
Universidade Estadual de Mato Grosso do Sul – UEMS

Sede Dourados

PRÓ-REITORIA DE ENSINO - PROE

COORDENAÇÃO DO CURSO DE MATEMÁTICA

Sistemas de EDO's Lineares e Não Lineares

Thiago de Oliveira Martins

Orientador: Jaime Rezende de Moraes

Dourados, Março de 2019

Universidade Estadual de Mato Grosso do Sul – UEMS

Sede Dourados

PRÓ-REITORIA DE ENSINO - PROE

COORDENAÇÃO DO CURSO DE MATEMÁTICA

Sistemas de EDO's Lineares e Não Lineares

Thiago de Oliveira Martins

Orientador: Jaime Rezende de Moraes

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Universidade Estadual de Mato Grosso do Sul, como requisito obrigatório para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Dourados, Março de 2019



UNIVERSIDADE ESTADUAL DE MATO GROSSO DO SUL
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM
MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT



THIAGO DE OLIVEIRA MARTINS


SISTEMAS DE EDO'S LINEARES E NÃO LINEARES

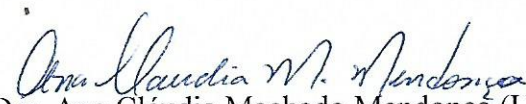
Produto Final do Curso de Mestrado Profissional apresentado ao Programa de Pós-Graduação *Stricto Sensu* em Matemática em Rede Nacional, da Universidade Estadual de Mato Grosso do Sul, como requisito final para a obtenção do Título de Mestre em Matemática.

Aprovado em: 28/03/2019.

BANCA EXAMINADORA:


Prof. Dr. Jaime Rezende de Moraes (UEMS)
Universidade Estadual de Mato Grosso do Sul


Prof. Dr. Vando Narciso (UEMS)
Universidade Estadual de Mato Grosso do Sul


Profª. Dra. Ana Cláudia Machado Mendonça (UFGD)
Universidade Federal da Grande Dourados

M347s Martins, Thiago de Oliveira
Sistemas de EDO's lineares e não lineares/ Thiago de
Oliveira Martins. – Dourados, MS: UEMS, 2019.
40p.

Dissertação (Mestrado) – Matemática – Universidade
Estadual de Mato Grosso do Sul, 2019.

Orientador: Prof. Dr. Jaime Rezende de Moraes.

1.Equações diferenciais ordinárias 2.Teoria qualitativa
I. Moraes, Jaime Rezende de II. Título

CDD 23. ed. - 515.352

Agradecimentos

À Deus sempre, pois é meu dever e necessário para continuar a caminhada da verdade e de minha vida. Em especial ao professor doutor Jaime, meu orientador nesse estudo, pois de maneira pontual me deu o suporte necessário para concretização desse trabalho.

A minha família que apesar de não entender muito a minha escolha por matemática me apoiou me dando suporte psicológico e conforto em nosso lar.

Aos meus colegas de sala de aula do curso de licenciatura Cleyton, Joseli, Raphael, Raphael e Eliana pelas diversas ajudas em vários momentos de descontração, neste caso, em especial, ao nosso fantástico amigo "Rogério de cavalaria". E um amigo mais que especial o Ailton, que apesar de seus problemas pessoais sempre me apoiou quando eu mais precisava.

Aos professores do curso de Matemática da Universidade Estadual de Mato Grosso do Sul de Dourados, que enxergando minha força de vontade e entusiasmo pela Matemática, me abraçaram entendendo minhas dificuldades pessoais e me motivaram a estudos de pós-graduação.

Aos funcionários da UEMS por terem me proporcionado ambientes próprios e acolhedores para desenvolver meu trabalho. Por fim, agradeço aos meus colegas de trabalho que entenderam as minhas dificuldades e me apoiaram oportunizando uma maior quantidade de tempo possível dedicada aos estudos acadêmicos.

*“Seja fã do conhecimento e amigo
pessoal de Deus”. Dedico este
trabalho em memória de Celso
Ribeiro Martins, meu pai.*

Resumo

Iniciamos o estudo com o objetivo fundamental de entender o comportamento global dos sistemas de equações diferenciais lineares no plano. Primeiramente, estudamos os possíveis pontos de equilíbrio que ocorrem nos sistemas lineares, tais como, sela, foco, nó e centro e encontramos a solução analítica para cada caso. Em seguida, mostramos os possíveis retratos de fases globais para cada caso. Com isso, abordamos mais de perto a teoria qualitativa das EDO'S, estudando qualitativamente os sistemas não-lineares, perante os quais a solução analítica nem sempre é possível de ser encontrada. Para isso, vamos inicialmente entender que há um campo de vetores associado a um sistema de equações diferenciais ordinárias. Nesse estudo estamos preocupados com aqueles campos definidos em \mathbb{R}^2 . Em seguida, definimos conjugação e equivalência entre campos vetoriais. Tal definição é necessária para entendermos o Teorema do Fluxo Tubular no qual é feito um estudo local dos pontos regulares do sistema (são os pontos onde o sistema não se anula) e o Teorema de Hartman-Grobman que caracteriza um sistema não-linear próximo a um ponto de equilíbrio *hiperbólico*, partir de sua *linearização*. Esses dois teoremas são muito importantes no estudo da teoria qualitativa das EDO's. Vale ressaltar que para os casos em que os pontos de equilíbrios não são hiperbólicos, isto é, o Teorema de Hartman-Grobman não se aplica, é muito difícil de entender o comportamento local das soluções próximo aos pontos de equilíbrio e esses estudos são realizados como pesquisa em nível de pós-graduação.

Palavras-chave: Equações diferenciais ordinárias, Pontos de equilíbrio, Órbitas, Retrato de fase.

Sumário

Introdução e Revisão da Literatura	9
1 Sistemas de Equações Diferenciais Lineares no Plano	11
1.1 Solução do Sistema (1) para o Caso (a)	13
1.2 Solução do Sistema (1) para o Caso (b)	18
1.3 Solução do Sistema (1) para o Caso (c)	25
1.4 Teoria Qualitativa das Equações Diferenciais Ordinárias	30
2 Sistema Associado a um Campo de Vetores em \mathbb{R}^2	32
2.1 Fluxo de um Campo Vetorial em \mathbb{R}^2	32
2.2 Alguns Aspectos da Teoria Qualitativa das E.D.O's em \mathbb{R}^2	35
2.2.1 Equivalência e Conjugação de Campos Vetoriais	35
2.2.2 Estrutura Local dos Pontos Singulares Hiperbólicos	38
3 Futuras Direções	40
4 Considerações Finais	41
Referências	42

Introdução e Revisão da Literatura

Muitas das coisas que regem o mundo físico são modeladas por sistemas lineares de equações diferenciais ordinárias no plano, e portanto são usados em vários campos da ciência. No entanto, sistemas reais apresentam algum tipo de não-linearidade. Em muitos casos a faixa de operação limitada do sistema faz com que o efeito destas não-linearidades seja limitado, sendo que o modelo linear é adequado para uma análise qualitativa e mesmo quantitativa suficientemente precisa. O fato de que engenheiros procurem sempre modelos lineares é explicado pelo fato de que a teoria de sistemas lineares é bem consolidada e os resultados são gerais. Já no caso de sistemas não-lineares, os resultados são mais limitados e frequentemente aplicáveis somente a classes de sistemas não-lineares. Mais a frente iremos abordar com maior profundidade esse conteúdo, pois iremos estudar o comportamento local desses sistemas, próximo aos pontos de equilíbrio *hiperbólico*.

A determinação do retrato de fase de um campo tem real interesse, pois na maioria das vezes não é possível encontrar explicitamente as soluções da equação diferencial associada a ele. O pioneiro no estudo do retrato de fase de um sistema de equações diferenciais foi Poincaré (1881), que encontrou em problemas de Mecânica Celeste a motivação inicial. Um dos problemas que recebeu sua particular atenção foi o da estabilidade do sistema solar. Um estudo mais aprofundado sobre retratos de fase, bem como a linearização de sistemas não-lineares pode ser visto em [2].

Iniciamos o desenvolvimento do nosso estudo fazendo uma revisão de literatura sobre alguns conceitos de Álgebra linear e Cálculo Avançado, vistos em [1] e [7], respectivamente, uma vez que os sistemas inicialmente estudados podem ser vistos como uma transformação linear. Nesse caso o sistema é associado a uma matriz não-singular. Assim, encontramos soluções analíticas do problema de valor inicial e esboçamos seu retrato de fase, classificando os tipos de singularidades em nós, selas, focos e centros. Esses tipos dependem dos autovalores da matriz associada. Quando o sistema é não-linear precisamos estudar a teoria qualitativa das equações diferenciais, já que na maioria desses casos não encontramos sua solução analítica.

O trabalho está organizado como se segue. No Capítulo 1, vamos encontrar as ex-

pressões analíticas das soluções que o sistema linear pode gerar, embora o nosso interesse principal nesse estudo é estudar qualitativamente os sistemas não-lineares. Entretanto, precisamos conhecer os sistemas lineares para podermos estudar localmente o comportamento dos sistemas não-lineares.

No Capítulo 2, estaremos mais perto da teoria qualitativa que tanto buscamos, onde será estudado os sistemas não-lineares no plano. A solução destes é bem mais complexa, sendo que em alguns casos não é possível encontrá-la analiticamente. Entretanto, vamos estudá-la de maneira qualitativa. Antes disso, estudaremos alguns conceitos que nos permite relacionar um campo de vetores a um sistema, o que irá nos permitir definir o fluxo gerado pelo campo e como poderão ser as órbitas ou caminhos que juntas formam o retrato de fase do sistema. Uma maior abordagem nesse assunto pode ser vista em [4, 5, 6, 8] e [9].

