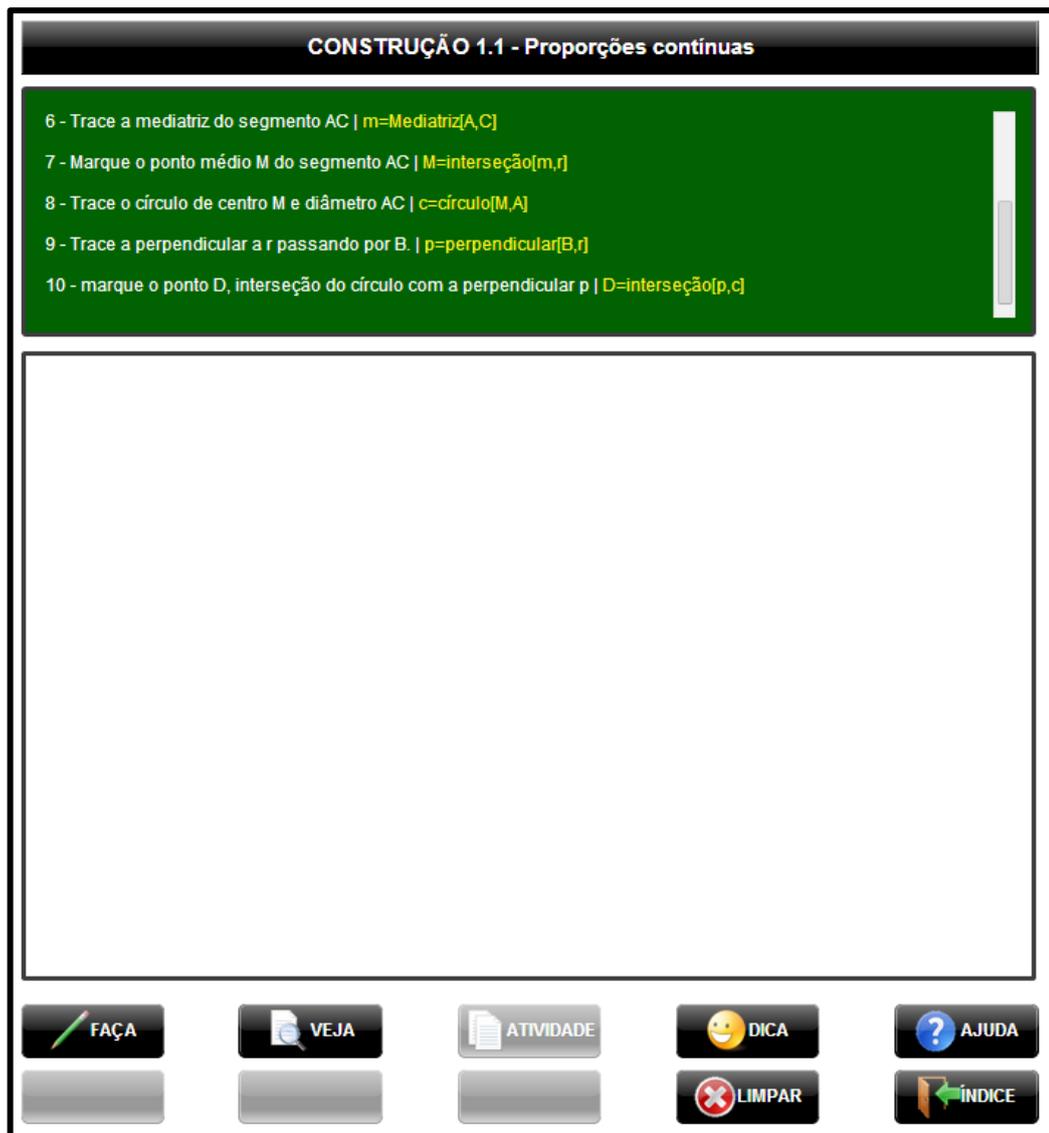
- Home
- PÁGINA 0: Índice
- PÁGINA 1: Origem das seções cônicas

- PÁGINA 2: As contribuições de Apolônio
- PÁGINA 3: Cônicas como lugar geométrico no plano
- PÁGINA 4: Estudo analítico das cônicas
- PÁGINA 5: Aplicações das cônicas
- PÁGINA 6: Apêndice

Em cada uma das páginas “PAGINA 1 a 5”, o conteúdo referente ao título de cada página, conforme foi apresentado na Parte I deste trabalho, aparece na forma de texto, acompanhado das mesmas figuras e imagens, mas acrescido de VÍDEOS e CONSTRUÇÕES DINÂMICAS. São essas “Construções” que fazem o diferencial da apresentação do conteúdo por meio do ADESC. Nelas, o usuário poderá construir ou manipular entes geométricos e comprovar mediante observações, as propriedades, leis, definições e relações que tenham sido mencionadas no texto teórico.

As “Construções” consistem em quadros dinâmicos que aparecem no meio do texto, quando necessário uma observação e/ou manipulação de elementos geométricos para facilitar a compreensão das informações expostas naquele momento. Veja abaixo o exemplo de uma construção do ADESC e a descrição dos elementos presentes:

Figura 87: Exemplo de uma Construção do ADESC.



Fonte: autoria própria

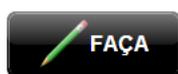
Todas as construções (elementos dinâmicos) terão essa aparência geral. A construção inicia com uma **Barra de Títulos** na cor preta, com informações de identificação, como numeração e assunto abordado. Elas são identificadas de acordo com a ordem em que aparecem no ambiente, explicitando-se a página e a ordem dentro da mesma. Assim, na imagem acima, na barra de título da construção temos: “CONSTRUÇÃO 1.1 – Proporções Contínuas”, de onde podemos concluir, pela numeração “1.1”, que se trata de uma construção da “PÁGINA 1: Origem das Seções Cônicas” e é a primeira dessa página. Já o termo “Proporções contínuas”, indica que trata de uma construção referente a esse assunto.

No **Quadro Verde** logo abaixo da barra de título, aparecem os procedimentos que deverão ser realizados para um manuseio adequado da construção, bem como, dicas, descrições, definições, passo-a-passos para realização de construções etc. A barra de rolagem vertical presente na lateral direita do quadro, permite visualizar todas as informações ali presentes. Os textos nesse quadro aparecerão na cor **Branca**, quando tratar-se procedimento que deva ser realizado pelo usuário para construção e/ou manipulação de determinado objeto, ou na cor **Amarelo**, quando se tratar de orientações, comando, dicas, informações sobre os procedimentos a serem executados. Assim, por exemplo, no texto:

8 - Trace o círculo de centro M e diâmetro AC | $c=círculo[M,A]$

entende-se que no passo “8” o usuário deve construir um círculo de centro M e diâmetro do tamanho do segmento \overline{AC} e uma forma de conseguir isso é utilizando o comando $c = círculo[M, A]$.

O **Quadro Branco**, no centro da construção, é o ambiente de trabalho (plotagem). É nele que serão construídas e/ou visualizados os objetos digitais (construções). Logo abaixo temos alguns **Botões** de manipulação da Construção. Vejamos a função de cada um deles:



Abre o software GeoGebra no ambiente de plotagem, pronto para ser utilizado.



Executa um objeto digital no ambiente de plotagem (área de trabalho), permitindo a manipulação e visualização do objeto.



Abre uma atividade que explora os conceitos, definições e propriedades relacionados à construção. A atividade, a depender da construção, pode surgir no ambiente de trabalho como um objeto do GeoGebra, ou saltar na tela

como imagem (janela Po pup), ou ainda, abrir em uma nova janela em um arquivo pdf.



Abre uma tela no estilo Popup com "Dicas rápidas" e "Atalhos de mouse e teclado" para melhor manuseio do software GeoGebra.



Abre em uma nova janela, no formato de arquivo Portable Document Format (pdf), um manual simplificado do software GeoGebra especialmente construído para o ADESC.



Limpa o ambiente de trabalho.



Abre a página "Apêndice - A1 - Índice das construções" do ADESC. Onde se pode ver resumidamente todas as construções presentes no ambiente, e navegar por cada uma delas.



Os botões em cinza-claro estão "Inativos" para esta determinada construção, podendo em outras construções aparecer "Ativos" e com funções específicas.

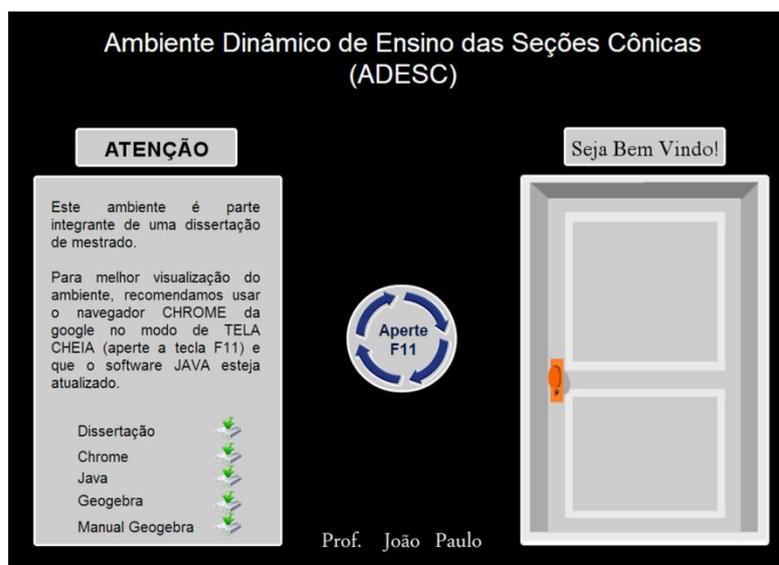
7 Visão Geral do ADESC

Neste capítulo iremos apresentar o ambiente partindo de uma visão geral, para alcançarmos finalmente seus elementos constituintes. Descreveremos cada uma das páginas na sequência em que elas aparecem. Como a parte teórica do conteúdo é semelhante à que foi exposta nesse trabalho em sua PARTE I, nesse momento, será dado ênfase aos elementos dinâmicos do ADESC, seguido de uma breve descrição das suas funcionalidades e do que o usuário encontrará em cada um deles.

Temos consciência que a melhor descrição ainda não será suficiente para transmitir a satisfação e o prazer de se construir o conhecimento mediante a manipulação de objetos dinâmicos. Portanto, faz-se necessário que o leitor, após a leitura das descrições abaixo, acesse o ambiente e tire suas próprias conclusões.

7.1 Home

Figura 88: Página Home - ADESC



Fonte: autoria própria

Na Figura 88 acima, vemos a tela de apresentação (ou Home) do ADESC. Nela podemos ver o nome do ambiente na parte superior, um quadro à esquerda

com uma breve descrição do ambiente e links para: manual do GeoGebra, dissertação (este trabalho), Java (página de atualização do software Java, necessário à execução dos elementos dinâmicos – recomendamos que o JAVA esteja na versão mais atual) e GeoGebra (download do software, caso o usuário queira instalá-lo em seu computador). Ainda ao centro temos um círculo com o lembrete “Aperte F11”, pois, para melhor aproveitamento dos espaços da tela do computador, é recomendado utilizar o ambiente no modo “tela cheia”, o que é acionado, apertando-se a referida tecla. Mais abaixo temos o nome do autor do ambiente e ao lado direito uma porta que abre ao clique do mouse, permitindo a entrada do usuário no ambiente dinâmico e no mundo das Seções Cônicas.

7.2 Índice

Figura 89: Página Índice - ADESC

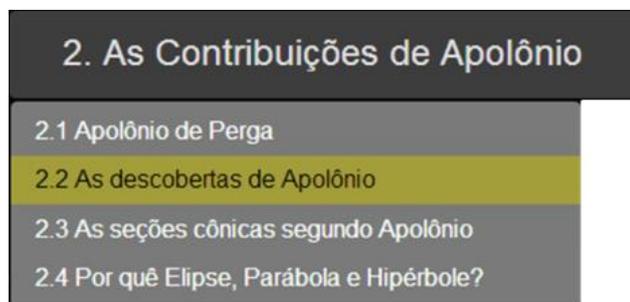


Fonte: autoria própria

Essa é a segunda página do ADESC, que será acessada logo após o usuário clicar sobre a porta presente na página Home. Nesta página, temos seis botões cada um deles leva a uma das páginas “PAGINAS 1 a 5” que apresentam toda a história das Seções Cônicas, como visto na Parte I deste trabalho. Temos ainda o botão referente à página APÊNDICE e outros links no rodapé. Cada um desses

botões do índice, quando acionados, abre uma lista de subtópicos. Veja figura abaixo:

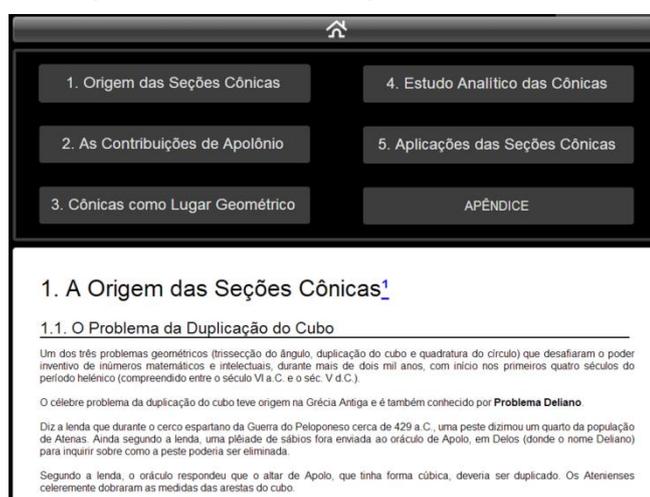
Figura 90: Botões da página Índice - ADESC



Fonte: autoria própria

Quando clicamos em uma opção, uma página de texto se abre imediatamente, apresentando o assunto escolhido, conforme se ver na figura a seguir:

Figura 91: Imagem da “PÁGINA 1 - Origem das Seções Cônicas” – ADESC



Fonte: autoria própria

Uma barra de rolagem vertical nos permite visualizar toda a página e as informações contidas. Passando por todos os elementos dinâmicos (figuras, fotos, vídeos, construções) até chegarmos ao fim da página, no qual encontramos as seguintes opções:

Figura 92: Botões ao final da “PÁGINA 1 - Origem das Seções Cônicas” – ADESC



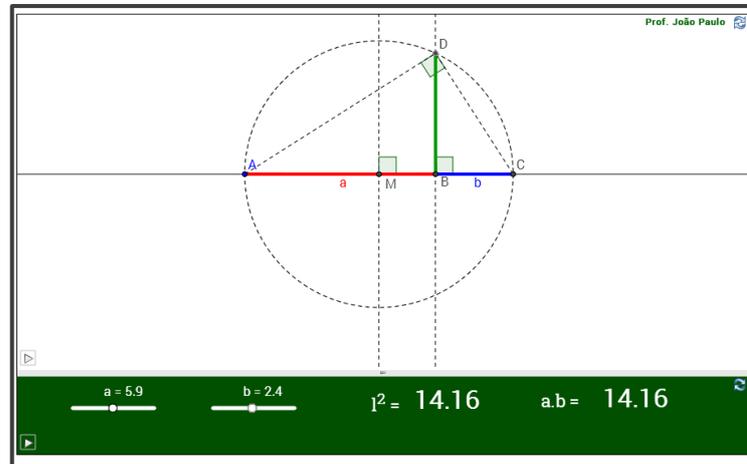
Fonte: autoria própria

Nessa imagem vemos três setas, as quais permitem, respectivamente da direita para esquerda: voltar à página anterior, subir ao topo da página atual ou ir à página seguinte. Logo abaixo das setas, o botão em cinza permite visualizar a página “Índice” do ambiente.

Apresentamos a seguir, uma breve descrição de todas as Construções e Elementos dinâmicos presentes em cada uma das páginas de texto de 1 a 5.