O conhecimento obtido no estudo qualitativo é necessário para entendermos os teoremas do Fluxo tubular e de Hartman-Grobman que tratam da estrutura local de um sistema de equações diferenciais. O teorema do Fluxo tubular se aplica a *pontos regulares*, isto é, em pontos onde o campo associado ao sistema não se anula, e o do teorema de Hartman-Grobman se aplica a *pontos de equilíbrio hiperbólicos*, isto é, pontos onde o campo se anula e onde a matriz jacobiana avaliada nesse ponto possui todos autovalores com parte real não nula. A prova desses teoremas pode ser vista em [3]. Estudaremos esses importantes teoremas que são puramente qualitativos.

Por fim, nos capítulos 3 e 4 apresentaremos respectivamente as futuras direções e considerações finais do trabalho.

1 Sistemas de Equações Diferenciais Lineares no Plano

Na teoria de sistemas dinâmicos, o estudo de sistemas de equações diferenciais lineares em \mathbb{R}^2 tem uma grande importância nas áreas de Matemática, Física, Química e nas Engenharias. O estudo desses sistemas se enquadra na teoria qualitativa das EDO's, pois nos permite estudar o comportamento das soluções de modo qualitativo, ou seja, dado um sistema linear em \mathbb{R}^2 iremos encontrar suas soluções e representá-las geometricamente de modo genérico. Vale ressaltar que o estudo feito nesse trabalho é em duas dimensões, por motivos de objetividade das aplicações à modelagem dos fenômenos naturais.

O sistema que vamos estudar é da seguinte forma

$$X' = AX, \tag{1}$$

onde $X = (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $A \in M_2(\mathbb{R})$ é a matriz

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

e $'$ denota a derivada com respeito a variável temporal t . A seguir daremos a definição de um operador linear em \mathbb{R}^2 na qual será necessária para estudar o sistema (1).

Definição 1. *Um operador linear T em \mathbb{R}^2 é uma aplicação $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ satisfazendo*

$$T(\lambda u + v) = \lambda T(u) + T(v),$$

para todo $\lambda \in K$ ($K = \mathbb{R}$ ou $K = \mathbb{C}$).

Proposição 1. *Todo operador linear T em \mathbb{R}^2 pode ser escrito na forma $T(v) = Av$, onde $A \in M_2(\mathbb{R})$ e $v \in \mathbb{R}^2$.*

A prova da Proposição 1 pode ser encontrada em [1]. A Proposição 1 nos diz que cada operador linear em \mathbb{R}^2 é caracterizado unicamente por uma matriz 2×2 com coeficientes reais. Temos que o lado direito da equação (1) pode ser visto como uma transformação linear. Deste modo, vamos estudar as soluções desse sistema analisando a matriz A .

Definição 2. *Seja T um operador linear em \mathbb{R}^2 . Um vetor não nulo $v \in \mathbb{R}^2$ é chamado autovetor de T se existe um escalar $\lambda \in K$ ($K = \mathbb{R}$ ou $K = \mathbb{C}$) tal que $T(v) = \lambda v$. O escalar λ é chamado de autovalor de T associado ao vetor v .*

Usando a Proposição 1 e a Definição 2, temos

$$Av = \lambda v.$$

Multiplicando a esquerda em ambos os lados da equação anterior pela matriz identidade I de ordem 2, obtemos

$$\begin{aligned} I(Av) &= I(\lambda v) \Rightarrow \\ (IA)v &= (I\lambda)v. \end{aligned}$$

Tomando $v = (x, y)$ e passando tudo para o primeiro membro temos

$$\begin{aligned} \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \vec{0} \\ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \vec{0}, \\ \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{pmatrix}}_{A - \lambda I} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \vec{0}. \end{aligned} \tag{2}$$

Sabemos por definição que o vetor v é não nulo. Assim, para que a equação (2) tenha solução não-trivial, obrigatoriamente devemos ter $\det(A - \lambda I) = 0$, ou seja,

$$\lambda^2 - \text{tr}(A)\lambda + \det(A) = 0.$$

O polinômio $p(\lambda) = \lambda^2 - \text{tr}(A)\lambda + \det(A)$ é chamado *polinômio característico*. Pelo fato de o polinômio característico ser quadrático teremos no máximo duas raízes λ_1 e λ_2 satisfazendo

- a) $\lambda_1 \neq \lambda_2, \quad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R};$
- b) $\lambda_1 = \lambda_2, \quad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R};$
- c) λ_1 e λ_2 são complexos conjugados.

Para cada um desses casos, vamos encontrar a solução geral do sistema (1) e esboçar os possíveis retratos de fase. O caso a) será tratado na Seção 1.1, o caso b) será tratado na Seção 1.2 e o caso c) será abordado na Seção 1.3.

1.1 Solução do Sistema (1) para o Caso (a)

Vamos encontrar a solução geral e o retrato de fase para os casos onde λ_1 e λ_2 são reais e $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Sejam $v_1 = (a, b)$ e $v_2 = (c, d)$ os autovetores associados aos autovalores λ_1 e λ_2 , respectivamente. Retomando o sistema (1), vamos fazer a mudança de variável $X = PY$, onde P é a matriz com colunas dada por v_1 e v_2 . Como v_1 e v_2 são linearmente independentes, a matriz P é não singular. Assim,

$$(PY)' = A(PY) \Rightarrow PY' = APY \Rightarrow P^{-1}PY' = \underbrace{(P^{-1}AP)}_D Y \Rightarrow Y' = DY,$$

onde

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix},$$

uma vez que A é diagonalizável, pois seus auto-vetores são linearmente independentes e existe a matriz D semelhante a A .

Com isso, temos o sistema onde a matriz expressa no segundo membro é a matriz de mudança de base

$$\begin{pmatrix} Y_1' \\ Y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix}.$$

Assim,

$$\begin{cases} Y_1' = \lambda_1 Y_1 \\ Y_2' = \lambda_2 Y_2. \end{cases}$$

Dessa forma, em cada um dos casos podemos resolver de forma separável as equações diferenciais geradas.

$$Y_1' = \lambda_1 Y_1 \Rightarrow \frac{dY}{dt} = \lambda_1 Y_1 \Rightarrow \frac{1}{Y_1} dY = \lambda_1 dt.$$

Integrando em ambos os lados da igualdade, temos

$$\int \frac{1}{Y_1} dY = \int \lambda_1 dt \Rightarrow \ln|Y_1| = \lambda_1 t + k,$$

onde, $k \in \mathbb{R}$.

Agora, aplicando a função exponencial em ambos os lados da igualdade resulta,

$$e^{\ln|Y_1|} = e^{\lambda_1 t + k} \Rightarrow |Y_1| = e^{\lambda_1 t} e^k \Rightarrow Y_1 = c_1 e^{\lambda_1 t},$$

tal que $c_1 \in \mathbb{R}$.

Fazendo as operações de maneira análoga para $Y_2' = \lambda_2 Y_2$, obtemos $Y_2 = c_2 e^{\lambda_2 t}$. Assim, substituindo esses resultados em $X = PY$, onde $X(t) = (x(t), y(t))$, temos que

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix},$$

ou seja,

$$\begin{cases} x(t) = aY_1 + cY_2 \\ y(t) = bY_1 + dY_2 \end{cases}.$$

Assim, temos

$$\begin{aligned} X(t) &= (a Y_1 + c Y_2, b Y_1 + d Y_2) \\ &= (a Y_1, b Y_1) + (c Y_2, d Y_2) \\ &= Y_1(a, b) + Y_2(c, d) \\ &= e^{\lambda_1 t} c_1(a, b) + e^{\lambda_2 t} c_2(c, d). \end{aligned}$$

Recordando que $v_1 = (a, b)$ e $v_2 = (c, d)$, a solução geral para esse caso é dada por

$$X(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} v_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} v_2. \quad (3)$$

A seguir, analisaremos os retratos de fase do sistema (1) usando a solução (3) que encontramos anteriormente. Vale ressaltar que neste caso e nos outros retratos de fases que vamos esboçar as órbitas, caminhos ou curvas que formam os retratos em estudo são infinitas em comprimento, o que não é nenhuma novidade, e em quantidade, ou seja, o que vamos esboçar é uma representação. Outra observação importantíssima para o estudo que estamos fazendo é sobre o vetor nulo, que além de ser por definição sempre solução do sistema, também é a única singularidade (ponto crítico ou ponto de equilíbrio) dos sistemas que iremos estudar e esboçar. Isto é, o vetor nulo é uma solução isolada. No próximo capítulo daremos esses conceitos e provaremos esse resultado.

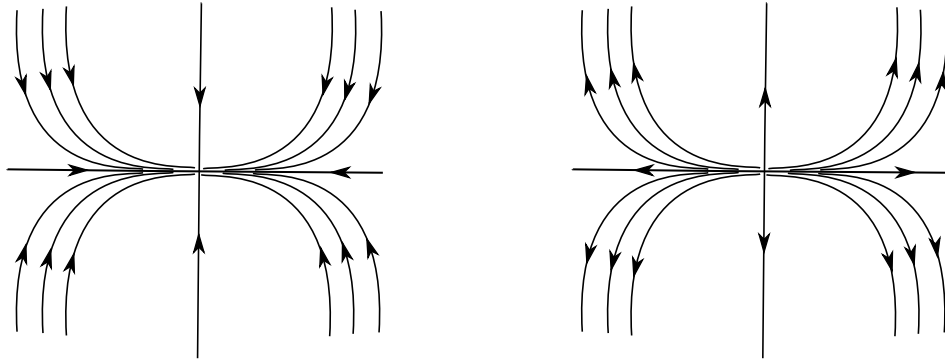


Figura 1: Retrato de fase do Sistema (1) para o caso (a)–(1). Do lado esquerdo temos $\lambda_1, \lambda_2 < 0$ que caracteriza uma fonte (atrator). Do lado direito temos $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ que caracteriza uma fonte (repulsor).

Caso (a)–(1): Começamos com λ_1 e λ_2 de mesmo sinal. Sem perda de generalidade, suponhamos $\lambda_1, \lambda_2 < 0$.