7.3 PÁGINA 1: Origem das seções cônicas

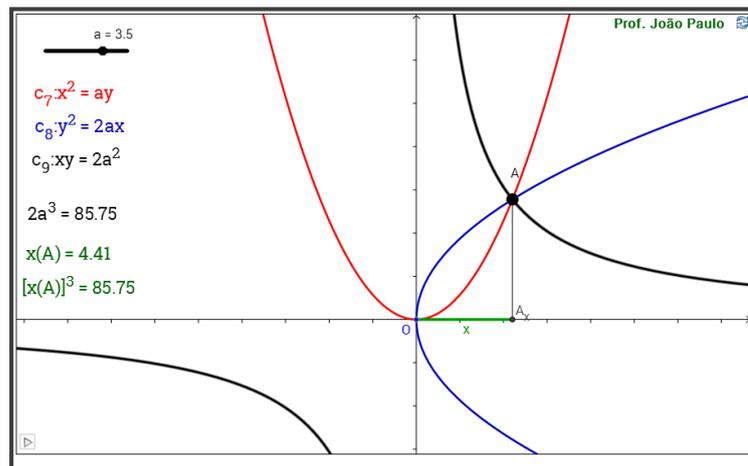
Figura 93: CONSTRUÇÃO 1.1 - Proporções contínuas



Fonte: autoria própria

Nesta construção é demonstrado um método geométrico utilizado pelos matemáticos gregos para descobrir a média geométrica entre dois valores a e b , isto é, dado um retângulo de lados a e b , como encontrar um quadrado de lado l e de mesma área do retângulo. Esse processo era chamado de "Quadrar o retângulo de lados a e b ".

Figura 94: CONSTRUÇÃO 1.2 – Curvas de Hipócrates

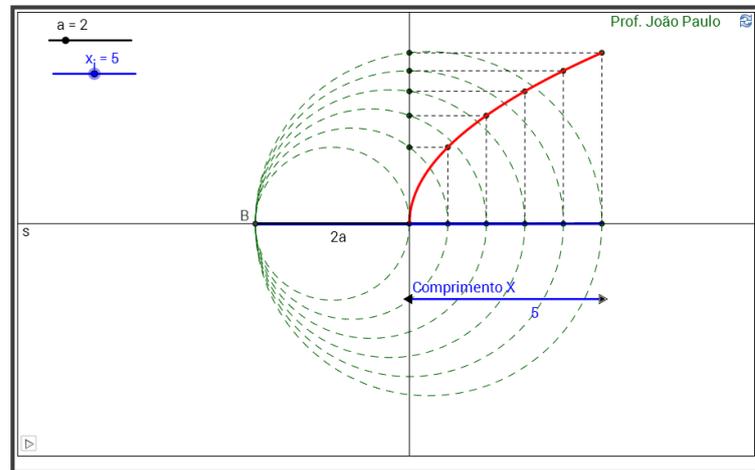


Fonte: autoria própria

Nesta construção são plotadas, em um sistema cartesiano ortogonal, as curvas expressas pelas equações: $x^2 = ay$, $y^2 = 2ax$ e $xy = 2a^2$, descobertas por Hipócrates de Quio (480 a.c) durante a tentativa de resolução do problema da duplicação do cubo por meio das proporções contínuas. Após a plotagem simultânea das três curvas em um único sistema de eixos ortogonais, percebe-se um único ponto em comum, cuja abscissa expressa a resposta para o problema da duplicação

do cubo, isto é, o lado de um cubo cujo volume é igual ao dobro do volume de um cubo de aresta "a" dado previamente.

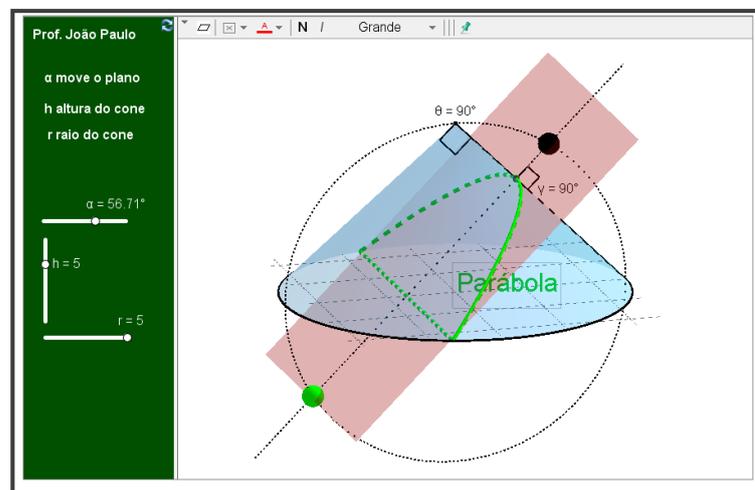
Figura 95: CONSTRUÇÃO 1.3 – Traçado da curva $y^2 = 2ax$ por Menaecmus



Fonte: autoria própria

Nesta construção, mostra-se um método euclidiano, possivelmente utilizado por Menaecmus para traçar um esboço da curva $y^2 = 2ax$ de Hipócrates (mais tarde conhecida como Parábola).

Figura 96: CONSTRUÇÃO 1.4 – Seções cônicas segundo Menaecmus

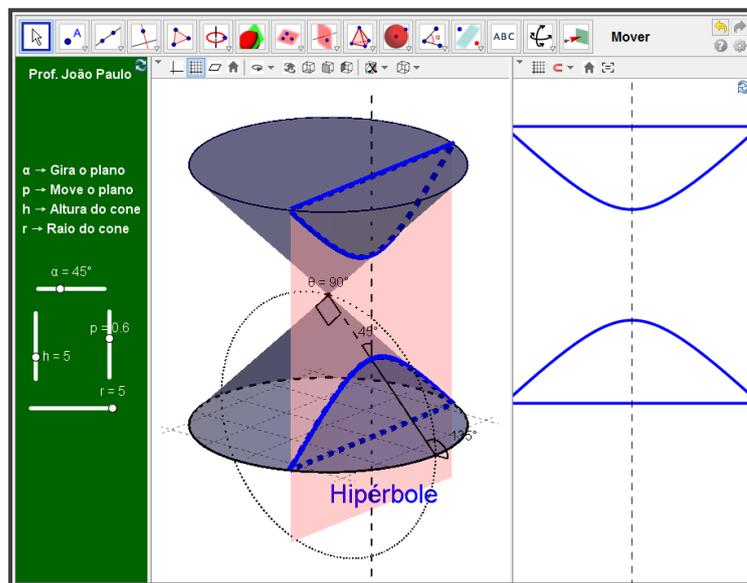


Fonte: autoria própria

Nesta construção em 3D observam-se as famílias de curvas obtidas pela secção de um cone de ângulo do vértice variável por um plano perpendicular a uma de suas geratrizes. Esse foi o método utilizado por Menaecmus para definir as Seções Cônicas, mais tarde conhecidas como: Elipse, Parábola e Hipérbole. Segundo Menaecmus, conforme o ângulo do vértice do cone fosse agudo, reto ou obtuso, teríamos respectivamente uma Elipse, Parábola e Hipérbole.

7.4 PÁGINA 2: As contribuições de Apolônio

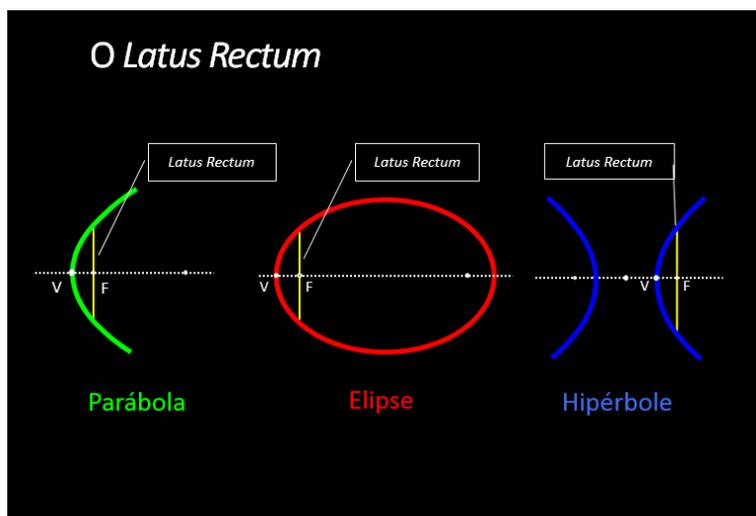
Figura 97: CONSTRUÇÃO 2.1 – Seções cônicas segundo Apolônio



Fonte: autoria própria

Nesta construção em 3D mostra-se o processo pelo qual as Seções Cônicas foram redefinidas pelo matemático Apolônio de Perga (262 a 190 ac.). Segundo ele, as cônicas poderiam ser obtidas pela secção de um único cone duplo (independente do ângulo do vértice) por um plano. Conforme o ângulo do plano de secção em relação à geratriz do cone seja, maior, igual ou menor que o ângulo do vértice do cone, tem-se, respectivamente, uma elipse, uma parábola e uma hipérbole.

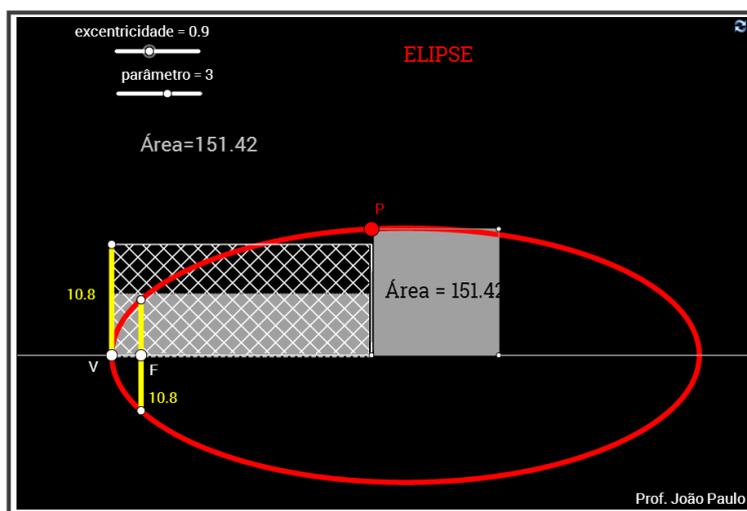
Figura 98: Apresentação – nomes das seções cônicas



Fonte: autoria própria

Nesta apresentação, conhece-se o seguimento chamado de *latus rectum* das cônicas e a justificativa para os nomes: Elipse, Parábola e Hipérbole.

Figura 99: CONSTRUÇÃO 2.2 – nomes das seções cônicas

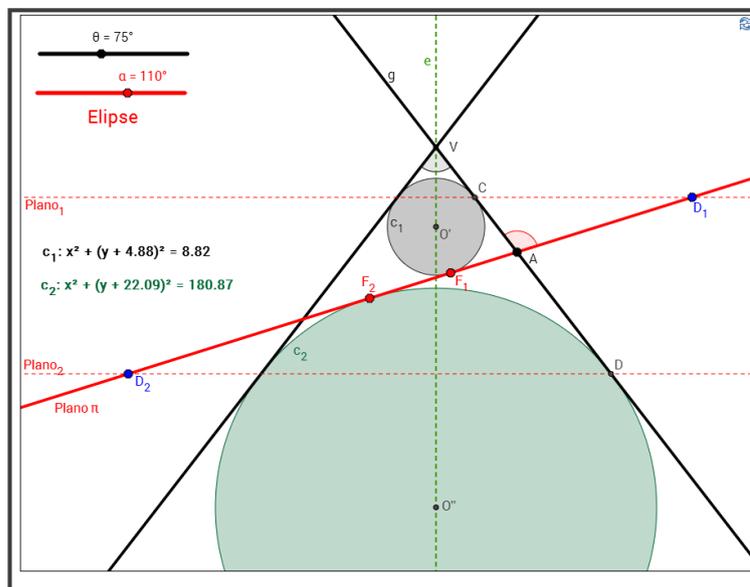


Fonte: autoria própria

Nesta construção, é possível conferir, por um processo dinâmico, os argumentos que justificam os motivos da escolha dos nomes: Elipse, Parábola e Hipérbole.

7.5 PÁGINA 3: Cônicas como lugar geométrico no plano

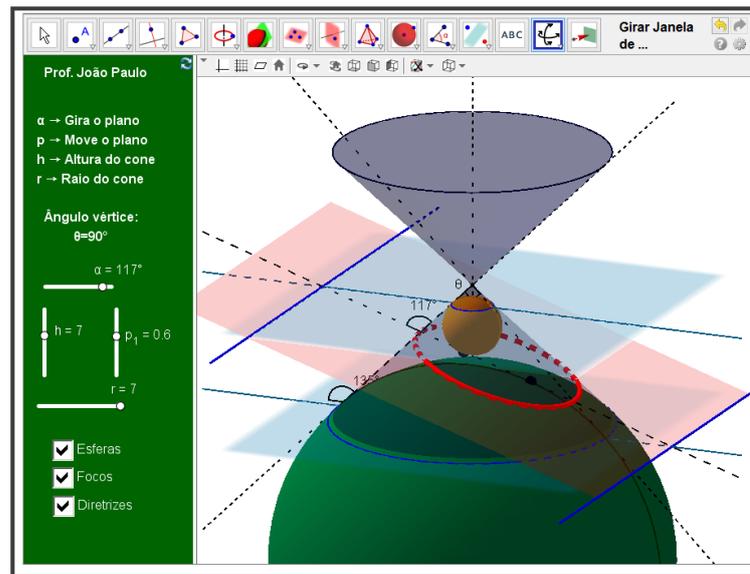
Figura 100: CONSTRUÇÃO 3.1 – esferas de Dandelin no plano



Fonte: autoria própria

Nesta construção, o usuário é levado a perceber a existência de esferas simultaneamente tangentes ao cone e ao plano de secção do mesmo. Nesse último caso, as esferas são tangentes aos focos das cônicas oriundas da secção. Essas esferas ficaram conhecidas por "Esferas de Dandelin", em homenagem ao matemático belga G.P. Dandelin, que as descobriu e utilizou para provar diversas propriedades das cônicas. No caso da parábola, tem-se apenas uma esfera e um foco, já para a elipse e hipérbole, têm-se duas esferas e dois focos.

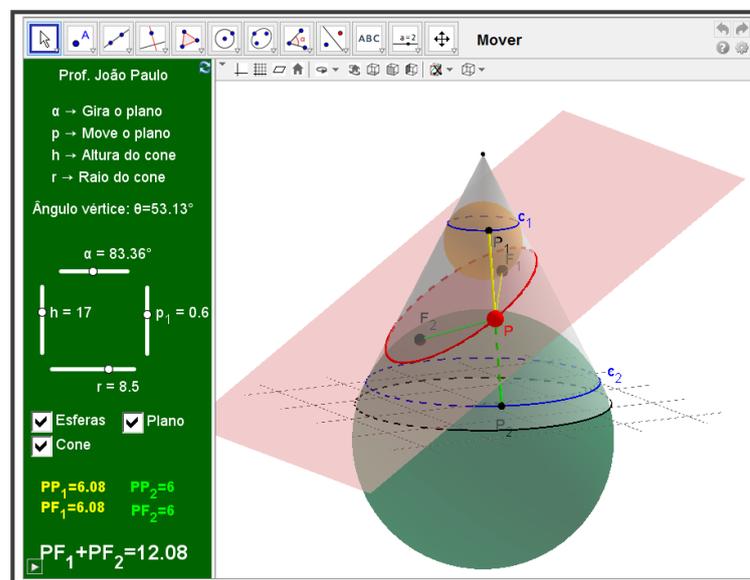
Figura 101: CONSTRUÇÃO 3.2 – esferas de Dandelin no espaço



Fonte: autoria própria

Nesta construção em 3D, por meio de um processo dinâmico, é possível manipular um plano de secção a um cone e verificar a existência das Esferas de Dandelin nos casos da Elipse, Parábola e Hipérbole.