Usando a base canônica para expressar as soluções, temos

$$X(t) = (x(t), y(t)) = (c_1 e^{\lambda_1 t}, c_2 e^{\lambda_2 t}).$$

A medida que o parâmetro t cresce ao infinito positivo, as soluções também tendem ao infinito de forma exponencial, se afastando do ponto crítico (veja a primeira figura da Figura 1), e de forma análoga, a medida que o parâmetro t decresce tendendo ao infinito negativo, as soluções tendem a se aproximar da singularidade que neste caso é uma fonte, também de forma exponencial (veja a segunda figura, da direita, da Figura 1).

Exemplo 1. Vejamos, o exemplo onde o sistema é dado por

$$\begin{cases} x'(t) = -x(t) \\ y'(t) = x(t) - 2y(t) \end{cases}$$

Em forma matricial,

$$X' = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Através da equação que representa o polinômio característico, temos

$$\lambda^2 - \text{tr}(A)\lambda + \det(A) = 0 \Rightarrow \lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0,$$

onde $\lambda_1 = -2$ e $\lambda_2 = -1$. Agora, usando a equação (2), vamos encontrar os auto-vetores associados. Para $\lambda = -2$, onde v_1 é seu auto-vetor associado

$$\begin{pmatrix} -1 - (-2) & 0 \\ 1 & -2 - (-2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Daí, obtemos

$$x = 0 \Rightarrow v_1 = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Portanto, tomando $y = 1$, temos que o auto-vetor associado ao auto-valor dado é

$$v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Para $\lambda = -1$, onde v_2 é seu auto-vetor associado.

$$\begin{pmatrix} -1 - 1 & 0 \\ 1 & -2 - (-1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Daí, obtemos

$$x = y \Rightarrow v_1 = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Portanto, tomando $x = 1$, temos que o auto-vetor associado ao auto-valor dado é

$$v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Usando a equação (3) para expressar a solução geral, temos

$$X(t) = c_1 e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{-2t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

E o retrato de fase desse sistema é expresso pela Figura 2.

Caso (a)–(2): Suponhamos que λ_1 e λ_2 tenham sinais diferentes. Suponha por primeiro $\lambda_1 < 0, \lambda_2 > 0$ e de forma análoga a solução na base canônica utilizada no caso anterior, temos que a medida que o parâmetro t cresce infinitamente $x(t)$ decresce enquanto $y(t)$ cresce infinitamente, ambos de forma exponencial. Veja a primeira figura de Figura 3. Quando $\lambda_1 > 0, \lambda_2 < 0$ e o parâmetro t cresce infinitamente, $x(t)$ cresce enquanto que $y(t)$ decresce infinitamente, ambos de forma exponencial. Veja a segunda figura de Figura 3.

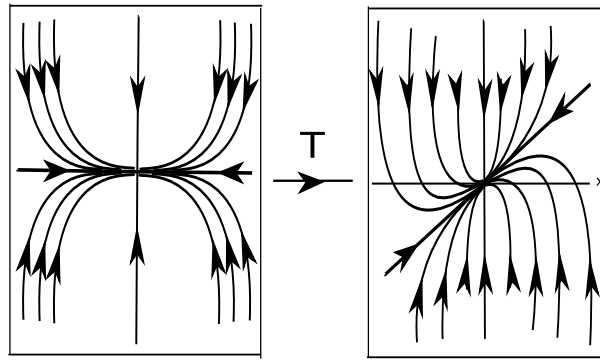


Figura 2: Retrato de fase do sistema (1) para o exemplo do caso (a)–(1) é o da direita da Figura 2. Onde existe uma transformação T , conforme a Definição 2, que através de sua matriz de mudança de base transforma o retrato da base canônica no retrato do sistema onde a base é formada pelos auto-vetores encontrados no exemplo.

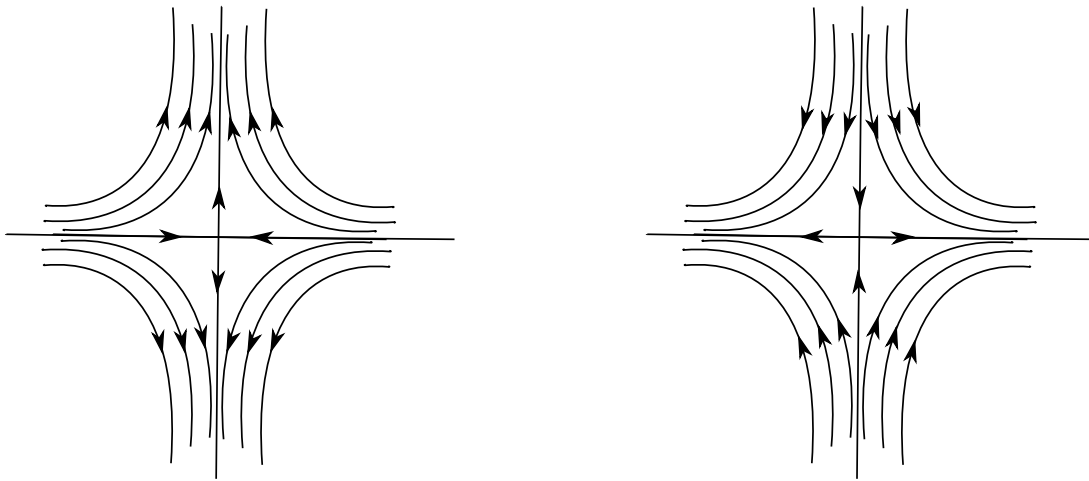


Figura 3: Retrato de fase do Sistema (1) para o caso (a)–(2). Em ambas figuras temos que a singularidade é uma sela. Do lado esquerdo temos o caso em que $\lambda_1 < 0, \lambda_2 > 0$. Do lado direito temos $\lambda_1 > 0, \lambda_2 < 0$. Observe que a sela não é atrator e nem um repulsor.

Exemplo 2. Vejamos, o exemplo onde o sistema é dado por

$$\begin{cases} x'(t) = x(t) + 3y(t) \\ y'(t) = x(t) - y(t) \end{cases}$$

Na forma matricial, temos

$$X' = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Através da equação que representa o polinômio característico, temos

$$\lambda^2 - \text{tr}(A)\lambda + \det(A) = 0 \Rightarrow \lambda^2 - 4 = 0,$$

que fornece $\lambda_1 = -2$ e $\lambda_2 = 2$. Agora, usando a equação (2), vamos encontrar os auto-vetores associados. Para $\lambda = -2$, onde v_1 é seu auto-vetor associado, temos

$$\begin{pmatrix} 1 - (-2) & 3 \\ 1 & -1 - (-2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Daí, obtemos

$$-x = y \Rightarrow v_1 = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -x \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Portanto, tomando $x = 1$, temos que o auto-vetor associado ao auto-valor dado é

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Para $\lambda = 2$, onde v_2 é seu auto-vetor associado, temos

$$\begin{pmatrix} 1 - 2 & 3 \\ 1 & -1 - 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Daí, obtemos

$$x = 3y \Rightarrow v_1 = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3y \\ y \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Portanto, tomando $y = 1$, temos que o auto-vetor associado ao auto-valor é dado por

$$v_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Usando a equação (3) para expressar a solução geral, temos

$$X(t) = c_1 e^{-2t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + c_2 e^{2t} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

E o retrato de fase desse sistema é expresso pela Figura 4.

1.2 Solução do Sistema (1) para o Caso (b)

Vamos nessa seção estudar o caso em que $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$. Para isso, vamos separar em dois casos. No primeiro deles teremos um autovalor e dois autovetores linearmente

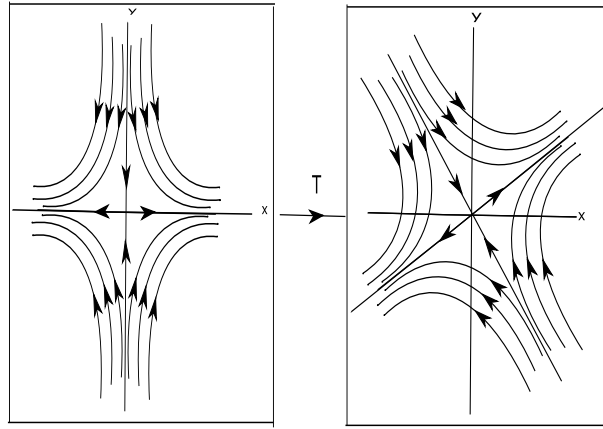


Figura 4: Retrato de fase do Sistema (1) para o exemplo do caso (a)–(2) é o da direita da Figura 4. Onde existe uma transformação T , conforme a definição 2, que através de sua matriz de mudança de base transforma o retrato da base canônica no retrato do sistema onde a base é formada pelos auto-vetores encontrados nesse exemplo.

independentes associados. No segundo caso teremos apenas um autovalor e autovetor associado.

Caso (b)–(1) (Dois autovetores linearmente independentes): Esse caso é semelhante a solução do sistema (1) para o caso (a), onde os autovetores formam uma base para o espaço solução do sistema (1). Com efeito a matriz de mudança de base D do sistema é representada na forma

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

Voltando a solução do sistema em estudo, depois de fazer a diagonalização, usar a variável auxiliar e , sem perda de generalidade, fazer de forma análoga ao caso em que os autovalores são diferentes, temos que

$$Y'(t) = D \cdot Y(t),$$

onde D é a matriz de mudança de base e Y é a matriz coluna das soluções na base canônica.

Com isso, escrevemos

$$\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}.$$

Assim, temos

$$\begin{cases} x(t) = c_1 e^{\lambda t}, \\ y(t) = c_2 e^{\lambda t}. \end{cases}$$

Tomando o quociente de $y(t)$ por $x(t)$, temos

$$\begin{aligned} \frac{y(t)}{x(t)} &= \frac{c_2 e^{\lambda t}}{c_1 e^{\lambda t}} \\ &= \frac{c_2}{c_1} \\ &= k, \text{ tal que } k \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Dessa forma, $y(t) = k x(t)$ e a medida que t tende ao infinito $x(t)$ e $y(t)$ cresce ou aumenta igualmente e todas as soluções, exceto a origem, são semi-retas que poderão ser entendidas ou estão contidas em retas expressas por uma função afim passando pela origem, onde no caso estudado não passará pela origem, uma vez que o ponto $(0, 0) \in \mathbb{R}^2$ é ponto de equilíbrio e pelo *teorema de existência e unicidade* das soluções das equações diferenciais ordinárias, que ainda vamos enunciar, as órbitas não se cruzam. Logo, os retratos de fase serão representados conforme a Figura 5.

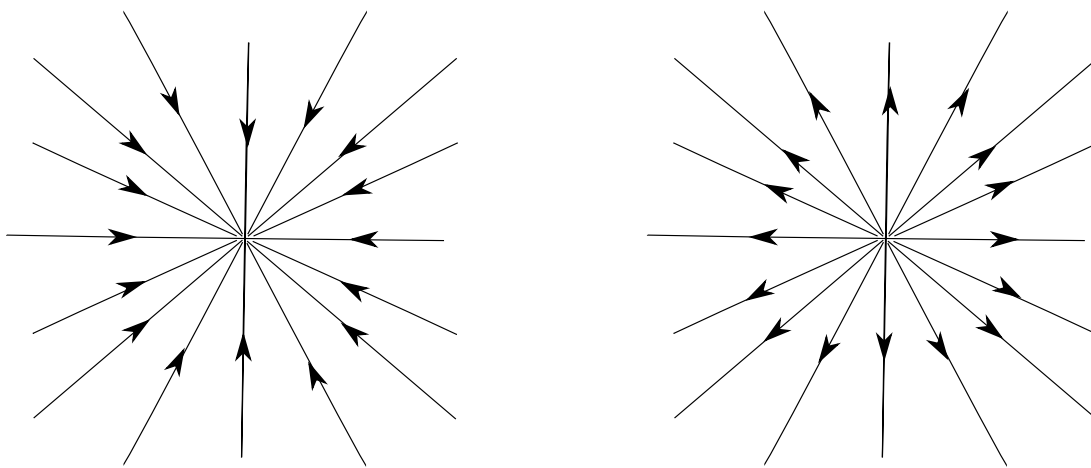


Figura 5: Retrato de fase do Sistema (1) para o caso (b)-(1). Do lado esquerdo temos o caso em que $\lambda < 0$ cuja singularidade representa um nó atrator. Do lado direito temos o caso em que $\lambda < 0$ cuja singularidade representa um nó repulsor.

Exemplo 3. Vejamos, o exemplo onde o sistema é dado por

$$\begin{cases} x'(t) = -2x(t) \\ y'(t) = x(t) - 2y(t) \end{cases}$$

Em forma matricial, temos

$$X' = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Através da equação que representa o polinômio característico, temos

$$\lambda^2 - \text{tr}(A)\lambda + \det(A) = 0 \Rightarrow \lambda^2 + 4\lambda + 4 = 0,$$

que fornece $\lambda_1 = \lambda_2 = -2$. Agora, usando a equação (2), vamos encontrar os auto-vetores associados. Para $\lambda = -2$, onde v_1 é seu auto-vetor associado

$$\begin{pmatrix} -2 - (-2) & 0 \\ 1 & -2 - (-2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Daí, obtemos

$$x = 0 \Rightarrow v_1 = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Portanto, tomando $x = 1$, temos que o auto-vetor associado ao auto-valor dado é por

$$v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Para $\lambda = 2$, onde v_2 é seu auto-vetor associado, temos

$$\begin{pmatrix} -2 - 2 & 3 \\ 1 & -2 - 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 1 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Daí, obtemos

$$x = 4y \Rightarrow v_1 = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4y \\ y \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Portanto, tomando $y = 1$, temos que o auto-vetor associado ao auto-valor dado é por

$$v_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Usando a equação 3 para expressar a solução geral, temos

$$X(t) = c_1 e^{-2t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + c_2 e^{2t} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

E o retrato de fase desse sistema é expresso pela Figura 6.

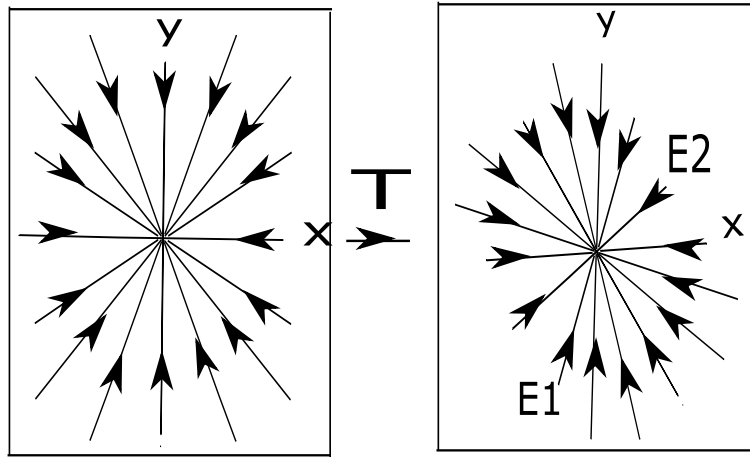


Figura 6: Retrato de fase do Sistema (1) para o exemplo do caso (b)–(1) é o da direita da Figura 6. Onde existe uma transformação T , conforme a definição 2, que através de sua matriz de mudança de base transforma o retrato da base canônica no retrato do sistema onde a base é formada pelos auto-vetores encontrados, neste caso, podemos notar que houve uma pequena rotação do sistema da base canônica para o sistema gerado.

Caso (b)–(2): Neste caso temos apenas um autovetor associado ao único autovalor da transformação. O sistema em estudo representa uma transformação linear como já foi visto na Definição 1 e como toda transformação, deve ter sua base definida. Com efeito, seja v o autovetor associado ao único autovalor λ e $w \in \mathbb{R}^2$ um vetor qualquer, tal que v e w são L.I.. Logo, a transformação pode ser escrita como

$$\begin{cases} T(v) = A \cdot v = \lambda \cdot v \\ T(w) = u \cdot w + \alpha \cdot v \end{cases},$$

onde $A \in M_2(\mathbb{R})$ e $u, \alpha, \lambda \in \mathbb{R}$. Dessa forma, a matriz de mudança de base para a base $\{v, w\}$ é

$$\begin{pmatrix} \lambda & \alpha \\ 0 & u \end{pmatrix},$$

tal que $\alpha \neq 0$. Analisando a matriz A , podemos dizer que λ e u são os valores próprios, pois é uma matriz triangular superior. Sendo assim, os elementos da diagonal principal são iguais, pois sabemos que existe somente um autovalor. Logo, $\lambda = u$. Assim, a matriz A passa a ser escrita como

$$\begin{pmatrix} \lambda & \alpha \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

A fim de simplificar, vamos fazer uma mudança de base para a base (v_1, v_2) , de maneira

a eliminar α . Com efeito, tomando $v_1 = \alpha \cdot v$ e $v_2 = w$, podemos escrever que

$$\begin{cases} T(v_1) = A(v_1) = A(\alpha v) = \alpha A(v) = \alpha(\lambda v) = \lambda(\alpha v) = \lambda v_1, \\ T(v_2) = Av_2 = Aw = uw + \alpha v = \lambda w + v_1 = \lambda v_2 + v_1. \end{cases}$$

Portanto, o operador linear pode ser escrito na base (v_1, v_2) e temos a matriz de mudança de base

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

Agora, retomamos a solução do sistema onde os vetores são L.I. e A possui inversa. Dessa forma, fazemos o mesmo raciocínio que foi feito para o caso (a) da Seção (1.1) utilizando neste caso a matriz de mudança de base que ora encontramos. Com tudo, temos que

$$Y'(t) = D \cdot Y(t),$$

onde D é a matriz de mudança de base e $Y(t)$ é a matriz coluna das soluções, isto é,

$$\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}.$$

Fazendo as operações, chegaremos a solução do sistema, onde

$$y'(t) = \lambda \cdot y(t) \Rightarrow \frac{dy}{dt} = \lambda \cdot y(t) \Rightarrow \frac{1}{y(t)} \cdot dy = \lambda \cdot dt.$$

Integrando em ambos os lados, temos

$$\ln(|y(t)|) = \lambda t + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Aplicando a função exponencial em ambos os lados da igualdade,

$$e^{\ln(|y|)} = e^{\lambda t + c} \Rightarrow |y(t)| = e^{\lambda t + c} \Rightarrow y(t) = e^{\lambda t} \cdot c_2.$$

Por segundo, resolvendo de forma análoga para $x(t)$, temos

$$x'(t) = \lambda \cdot x(t) + y(t) \Rightarrow x'(t) = \lambda \cdot x(t) + e^{\lambda t} \cdot c_2 \Rightarrow x'(t) - \lambda \cdot x(t) = e^{\lambda t} \cdot c_2,$$

isto é,

$$x'(t) - \lambda \cdot x(t) = e^{\lambda t} \cdot c_2.$$

Vamos resolver a EDO anterior pelo método do fator integrante. Primeiramente, vamos encontrar um fator integrante $I(t)$.

$$I(t) = e^{\int(-\lambda)dt} \Rightarrow I(t) = e^{-\lambda t+c} \Rightarrow I(t) = e^{-\lambda t} c.$$

Voltando a EDO e multiplicando em ambos os lados da igualdade pelo fator integrante, temos

$$\begin{aligned} e^{-\lambda t} \cdot c \cdot x'(t) - \lambda \cdot x(t) \cdot e^{-\lambda t} c &= e^{-\lambda t} c_2 \cdot e^{\lambda t} \cdot c \\ e^{-\lambda t} \cdot x'(t) - \lambda \cdot x(t) \cdot e^{-\lambda t} &= c_2 \\ (e^{-\lambda t} \cdot x(t))' &= c_2. \end{aligned}$$

Integrando em ambos os lados

$$e^{-\lambda t} \cdot x(t) = \int c_2 dt \Rightarrow e^{-\lambda t} \cdot x(t) = c_2 t + c_1,$$

chegamos a,

$$x(t) = c_2 \cdot e^{\lambda t} t + c_1 \cdot e^{\lambda t}.$$

E por fim,

$$X(t) = (c_2 \cdot e^{\lambda t} t + c_1 \cdot e^{\lambda t}, e^{\lambda t} \cdot c_2). \quad (4)$$

Assim encontramos a solução $X(t)$ na sua base canônica. Agora, para esboçarmos o retrato de fase desse caso, teremos algumas considerações a fazer abaixo.