Figura 102: CONSTRUÇÃO 3.3 – prova da definição das seções cônicas - ELIPSE

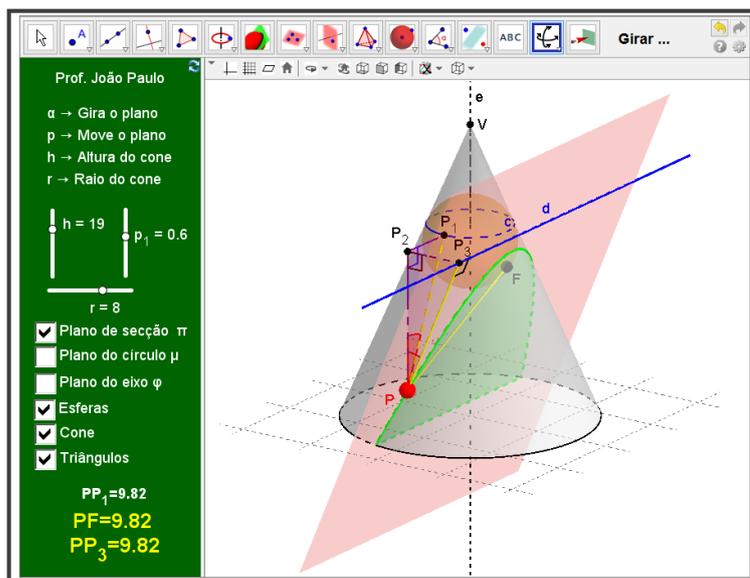


Fonte: autoria própria

Nesta construção, é possível perceber, utilizando-se das esferas de Dandelin, que a ELIPSE pode ser definida como:

"O lugar geométrico dos pontos do plano cuja soma das distâncias a dois pontos fixos dados, chamados focos, é constante."

Figura 103: CONSTRUÇÃO 3.3 – prova da definição das seções cônicas - PARÁBOLA

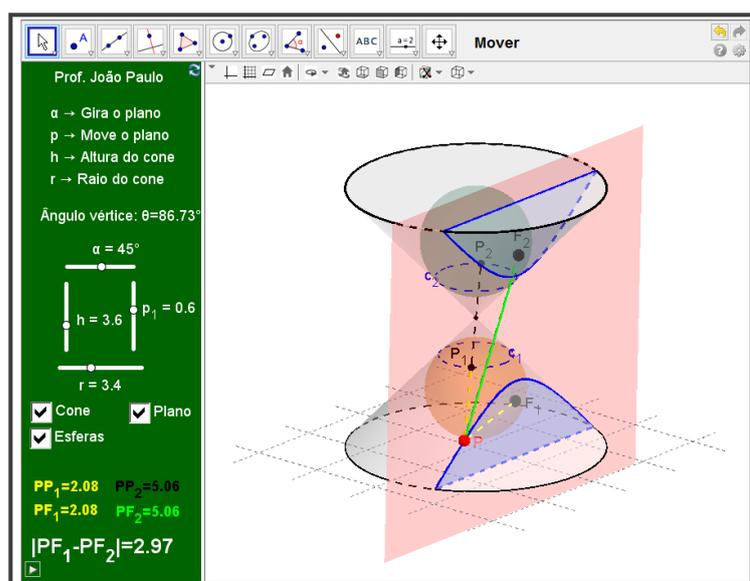


Fonte: autoria própria

Nesta construção, é possível perceber, utilizando-se das esferas de Dandelin, que a PARÁBOLA pode ser definida como:

"O lugar geométrico dos pontos do plano cuja distância a uma reta fixa dada, chamada diretriz, é igual à distância a um ponto fixo dado, não pertencente à reta, chamado foco."

Figura 104: CONSTRUÇÃO 3.3 – prova da definição das seções cônicas - HIPÉRBOLE

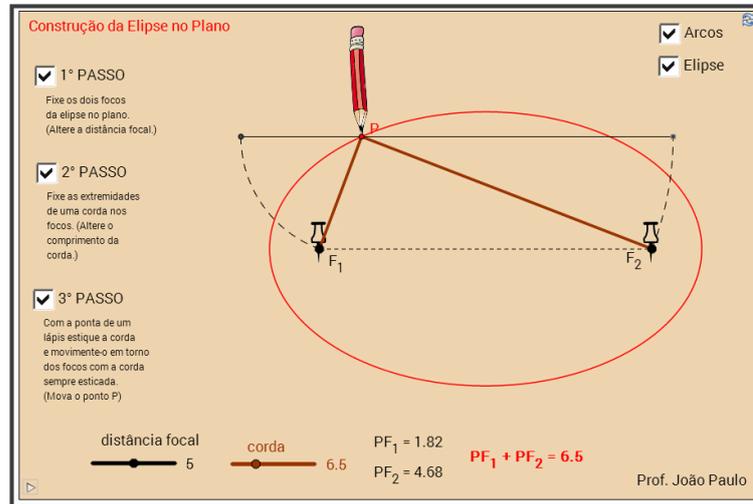


Fonte: autoria própria

Nesta construção, é possível perceber, utilizando-se das esferas de Dandelin, que a PARÁBOLA pode ser definida como:

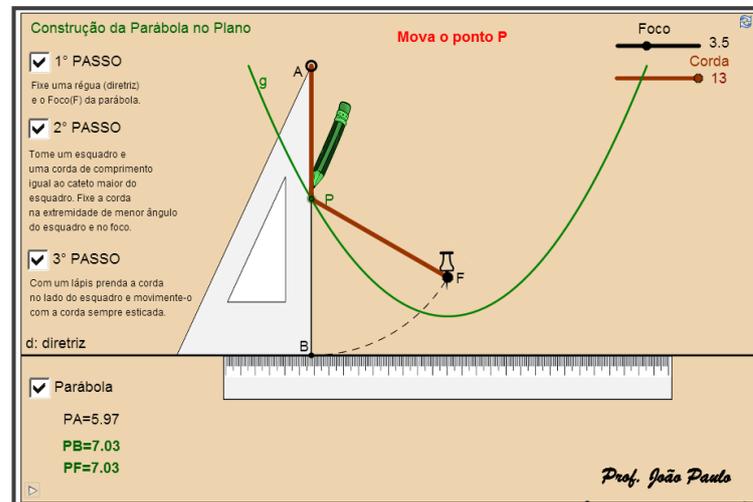
“O lugar geométrico dos pontos do plano cuja distância a uma reta fixa dada, chamada diretriz, é igual à distância a um ponto fixo dado, não pertencente à reta, chamado foco”.

Figura 105: CONSTRUÇÃO 3.4 – construção do jardineiro – ELIPSE



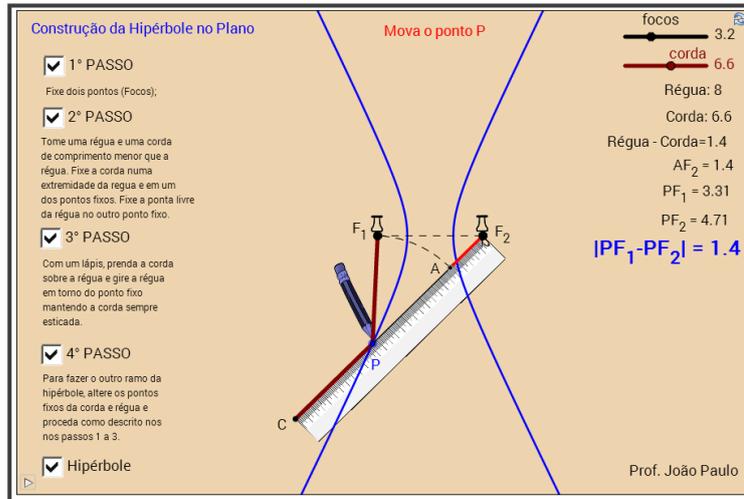
Fonte: autoria própria

Figura 106: CONSTRUÇÃO 3.4 – construção do jardineiro – PARÁBOLA



Fonte: autoria própria

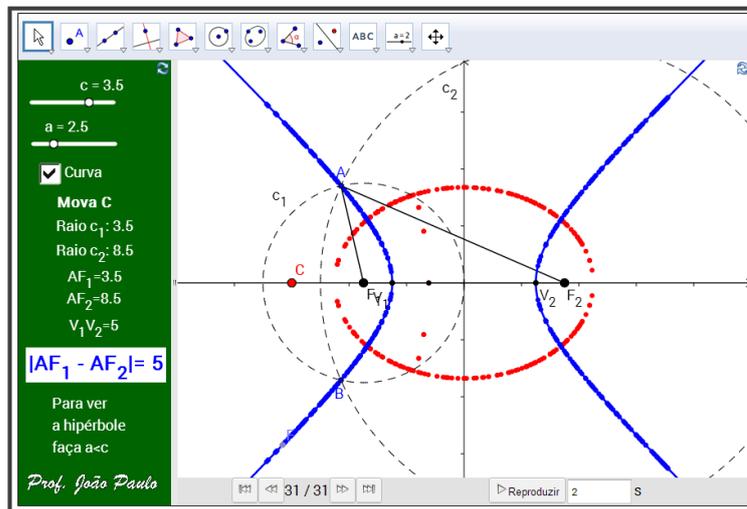
Figura 107: CONSTRUÇÃO 3.4 – construção do jardineiro - HIPÉRBOLE



Fonte: autoria própria

Nestas construções, é mostrado um passo a passo pelo qual se pode construir uma ELIPSE, PARÁBOLA ou HIPÉRBOLE, no plano (papel, cartolina, chão, etc.) por um processo cinemático (ou mecânico) conhecido como “Método do Jardineiro”. Na construção é possível alterar os diversos elementos e valores.