Quando $x(t) = 0$, teremos uma função real $f(t)$ e $y(t) = k$, tal que $k \in \mathbb{R}$, para cada valor que o parâmetro t assumir, ou seja, as curvas irão interceptar o eixo das ordenadas. A seguir, as órbitas terão traços de uma função exponencial uma vez que são expressas por termos que dependem deste tipo de função. Por fim, a medida que t tender a infinito $x(t)$ e $y(t)$ tendem ao infinito se $\alpha > 0$ ou tendem a origem se $\alpha < 0$, onde o eixo representado por $x(t)$ é uma assíntota horizontal.

A singularidade é chamada de nó impróprio estável se $\alpha < 0$ e de nó impróprio instável se $\alpha > 0$. O retrato de fase é visto na Figura 7.

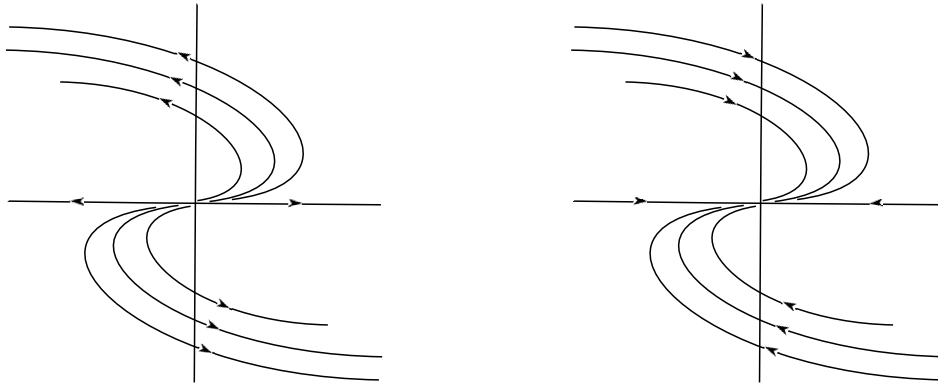


Figura 7: Retrato de fase do Sistema (1) para o caso (b)-(2). Do lado esquerdo temos $\lambda > 0$ que caracteriza um nó impróprio instável (repulsor). Do lado direito temos $\lambda < 0$ que caracteriza também um nó impróprio estável (atrator).

1.3 Solução do Sistema (1) para o Caso (c)

Nesta seção, vamos abordar o caso em que os autovalores são complexos conjugados e buscar inicialmente como nos outros casos uma matriz de mudança de base necessaria para encontrar a solução geral desde que tenhamos autovalores L.I. Inicialmente vamos entender como devem ser os autovetores e autovalores.

Temos que $\lambda_1 = \alpha + \beta i = \overline{\lambda_2}$ e i é a unidade imaginaria dos números complexos, tal que $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e $\beta \neq 0$. Vamos entender como são os autovetores. Seja V_a o autovetor complexo correspondente ao autovalor λ_1 , tal que $V_a = v_1 + v_2 \cdot i$ e $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^2$. Já V_b é o conjugado de V_a e seu autovalor é λ_2 . Entretanto, sabemos que o sistema expresso pela equação (1), como já foi visto anteriormente é uma transformação linear que ocorre dentro do \mathbb{R}^2 , ou seja, devemos encontrar uma base para a transformação que poderá ser dada por (v_1, v_2) , desde que sejam L.I. Sendo assim, vamos supor inicialmente que **não** são L.I., isto é, $v_1 = c \cdot v_2$, onde $c \in \mathbb{R}$. Dado isso e usando a definição de transformação linear, temos

$$A \cdot V_a = (\alpha + \beta \cdot i) \cdot V_a,$$

onde A é a matriz de mudança de base da transformação. Desenvolvendo o primeiro membro da igualdade, temos

$$\begin{aligned} A \cdot V_a &= A \cdot (v_1 + v_2 \cdot i) \\ &= A \cdot (c v_2 + v_2 \cdot i) \\ &= A \cdot (c + i)v_2. \end{aligned}$$

Em seguida, desenvolvendo o segundo membro da igualdade

$$\begin{aligned}(\alpha + \beta \cdot i) \cdot V_a &= (\alpha + \beta \cdot i) \cdot (v_1 + v_2 \cdot i) \\ &= (\alpha + \beta \cdot i) \cdot (cv_2 + v_2 \cdot i) \\ &= (\alpha + \beta \cdot i) \cdot (c + i)v_2.\end{aligned}$$

Com efeito, vamos igualar o resultado obtido dos dois membros

$$A \cdot (c + i)v_2 = (\alpha + \beta \cdot i)(c + i)v_2,$$

e como o termo $(c + i)$ é escalar, podemos simplificar ambos os membros da igualdade, permanecendo

$$A \cdot v_2 = (\alpha + \beta \cdot i) \cdot v_2.$$

Portanto, temos um absurdo, pois temos um vetor real no primeiro membro e um vetor complexo no segundo membro da igualdade, o que nos sugere que v_1 e v_2 sejam **linearmente independentes** e possam formar uma base para a transformação em estudo.

Feito isso, devemos buscar a matriz de mudança de base. Primeiro, iniciamos pela Proposição 1, onde

$$\begin{aligned}A \cdot V_a &= A \cdot (v_1 + v_2 \cdot i) \\ &= Av_1 + Av_2 \cdot i \\ &= Av_1 + Av_2 \cdot i.\end{aligned}$$

Agora, pela Definição 2,

$$\begin{aligned}A \cdot V_a &= (\alpha + \beta \cdot i) \cdot V_a \\ &= (\alpha + \beta \cdot i)(v_1 + v_2 \cdot i) \\ &= \alpha v_1 + \beta v_1 \cdot i + \alpha v_2 \cdot i - v_2 \cdot \beta.\end{aligned}$$

Fazendo a comparação e igualando a parte real e imaginária, temos

$$\begin{cases} Av_1 = \alpha v_1 - \beta v_2 \Rightarrow T(v_1) = \alpha v_1 - \beta v_2, \\ Av_2 = \beta v_1 + \alpha v_2 \Rightarrow T(v_2) = \beta v_1 + \alpha v_2. \end{cases}$$

Com tudo isso entendido, podemos por fim escrever a matriz de mudança de base para esse caso,

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}.$$

Agora, passando para a solução na base canônica como nos outros dois casos, temos

$$Y'(t) = D \cdot Y(t),$$

onde D é a matriz de mudança de base e Y a solução procurada

$$Y(t) = (x(t), y(t)),$$

e dada pela solução do sistema

$$\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}.$$

Resolvendo, temos

$$x'(t) = \alpha x(t) + \beta y(t) \quad (5)$$

$$y'(t) = -\beta x(t) + \alpha y(t) \quad (6)$$

Não está muito claro o caminho a ser tomado para chegar a solução, portanto vamos fazer a mudança para coordenadas polares,

$$\begin{cases} x(t) = r \cos \theta \\ y(t) = r \sin \theta \end{cases} \Rightarrow$$

$$x'(t) = r' \cos \theta - r \theta' \sin \theta, \quad (7)$$

$$y'(t) = r' \sin \theta + r \theta' \cos \theta. \quad (8)$$

Multiplicando a equação (7) por $\cos \theta$ e a equação (8) por $\sin \theta$, temos

$$\begin{cases} \cos \theta x'(t) = r' \cos^2 \theta - r \theta' \cos \theta \sin \theta, \\ \sin \theta y'(t) = r' \sin^2 \theta + r \theta' \sin \theta \cos \theta. \end{cases}$$

em seguida somando-as, obtemos

$$\cos \theta \cdot x'(t) + \sin \theta \cdot y'(t) = r'. \quad (9)$$

Substituindo as equações (5) e (6) na equação (11), temos

$$\begin{aligned}
 r' &= \cos \theta (\alpha x(t) + \beta y(t)) + \sin \theta (-\beta x(t) + \alpha y(t)) \\
 &= \cos \theta \alpha r \cos \theta + \cos \theta \beta r \sin \theta - \sin \theta \beta r \cos \theta + \sin \theta \alpha r \sin \theta \\
 &= \cos^2 \theta \alpha r + \sin^2 \theta \alpha r \\
 &= \alpha r.
 \end{aligned}$$

Em seguida, multiplicando a equação (7) por $-\sin \theta$ e a equação (8) por $\cos \theta$, temos

$$\begin{cases} -\sin \theta x'(t) = -\sin \theta r' \cos \theta + \sin \theta r \theta' \sin \theta, \\ \cos \theta y'(t) = \cos \theta r' \sin \theta + \cos \theta r \theta' \cos \theta. \end{cases}$$

Somando-as,

$$\cos \theta \cdot y'(t) - \sin \theta \cdot x'(t) = r\theta' \quad (10)$$

De forma semelhante, vamos substituir as equações (5) e (6) na equação (10).

$$\begin{aligned}
 r\theta' &= \cos \theta (-\beta x(t) + \alpha y(t)) - \sin \theta (\alpha x(t) + \beta y(t)) \\
 &= \cos \theta \beta r \cos \theta + \cos \theta \alpha r \sin \theta - \sin \theta \alpha r \cos \theta - \sin \theta \beta r \sin \theta \\
 &= -\beta r (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) \\
 &= -\beta r.
 \end{aligned}$$

Com efeito, pode-se escrever o sistema em coordenadas polares como se segue

$$\begin{cases} r' = \alpha r, \\ \theta' = -\beta. \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, temos

$$\begin{cases} r(t) = r_0 e^{\alpha t}, \\ \theta(t) = \theta_0 - \beta t, \quad \text{onde } \theta_0 \text{ e } r_0 \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Como o parâmetro t varia nos reais, podemos escrever sem perda de generalidade o sistema, modificando a segunda equação da seguinte forma

$$\begin{cases} r(t) = r_0 e^{\alpha t}, \\ \theta(t) = \theta_0 + \beta t, \quad \text{onde } \theta_0 \text{ e } r_0 \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Isso nos dá a solução geral do sistema na base canônica e em coordenadas polares, o que está bem posto, uma vez que mesmo analiticamente as expressões em coordenadas polares e cartesianas sejam expressas de forma diferente, geometricamente dizem a mesma coisa, ou seja, os retratos de fase gerados serão o mesmo. E é esse o nosso objetivo do ponto de vista qualitativo.

Agora, iremos esboçar os possíveis retratos de fase a partir da solução geral encontrada.

Caso (c)–(1) ($\alpha = 0$). As órbitas nesse caso, serão circunferências concêntricas de centro na origem, pois o raio é constante e o que vai variar é a abertura ou ângulo. Outro ponto importante, para esse e os outros casos e que será omitido é quando θ for fixo e os semi-eixos serão ora repulsores (t tendendo ao infinito positivo) e ora atratores (t tendendo ao infinito negativo), por motivo de simplicidade uma vez que teremos uma maior quantidade de retratos de fase, onde as outras órbitas direcionam-se ou afastam do ponto de equilíbrio por variação de θ .

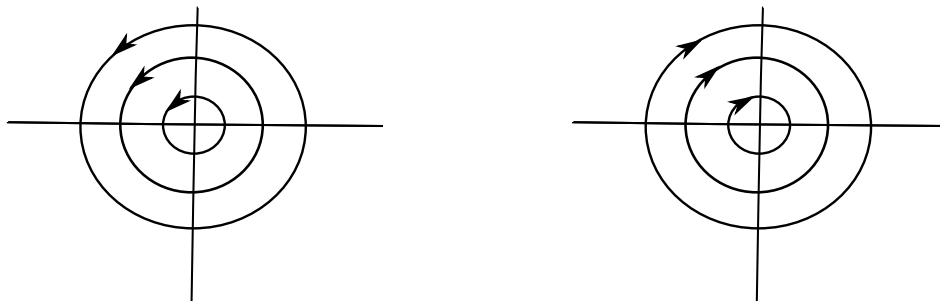


Figura 8: Retrato de fase do Sistema (1) para o caso (c)–(1). Do lado direito temos $\theta < 0$ e t tendendo ao infinito positivo (não atrator e nem repulsor). Do lado esquerdo temos $\theta > 0$ e t tendendo ao infinito positivo (não repulsor e nem atrator).

Caso (c)–(2) ($\alpha \neq 0$). Como $\alpha \neq 0$, o raio varia a medida que o parâmetro t também varia e assim gerando as espirais logarítmicas girando no sentido anti-horário se $\theta < 0$ ($\beta < 0$) e girando no sentido horário se $\theta > 0$ ($\beta > 0$).

Agora, vamos finalizar o estudos dos sistemas lineares através do esboço de uma figura que não tem a pretensão de resumir o conteúdo, muito menos de esgotá-lo, mas trazer uma visão geral de quais são as principais figuras que podem expressar o retrato de fase do sistema (1) estudado até então.

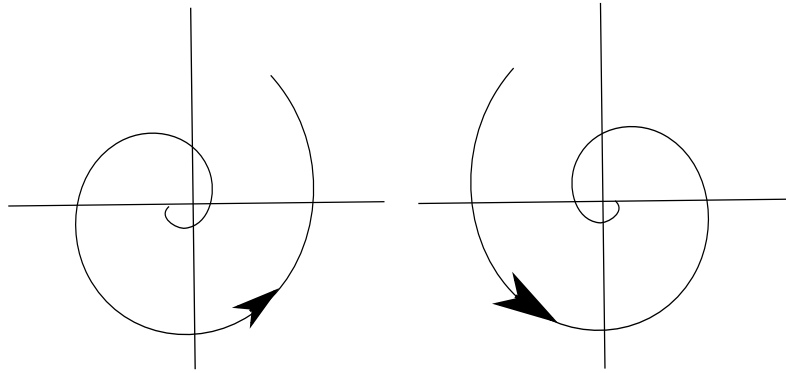


Figura 9: Retrato de fase do Sistema (1) para o caso (c)–(2). Na primeira temos uma espiral se afastando da singularidade ($\alpha > 0$) girando no sentido anti-horário ($\beta > 0$), denominada foco repulsor. Na segunda ocorre uma espiral tendendo a singularidade ($\alpha < 0$) girando no sentido anti-horário ($\beta > 0$), neste caso denominada foco atrator.

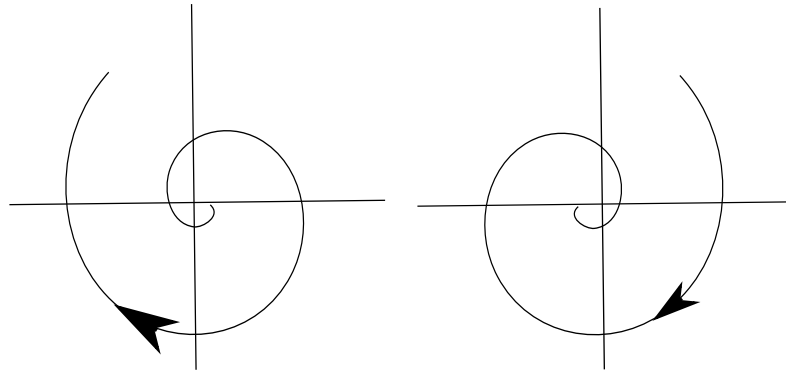


Figura 10: Retrato de fase do Sistema (1) para o caso (c)–(2). Na primeira temos uma espiral se afastando da singularidade ($\alpha > 0$) girando no sentido horário ($\beta < 0$), denominada foco repulsor. Na segunda ocorre uma espiral tendendo a singularidade ($\alpha < 0$) girando no sentido horário ($\beta < 0$), neste caso denominada foco atrator.

Vejamos a Figura (11), gerado a partir do discriminante do polinômio característico.

$$\lambda^2 - Tr(A)\lambda + det(A) = 0$$

$$\Delta = (-T)^2 - 4(1)(D) = T^2 - 4D.$$

Igualando a zero, temos uma equação quadrática, cujo gráfico é expresso abaixo. Onde o $Tr(A) = T$ e o $det(A) = D$.

1.4 Teoria Qualitativa das Equações Diferenciais Ordinárias

Agora, vamos aprimorar a ideia de teoria qualitativa das equações diferenciais ordinárias para podermos estudar alguns sistemas de equações diferenciais não-lineares. Mais uma

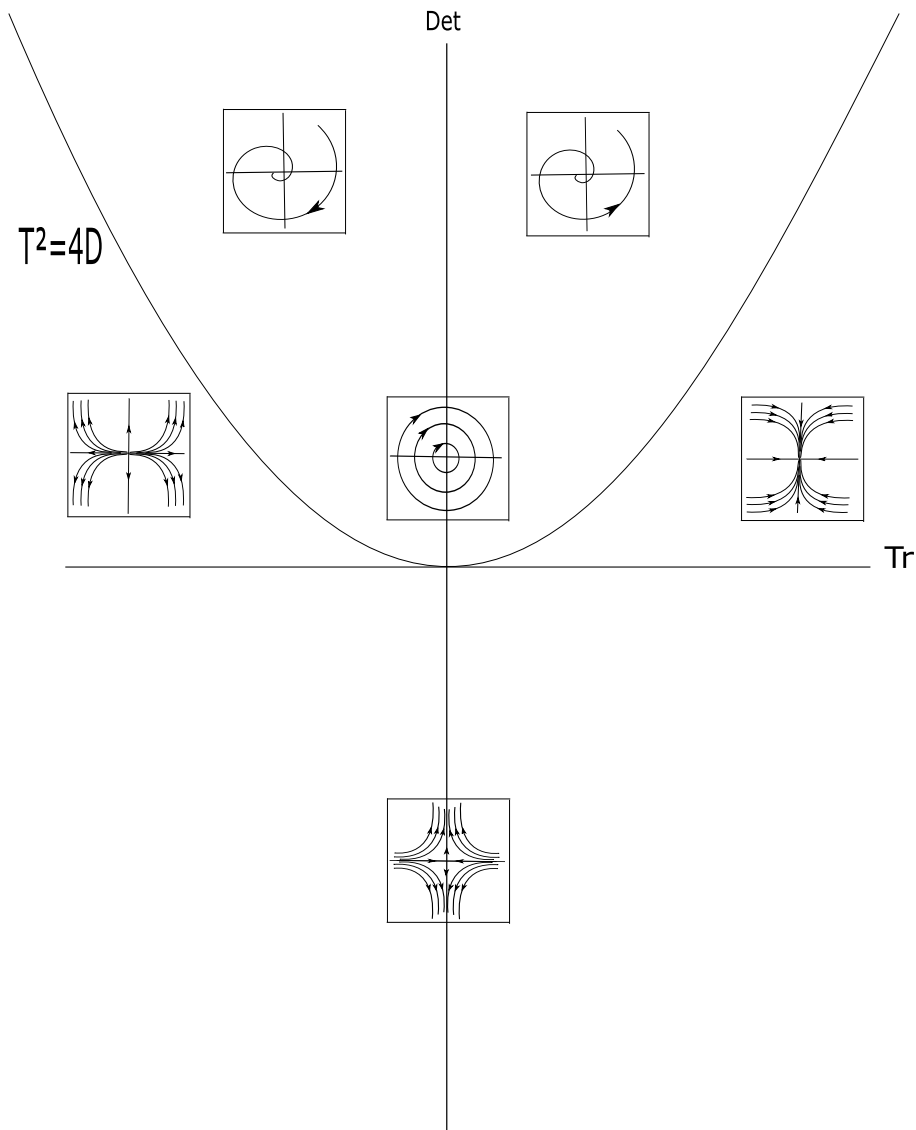


Figura 11: Essa figura reúne a maioria das figuras geradas pelo sistema estudado até então e onde devem estar localizadas dentro do gráfico do discriminante do polinômio característico ($\lambda^2 - Tr(A)\lambda + det(A) = 0$), ou seja, de acordo com o valor de λ temos uma ilustração do posicionamento do retrato de fase do sistema gerado na figura dada.

vez, vamos ressaltar que nem sempre é possível encontrar a solução de forma analítica de sistemas não-lineares, sendo assim, usaremos novos métodos para entender a solução de forma qualitativa, nos casos onde for possível, pois os demais são objetos de estudo em pesquisa na pós-graduação.