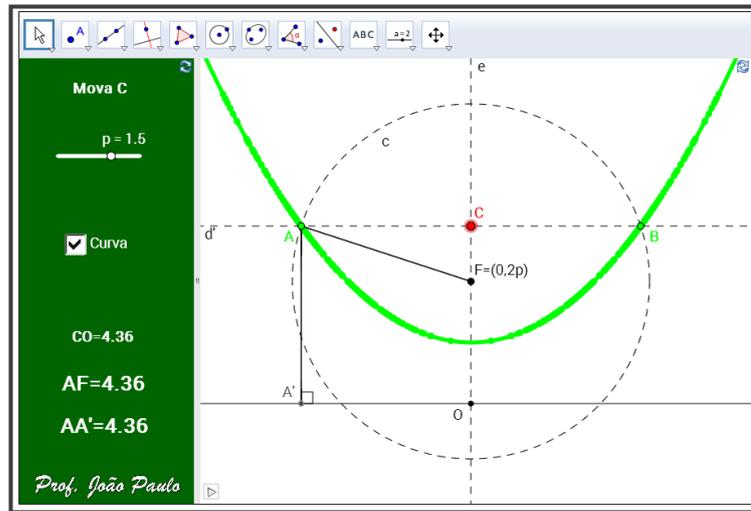
Figura 108: CONSTRUÇÃO 3.5 – construção das cônicas no GeoGebra - I



Fonte: autoria própria

Nesta construção é mostrado um processo pelo qual se pode desenhar uma Elipse ou uma Hipérbole no software GeoGebra, utilizando-se de argumentos geométricos. A Elipse ou a Hipérbole são obtidas em cada caso, escolhendo diferentes posições para um determinado ponto da construção.

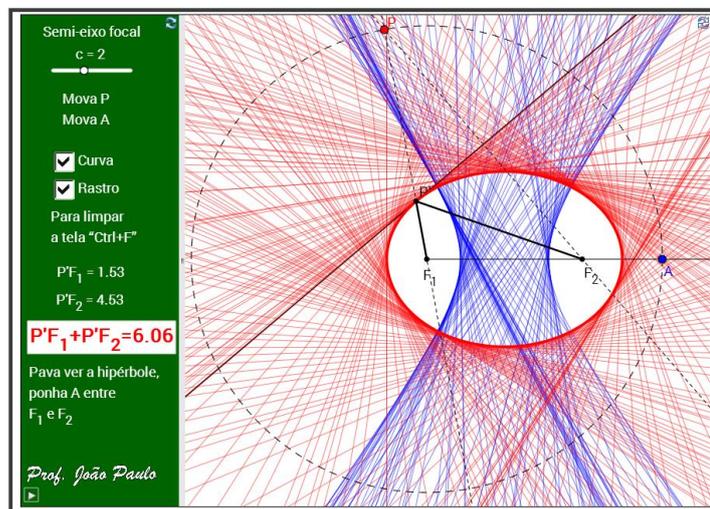
Figura 109: CONSTRUÇÃO 3.5 – construção das cônicas no GeoGebra - I



Fonte: autoria própria

Nesta construção, é mostrado um processo pelo qual se pode desenhar uma Parábola no software GeoGebra, utilizando-se de argumentos geométricos. Movimentando um único ponto a curva surge como o caminho traçado por outro ponto da construção.

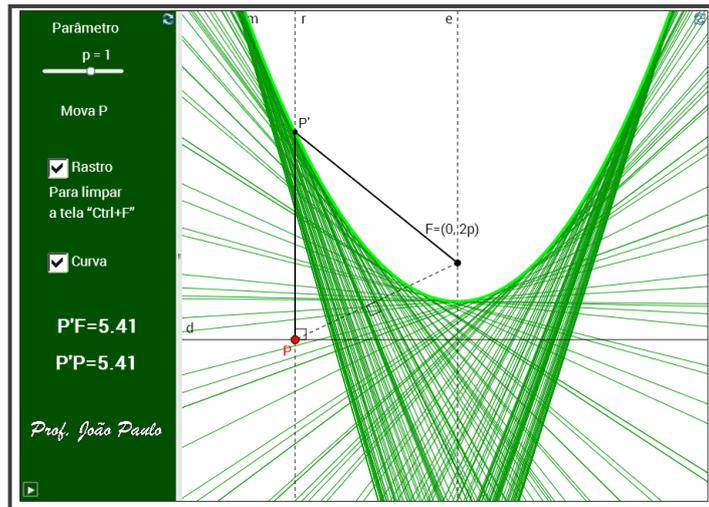
Figura 110: CONSTRUÇÃO 3.6 – construção das cônicas no GeoGebra - II



Fonte: autoria própria

Nesta construção, vê-se um processo de desenho da Elipse e da Hipérbole. Cada uma das curvas pode ser obtida de acordo com a posição de certo ponto da construção em relação aos pontos escolhidos como os focos.

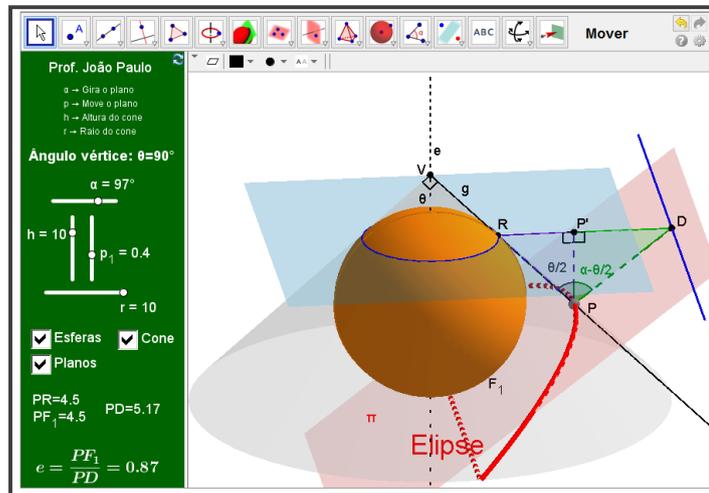
Figura 111: CONSTRUÇÃO 3.6 – construção das cônicas no GeoGebra - II



Fonte: autoria própria

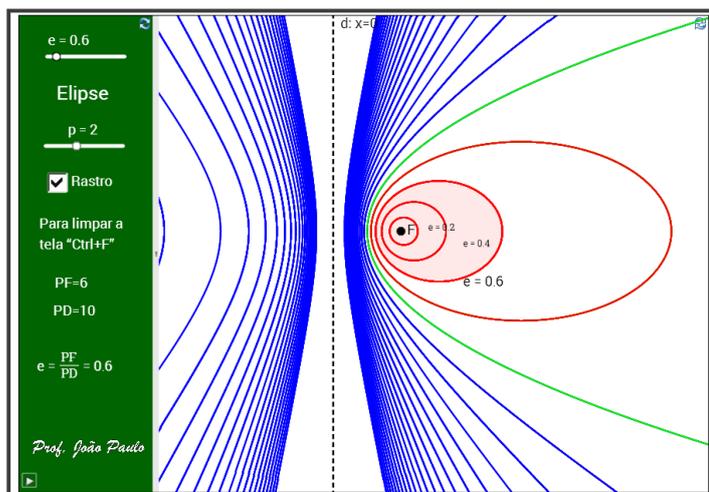
Nesta construção, é mostrado mais um processo pelo qual se pode obter uma Parábola como o caminho de um determinado ponto, conforme deslocamos outro ponto dele dependente, na construção.

Figura 112: CONSTRUÇÃO 3.7 – seções cônicas segundo a excentricidade – VEJA 1



Fonte: autoria própria

Nesta construção em 3D, pode-se perceber o conceito de "Excentricidade" (e) de uma cônica e nos certificarmos de que para a Elipse, Parábola e Hipérbole, esse conceito tem sempre valor $0 < e < 1$, $e = 1$ e $e > 1$, respectivamente.

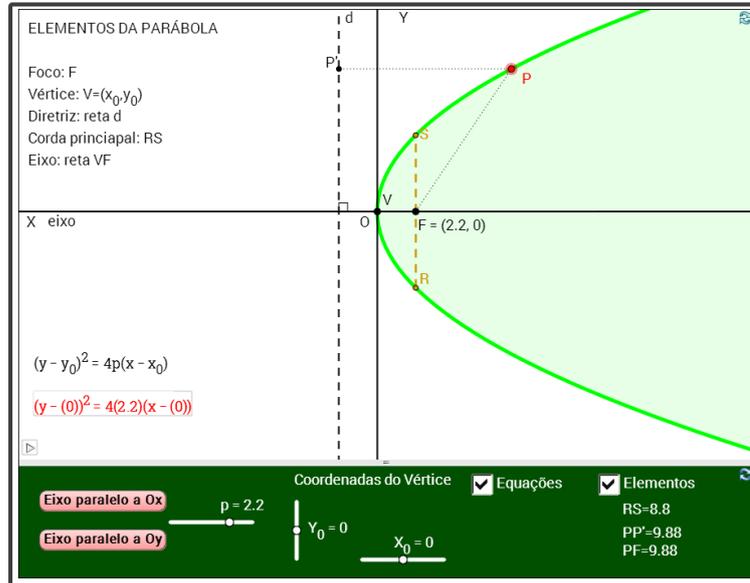
Figura 113: CONSTRUÇÃO 3.7 – seções cônicas segundo a excentricidade – VEJA 2

Fonte: autoria própria

Nesta construção, é possível variar o valor da excentricidade das cônicas e perceber como esse valor está relacionado ao formato geométrico da curva e suas propriedades.

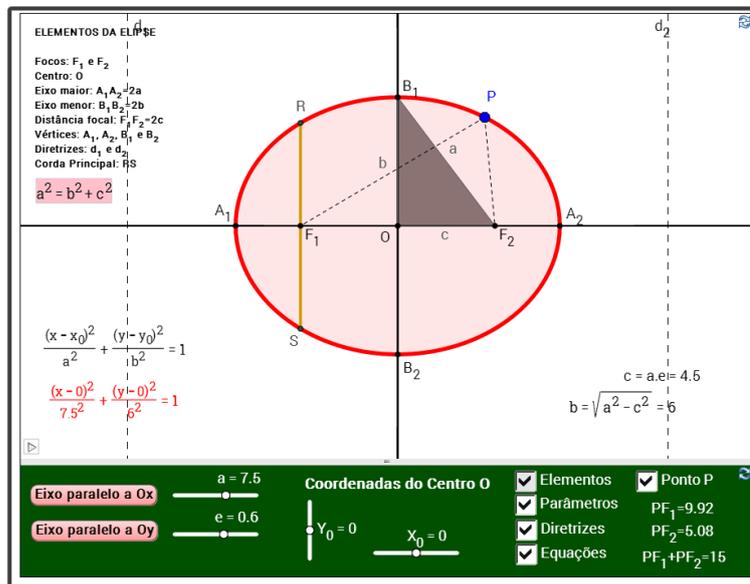
7.6 PÁGINA 4: Estudo analítico das cônicas

Figura 114: CONSTRUÇÃO 4.1 – elementos da parábola



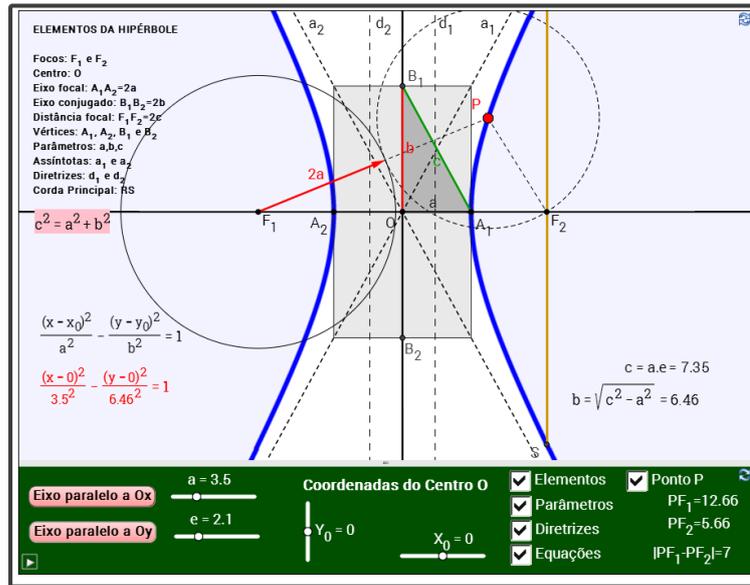
Fonte: autoria própria

Figura 115: CONSTRUÇÃO 4.2 – elementos da elipse



Fonte: autoria própria

Figura 116: CONSTRUÇÃO 4.3 – elementos da hipérbole



Fonte: autoria própria

Nestas construções, é possível identificar todos os elementos de uma Parábola, Elipse e Hipérbole, as relações que existem entre os mesmo e o significado de cada elemento na determinação do formato de cada curva. É possível ainda, visualizar a equação canônica da cônica, conforme o vértice, ou centro, esteja na origem do sistema cartesiano ou em um ponto qualquer. Por fim, podemos ainda visualizar a equação canônica da curva, conforme o eixo de focal seja paralelo ao o eixo Ox ou eixo Oy do sistema cartesiano.

7.7 PÁGINA 5: Aplicações das cônicas

Nesta página do ambiente, apresentam-se as diversas aplicações das seções cônicas, com o uso de desenhos, fotos e vídeos. O texto teórico é semelhante ao apresentado na Parte I deste trabalho.

7.8 PÁGINA 6: Apêndice

Nesta página, encontre-se as seguintes subseções:

□ A1 – Descrição do ambiente das construções:

Aqui o usuário verá uma descrição geral do ambiente onde são manipuladas as construções. Apresenta-se todos os elementos, os botões e suas funções.

□ A2 – Índice das construções:

Nessa subseção é possível visualizar uma lista com todas as construções do ADESC, com uma breve descrição de cada uma. É possível ainda, clicando sobre as imagens, ser redirecionado para a seção do ambiente onde a construção está inserida.

□ A3 – Ajuda rápida do GeoGebra:

Nessa subseção o usuário encontrará um manual de uso do software GeoGebra que foi construído especialmente para esse ambiente dinâmico.

□ A4 – Banco de Questões:

Uma seleção de questões dos livros de Ensino médio sobre o assunto “Seções Cônicas”.

8 Orientações para Uso do ADESC

O ADESC foi concebido em um ambiente computacional a partir de uma abordagem dinâmica do assunto, buscando contribuir para a compreensão e articulação dos conteúdos envolvidos, de forma autônoma e criativa, integrando as formas de pensamento algébrico e geométrico. A abordagem concreta-computacional apresentada no ADESC, antes de direcionar o estudo diretamente para a álgebra das cônicas, apresenta técnicas de construção que as gera. As simulações destas construções no ambiente computacional ensinam o aluno a usar os objetos traçados na tela como ajuda no estabelecimento de conjecturas e justificativas e esta é uma parte considerável do trabalho de ensinar geometria, para a qual a Geometria Dinâmica (G.D.) contribui efetivamente. As representações neste ambiente ajudam a concretizar o simbólico fornecendo aos alunos a base experimental necessária às abstrações inerentes à prova matemática.

Para um bom uso do ambiente, recomendamos que o professor utilize o projetor de mídia e o laboratório de informática da escola, onde os alunos de posse do computador com o ADESC, possam manusear e interagir com o ambiente, sempre sobre a observação e orientação do professor, que deverá ser o guia da turma, fazendo a sua exploração do ambiente e projetando a imagem de forma que a turma possa segui-lo de perto, em cada passagem do ambiente.