Primeiramente, vamos entender e definir os campos de vetores em \mathbb{R}^2 .

2 Sistema Associado a um Campo de Vetores em \mathbb{R}^2

O sistema que vamos estudar é expresso pela equação

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(x, y) \\ f_2(x, y) \end{pmatrix} = f(x, y). \quad (11)$$

onde f é um campo vetorial em \mathbb{R}^2 .

Definição 3. *Considere um sistema na forma (11). Dizemos que (x, y) é um ponto de equilíbrio (ponto singular) do sistema (11), se $f(x, y) = (0, 0)$.*

Uma solução φ do sistema anterior satisfaz

$$\varphi'(t) = f(\varphi(t)).$$

Mostraremos a seguir que um ponto de equilíbrio (x, y) do sistema (11) também é solução. Com efeito, usando a Definição 3 e considerando $\varphi(t) = (x, y)$, temos

$$(0, 0) = \varphi'(t) = (x', y') = f(x, y) = f(\varphi(t)).$$

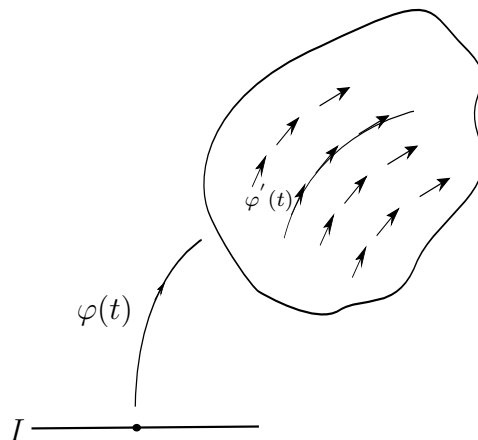


Figura 12: Nessa Figura, temos representado uma órbita ou curva integral, que vamos definir na subseção seguinte, que nos permite entender os campos de vetores ao escrever $\varphi'(t) = f(\varphi(t))$ ou seja, para cada $t \in I$ existe um vetor tangente as curvas integrais $\varphi(t)$ dado por pelo campo f .

2.1 Fluxo de um Campo Vetorial em \mathbb{R}^2

Nessa subseção vamos estudar um assunto de grande importância para continuidade do nosso trabalho e avanço na teoria qualitativa das EDO's: o fluxo gerado pelo campo de

vetores. A grosso modo, o fluxo é a forma analítica da solução de um campo de vetores. Vamos definir fluxo em \mathbb{R}^2 .

Definição 4. Para cada $(t, p) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$, definimos o **fluxo** de f e denotamos por $\varphi(t, p)$ a aplicação que determina a posição partindo de p com um tempo t a partir da solução que passa por p .

A proposição a seguir nos fornece uma propriedade muito importante sobre fluxo de um campo vetorial. Sua prova pode ser encontrada em [3].

Proposição 2. Se $\varphi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$ é o fluxo de um campo $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ de classe C^1 , então

$$\varphi(t + s, p) = \varphi(s, \varphi(t, p)),$$

onde $p = (x, y)$.

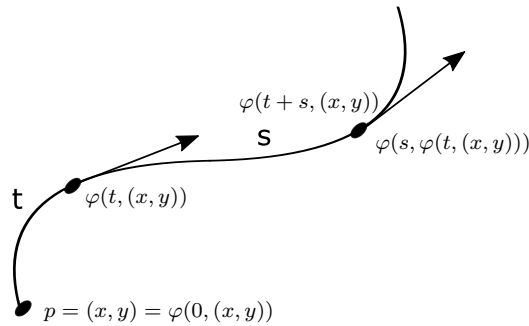


Figura 13: Nessa figura, temos representado um fluxo da órbita de um campo f expresso pela equação (11).

Usando a Definição 4, vamos definir os conceitos α -limite e ω -limite de um ponto $p = (x, y)$.

Definição 5. Definimos ω -limite de um ponto $p = (x, y)$ como sendo o limite

$$\omega(x, y) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi(t, (x, y)).$$

Da mesma forma, definimos α -limite de um ponto $p = (x, y)$ como sendo o limite

$$\alpha(x, y) = \lim_{t \rightarrow -\infty} \varphi(t, (x, y)).$$

Assim, podemos encontrar o “futuro” ou o “passado” de um ponto $p = (x, y)$. Dessa forma, podemos definir as órbitas de um sistema e seu retrato de fase. Agora, vamos descrever em casos separados quais são os possíveis α -limite e ω -limite de um sistema.

1) Ponto de equilíbrio (ponto singular)

É o caso mais simples e ocorre em todos os casos do sistema linear, com exceção do centro.

2) Órbita periódica

São as dadas por $\varphi(t_0, (x, y)) = (x, y)$ e $f(x, y) \neq (0, 0)$. O tempo t_0 é o período da órbita.

3) Imagem biunívoca de um intervalo de \mathbb{R} ou Grafo.

Esse caso é um pouco mais complexo, onde na verdade temos mais de uma órbita representado na mesma figura, conforme podemos ver na figura abaixo.

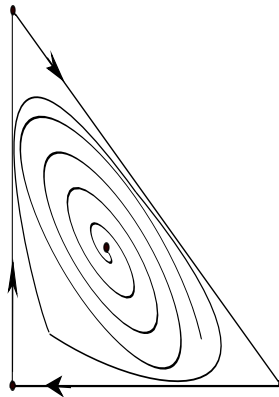


Figura 14: Nessa figura, está representada uma órbita em espiral tendendo a um grafo (semelhante a um triângulo).

Definição 6. O conjunto $\gamma_p = \{\varphi(t, p), t \in I_p \subset \mathbb{R}\}$ denomina-se órbita ou trajetória de f pelo ponto p .

Uma observação importante é que $q \in \gamma_p \Leftrightarrow \gamma_q = \gamma_p$. E dessa forma, o retrato de fase do sistema f é dado pela reunião de todas as curvas γ .

2.2 Alguns Aspectos da Teoria Qualitativa das E.D.O's em \mathbb{R}^2

2.2.1 Equivalência e Conjugação de Campos Vetoriais

Se $f_1 : \Delta_1 \rightarrow \Delta_2$ e $f_2 : \Delta'_1 \rightarrow \Delta'_2$ são campos vetoriais, ambos definidos no \mathbb{R}^2 , conforme a equação (11), dizemos que f_1 é **topologicamente equivalente** a f_2 quando existe um homeomorfismo h que leva órbitas de f_1 a órbitas de f_2 , preservando a orientação. Mais precisamente sejam $p \in \Delta_1$ e γ^1 a órbita orientada de f_1 passando por p , então $h(\gamma^1(p))$ é a órbita orientada $\gamma^2(h(p))$ de f_2 passando por $h(p)$. De forma semelhante se φ_1 e φ_2 são os fluxos gerados pelos campos f_1 e f_2 , respectivamente, diz-se que f_1 é **topologicamente conjugado** a f_2 , se existe um homeomorfismo h , tal que $h(\varphi_1(t, p)) = \varphi_2(t, h(p))$.

Exemplo 4. Considere o campo não-linear

$$f(x, y) = (x, -y + x^3). \quad (12)$$

O fluxo desse campo é dado por

$$\varphi(t, (a, b)) = \left(ae^t, \left(b - \frac{a^3}{4} \right) e^{-t} + \frac{a^3 e^{3t}}{4} \right).$$

Considere o campo linear dado por

$$g(x, y) = (x, -y). \quad (13)$$

É fácil perceber que esse campo possui uma sela na origem. Podemos encontrar o fluxo gerado por esse campo encontrando a solução analítica do sistema associado a esse campo, conforme vimos no Capítulo 1.

Afirmamos que o fluxo desse campo linear é dado por

$$\psi(t, (a, b)) = (ae^t, be^t).$$

De fato, como o sistema associado está na sua forma canônica, sua solução é

$$X(t) = c_1 e^t \vec{i} + c_2 e^{-t} \vec{j}.$$

Usando a condição inicial $X(0) = (a, b)$, temos que $(c_1, c_2) = (a, b)$. Assim, o fluxo torna-se

$$\psi(t, (a, b)) = (ae^t, be^t).$$

Agora, vamos mostrar que o homeomorfismo h definido por

$$h(x, y) = \left(x, y + \frac{x^3}{4} \right),$$

é uma conjugação entre os campos (12) e (13), isto é, vamos mostrar que

$$h(\psi(t, p)) = \varphi(t, h(p)).$$

Primeiramente para o primeiro membro, temos

$$h(\psi(t, p)) = h(ae^t, be^t) = \left(ae^t, be^t + \frac{a^3 e^{3t}}{4} \right),$$

De modo análogo para o segundo membro, temos

$$\varphi(t, h(p)) = \varphi\left(t, \left(a, b + \frac{a^3}{4}\right)\right) = \left(ae^t, \left(b + \frac{a^3}{4} - \frac{a^3}{4}\right)e^{-t} + \frac{a^3 e^{3t}}{4}\right) = \left(ae^t, be^{-t} + \frac{a^3 e^{3t}}{4}\right).$$

Portanto, concluímos que

$$h(\psi(t, p)) = \varphi(t, h(p)).$$

A Figura 15 ilustra bem o homeomorfismo h dado.