O ambiente é instrutivo e foi concebido para ser autoexplicativo. No entanto, o professor deve conduzir seus alunos na exploração do mesmo ao tempo em que eles irão tomando conhecimento da história, dos conceitos, propriedades, equações e aplicações das seções cônicas. Recomendamos, portanto, que o professor guie a turma na exploração do ambiente, que ele conduza o processo de aprendizagem paulatinamente, de forma que todos os alunos caminhem juntos na descoberta do mundo das seções cônicas.

Para ser um bom guia, é imprescindível que o professor tenha conhecimento prévio dos conteúdos presentes no ADESC, a recomendação, nesse

caso, é que ele faça um estudo atento da proposta apresentada na parte I deste trabalho (buscando maiores informações na biografia de referência ao final dessa dissertação sempre que necessário) e adquira familiaridade com o ambiente e seus elementos, o que pode ser conseguido lendo a apresentação do ambiente que foi feita acima ao tempo que explora a ferramenta. Dessa forma, ele pode suprir a necessidade dos alunos terem que ler os textos nas páginas do ambiente, fazendo ele o professor, a explanação do conteúdo de forma oral e deixando para o aluno a manipulação dos elementos e a realização de atividades ali presentes, no intuito de comprovar as ideias, e investigar, entender, analisar as novas informações. Dessa forma, a exploração se torna mais interessante, dinâmica e a aprendizagem passa a ser natural.

Caso a escola não possua ambiente informatizado com computadores em número suficiente para a turma, ou mesmo para a metade, caso em que se poderiam ter dois alunos por computador, uma alternativa é o professor utilizar um projetor de multimídia para fazer a exploração do ambiente em sala de aula convencional. Nesse caso, ele será o guia e explorador ao mesmo tempo, visto que deverá fazer a explanação dos conteúdos e manusear os elementos dinâmicos do ambiente. Para evitar que a turma fique apenas como expectadores do processo ensino-aprendizagem, o professor pode solicitar a participação de alunos para operar as construções.

PARTE III

Considerações Finais e Perspectivas

Futuras

9 Considerações Finais e Perspectivas Futuras

Sabemos que no que tange ao ensino as mudanças não são fáceis e nem tão pouco se dão de forma imediata, principalmente quando tais mudanças visam romper com o tradicional e que de certa forma está enraizado como o correto a se fazer. Porém, não devemos esquecer que a sociedade é um sistema em constante transformação, o que gera grandes mudanças no indivíduo em seu modo de pensar, agir e interagir no meio em que vive. Logo, fica evidente que o ensino da Matemática, assim como o ensino de outras áreas do conhecimento, não deve permanecer inerte a esta necessidade de inovação tão evidente na falta de interesse dos alunos nos estudos o que gera com isso altos índices de evasão escolar, como se pode ver no cotidiano de cada escola na qual atuamos.

Não que os problemas apontados aqui são de responsabilidade exclusiva de nós professores, mas que como agentes integrantes deste meio é preciso que no mínimo façamos a nossa parte, refletindo e analisando as nossas práticas de ensino.

Por isso, preparamos esta sequência didática para o Ensino das Seções Cônicas visando tornar o ensino aprendizagem desse tema algo prazeroso e para isso, contamos com uma nova ferramenta que está totalmente voltada para o ensino dinâmico, participativo e investigativo, na qual as novas tecnologias tem um papel fundamental.

Temos total consciência que as contribuições feitas neste trabalho não são suficientes e terminativas e que muito ainda precisa ser revisto, reformulado ou reestruturado no ensino das Seções Cônicas. Mas esperamos ter instigado o leitor a analisar, refletir sobre sua prática didática e sobre a importância de incrementá-la com o uso dos recursos das TIC's, procurando fazer o mesmo tipo de exploração que aqui foi proposto para o ensino das Seções Cônicas, nos diversos outros temas do ensino básico.

Fica implícito neste trabalho que o principal agente executor das referidas mudanças será o professor. Ele deverá disponibilizar tempo para planejar suas

aulas, ler sobre o tema e se familiarizar com o ADESC e, por conseguinte, com o software GeoGebra, além é claro do tempo para ministrar as referidas aulas. Isto exigirá um tempo considerável no começo, mas que será paulatinamente reduzido no decorrer de sua atuação e deverá ser recompensado, acreditamos piamente, com um ensino mais eficiente e a satisfação de dever cumprido, já que são esses os principais objetivos docentes.

Quanto ao ambiente de ensino proposto neste trabalho, temos consciência que muito ainda precisa ser feito e melhorado. Por exemplo, acrescentar mais atividades de manipulação e investigação, melhorar o banco de questões propostas e a própria disposição dos textos no ambiente, visando uma leitura mais fácil. Quanto às construções realizadas no software GeoGebra, sabemos da necessidade de melhorá-las no sentido de tornar suas execuções mais rápidas e prática, algo ainda difícil de ser contornado, haja vista ser um problema gerado pelo próprio software. Contudo, esperamos que o ambiente seja eficiente no seu objetivo, que tenha receptividade por parte dos alunos e também professores e que a ideia possa servir de inspiração para que outros profissionais criem outros ambientes semelhantes, voltados para os outros diversos assuntos da matemática básica. Uma ideia interessante para um trabalho grandioso, seria criar um ambiente dinâmico para o ensino da matemática básica, o que, logicamente, exigiria um esforço demasiado, mas uma recompensa imensurável.

Por fim, não devemos esquecer que nossos alunos não estão acostumados a um processo de ensino que exija participação efetiva na construção dos conteúdos a ser explorado. A maioria deles preferem tudo pronto sem nenhuma análise prévia dos fatos, e ainda, existem aqueles que estão totalmente à mercê de suas próprias vontades e não fazem questão de participar. Isto pode dificultar algumas atividades que são sugeridas em nosso ambiente dinâmico; porém, à medida que o assunto estiver sendo ministrado acreditamos que tais problemas serão minimizados já que este é um de nossos objetivos: atrair o interesse e o envolvimento do aluno no processo de Ensino-Aprendizagem e sabemos ainda que cada profissional da educação tem as suas técnicas para contornar situações iguais ou semelhantes às que mencionamos.

Referências Bibliográficas

ÁVILA, Geraldo. **A Hipérbole e os Telescópios**. 1999. 34, São Paulo : Alciléa Augusto, 1999.

BARCO, Luiz. **Por que elipse, parábola e hipérbole?** São Paulo: Revista do Professor De Matemática, 1991, Vol. 4, p. 47.

BORBA, M. C. e Penteado, M. G. 2007. **Informática e Educação Matemática**. Belo Horizonte: Autêntica, 2007.

BOYER, Carl B. 1996. **História da Matemática**. São Paulo : Edgard Blücher, 1996.

CANDAU, Vera M. 1991. **Informática na Educação: um desafio**. Rio de Janeiro: Tecnologia Educacional, 1991.

D'AMBRÓSIO, Ubiratan. 2003. **Novos paradigmas de atuação e formação de docente**. Porto: JM Editora, 2003.

GARBI, Gilberto Geraldo. 2009. **O Romance das Equações Algébricas**. São Paulo: Livraria da Física, 2009.

GUIMARÃES, L.C., Belfort, E. e Bellemain, & F. 2002. Creta : J. Wiley & Sons Inc, 2002. Proceedings of the Second International Conference on the Teaching of Mathematics,.

IEZZI, Gelson. 1993. **Geometria Analítica**. São Paulo: Atual, 1993.

LIMA, Elon Lages. 2006. **Geometria Analítica e Álgebra Linear**. Rio de Janeiro : IMPA, 2006.

LOPES, Juracélio Ferreira. **Cônicas e Aplicações**. (dissertação de mestrado). Rio Claro. 2011.

POLYTECHNICA, Escola. 1907. **Programa para exame de álgebra, geometria, trigonometria retilínea e álgebra superior**. Rio de Janeiro. Imprensa Nacional, 1907.

SATO, J. **As cônicas e suas aplicações.**

Disponível em: <<http://www.sato.prof.ufu.br/Conicas/node15.html>>.

Acesso em 12 de jan. 2013.

SILVA, Wellington Manoel Santos da. **Uma abordagem dinâmica e inovadora para o ensino de geometria analítica no ensino médio.** Dissertação defendida em 2013 na Universidade Federal de Alagoas. Maceió

VENTURI, Jacir J. **Cônicas e Quádricas.** Curitiba. Unificado, 1949.