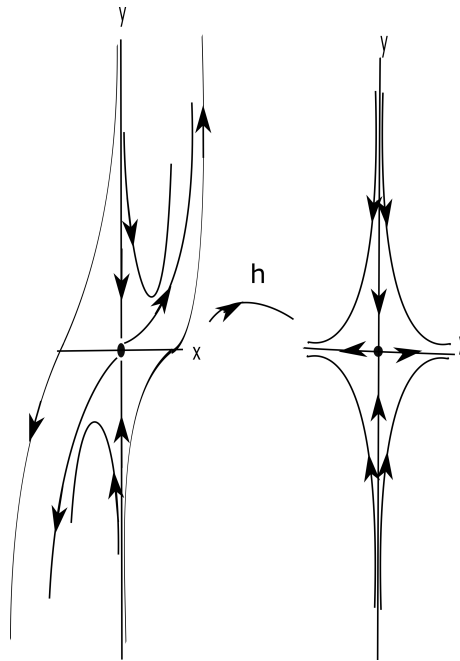


Figura 15: Nessa figura está representado a esquerda o retrato de fase do sistema não linear associado ao campo (12) e a figura a direita representa o retrato de fase do sistema linear associado ao campo (13).

Podemos identificar a relação de conjugação como sendo também uma relação de equivalência. Uma equivalência entre f_1 e f_2 leva ponto singular em ponto singular e órbita periódica em órbita periódica. É claro que toda conjugação é uma equivalência mas o recíproco nem sempre ocorre. Se h for uma conjugação, o período das órbitas também é preservado.

A seguir apresentaremos um resultado bastante importante na teoria qualitativa das equações diferenciais ordinárias: o Teorema do Fluxo Tubular. O seguinte teorema nos fornece o comportamento local das soluções de um sistema na vizinhança de pontos regulares. A prova desse teorema não será fornecida aqui pois necessita de alguns conceitos que não estão dentre as prioridades desse trabalho. Tal prova pode ser encontrada em [8].

Teorema 1 (Fluxo Tubular). *Seja p um ponto não singular de um campo vetorial $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ de classe C^r associado a um sistema de equações diferenciais na forma (11) e Σ uma seção transversal local de f passando por p . Então existe uma vizinhança V de p em \mathbb{R}^2 e um difeomorfismo $h : V \rightarrow (-\varepsilon, \varepsilon) \times (-a, a)$ de classe C^r , com $\varepsilon > 0$ tal que*

a) $h(\Sigma \cup V) = \{0\} \times (-a, a)$.

b) h é uma C^r conjugação entre $f|_V$ e o campo constante $Y : (-\varepsilon, \varepsilon) \times (-a, a) \rightarrow \mathbb{R}^2$, $Y = (1, 0)$.

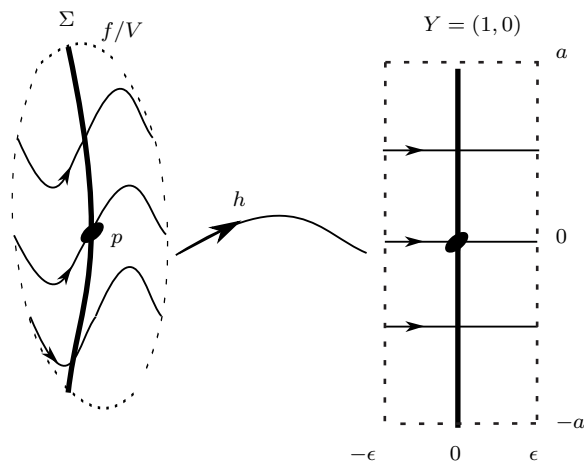


Figura 16: Nessa figura temos a representação geométrica do teorema do fluxo tubular para a classe de sistema (11).

Esse teorema é muito importante, pois nos diz que estudar o comportamento de um campo na vizinhança de um ponto regular não é interessante pois, como acabamos de

ver, o campo na vizinhança de um ponto regular é conjugado a um campo constante que não possui propriedades interessantes a serem estudadas. Assim, faz sentido focarmos nossos estudos em pontos singulares. Na subseção seguinte, vamos dar início ao estudo dos pontos *singulares hiperbólicos*.

2.2.2 Estrutura Local dos Pontos Singulares Hiperbólicos

Nessa subseção daremos início ao estudo de pontos singulares hiperbólicos. A seguir, vamos definir esse conceito.

Definição 7. *Um ponto singular (equilíbrio) p de um campo f de classe C^r é dito **hiperbólico** se todos os autovalores de $Df(p)$ têm parte real diferente de zero, onde $Df(p)$ denota a matriz jacobiana de f em p . O número de autovalores de $Df(p)$ que têm parte real negativa chama-se índice de estabilidade de f em p .*

O Teorema de Hartman-Grobman é um dos mais importantes resultados da teoria qualitativa das equações diferenciais ordinárias. Este teorema nos diz que dado um sistema não linear na forma (11) e um ponto singular hiperbólico p desse sistema, então sua linearização em p nos dá um sistema que é topologicamente conjugado ao não linear na vizinhança de p . Dessa forma, estudando o comportamento qualitativo da linearização do sistema original em torno dos pontos singulares hiperbólicos, podemos inferir também sobre o comportamento deste.

Teorema 2 (Teorema de Hartman-Grobman). *Seja $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ um campo de classe C^1 e p um ponto singular hiperbólico de f . Então, existem vizinhanças V de p em \mathbb{R}^2 e W de $(0, 0)$ tais que $f|_V$ é topologicamente conjugado a $Df(p)|_W$.*

Exemplo 5. Vamos aplicar o teorema de Hartman-Grobman para o Exemplo 1. Sejam $f_1 = x$ e $f_2 = -y + x^3$. Primeiramente, podemos ver que f só tem um ponto de equilíbrio dado por $(0, 0)$. Vamos verificar que este é hiperbólico. De fato,

$$Df(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(x, y) & \frac{\partial f_1}{\partial y}(x, y) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(x, y) & \frac{\partial f_2}{\partial y}(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3x^2 & -1 \end{pmatrix},$$

Agora, substituindo no ponto de equilíbrio $(0, 0)$, temos

$$Df(0, 0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

que tem autovalores $\lambda = \pm 1$ e portanto com parte real não nula. Assim, pelo teorema de Hartman-Grobman, o sistema associado ao campo f é topologicamente conjugado ao sistema linear dado por

$$\dot{X} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} X,$$

na vizinhança de $(0, 0)$. Esse sistema linear corresponde ao campo linear $g(x, y) = (x - y)$.

3 Futuras Direções

Futuramente pretendemos aprofundar o estudo de sistemas de EDO's, passando primeiramente pelos tópicos que dão continuidade aos assuntos estudados nesse trabalho de conclusão de curso que complementarão a teoria qualitativa das EDO's, sem ter a pretensão de esgotá-los. Alguns tópicos a serem estudados serão: estrutura local de órbitas periódicas, transformação de Poincaré e ciclos limites no plano. Em seguida, o aluno pretende dar continuidade aos estudos cursando um mestrado acadêmico, no qual o curso de EDO oportunizará o aperfeiçoamento da teoria qualitativa que é da área temática de Sistemas Dinâmicos. E por fim, se possível, o aluno pretende ir mais além e cursar um doutorado na área.

4 Considerações Finais

O presente estudo está direcionado na teoria de sistemas dinâmicos, que apesar de não ser o interesse imediato é uma área temática muito aplicada às ciências exatas, além do conteúdo em estudo estar inserido nessa área temática.

Esse estudo servirá como base para os estudantes que iniciarão seus estudos em teoria qualitativa, uma vez que buscamos explicar o máximo de conteúdo relacionados e sempre que possível passando pela demonstração de fórmulas e expandindo as contas ora ocultas em livros.

Assim, para aprimorarmos esse estudo devemos primeiramente entendermos a fundo os tópicos de análise na reta e de análise no \mathbb{R}^n , pois muitas demonstrações são feitas em cima desta teoria, e que sem dúvida vem para facilitar o entendimento e a solução dos resultados em teoria qualitativa. Uma prova disso, pode ser vista em [3], que trata da exponencial de matrizes e de números complexos.

Em suma, esperamos que o conteúdo possa gerar o entendimento inicial necessário para compreender a literatura disponível nos livros que estão em paralelo com a referência bibliográfica e futuramente trazer motivação para os discentes interessados em iniciar sua pesquisa na área de Sistemas Dinâmicos.

Referências

- [1] Callioli, C., *Algebra Linear e Aplicações*, Editora Atual, São Paulo, 1996.
- [2] Devaney, R. L., Hirsch, M. and Smale, S., *Differential Equations, Dynamical Systems, and An Introduction to Chaos*, Elsevier Academic Press, San Diego, 2004.
- [3] Doering, C. I. and Lopes, A. O., *Equações Diferenciais Ordinárias*, Coleção Matemática Universitária - IMPA, Rio de Janeiro, 2005.
- [4] Dumortier, F., Llibre, J. and Artés, J. C., *Qualitative Theory of Planar Differential Systems*, Springer, New York, 2006.
- [5] Guckenheimer, J. and Holmes, P. J., *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields*, Applied Mathematical Sciences, 1983.
- [6] Hirsch, M. and Smale, S., *Differential Equations, Dynamical Systems, and Linear Algebra*, Academic Press, New York, 1974.
- [7] Lima, E. L., *Curso de Análise*, Vol.1, Projeto Euclides, IMPA, Rio de Janeiro, 2006.
- [8] Sotomayor, J., *Lições de Equações Diferenciais Ordinárias*, Projeto Euclides, IMPA, Rio de Janeiro, 1979.
- [9] Scardua, B. C. A., *Tópicos de Equações Diferenciais Ordinárias*, Colóquio Brasileiro de Matemática . IMPA, Rio de Janeiro, 1999.